فقدان استقرار قضيب عند تطبيق إجهاد طولي لفترة طويلة

د. حسن محمد خليفة *

(تاريخ الإيداع 30 / 1 / 2019. قُبِل للنشر في 28 / 5 /2019)

□ ملخّص □

يفقد القضيب استقراره عندما نطبق عليه حمل طولي بشكل مفاجئ أقل من فترة حمولة أويلر الحرجة، ويمر في أشكال شبيه بالتوازن (مسألة أويلر الكلاسيكية). تصبح دراسة المسألة أكثر تعقيداً عند تطبيق إجهاد طولي ديناميكي. تنتشر في القضيب، في حالات متقدمة، موجات طولية مرنة يمكن أن تولد اهتزازات عرضية شديدة.

طبقنا في هذه المقالة، الحمولة الطولية لفترة زمنية طويلة ولكنها أقل من فترة أويلر الحرجة. ودرسنا تأثير النعومة للحمولة الطولية على سعة الاهتزازات العرضية.

الكلمات المفتاحية: حمولة أويلر الحرجة،استقرار، مرن، اهتزاز ، توافقي.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

Hasan Khalifa60@yahoo.com

Loss of beam stability when applying a long-time load

Dr. Hasan Mohammad Khalifeh *

(Received 30 / 1 / 2019. Accepted 28 / 5 /2019)

□ ABSTRACT □

As known, when suddenly applying longitudinal load, less than Euler critical load, the beam (rod) loses its stability and passes into pseudo-equilibrium states (Euler classical problem).

The problem becomes more complex for dynamic longitudinal load, and in advanced cases, longitudinal waves propagate along the beam and could generate intensive transversal oscillations.

In this paper, we consider a long-time load, less than Euler's critical limit, and we study the influence of the smoothness factor of longitudinal load application on the beam on transversal oscillations amplitude.

Key Words: Euler critical load, stability, elastic, oscillation, resonance.

***Associate Professor. Department of mathematics Faculty of science- University of Tishreen- Lattakia-Syria. Hasan Khalifa60@yahoo.com**

مقدمة:

إن زمن انتشار الموجة الطولية على طول القضيب أقل بكثير من أصغر دور للاهتزازات العرضية، لذلك وكقاعدة فإنه يتم استخدام نموذج تقريبي يعتبر أن الموجة تنتشر فجأة على طول القضيب وقوة الانضغاط المحوري ثابتة. وفق هذه الصيغة تم حل المسائل بتطبيق مفاجئ لحمل محدود يتجاوز القيمة الحرجة في الحالة الساكنة في [1] ومع حمولة تزداد بشكل خطي مع الزمن في [2] وحمولة تتغير بشكل دوري مع الزمن وتؤدي إلى الرنين البارامتري في [3,4].

تنمو في التقريب الخطي سعة الاهتزازات العرضية بشكل غير محدود ومع اتباع نهج غير خطي تنشأ انحناءات (تقلقل) مرتبطة بانتقال طاقة الاهتزازات الطولية إلى العرضية والعكس بالعكس. في هذه الحالة يمكن أن تكون سعة الاهتزازات العرضية كبيرة. عند عمل القوة لفترة طويلة مع حمولة تفوق اويلر (Euler) فإنه على حد سواء في الحالتين الخطية وشبه الخطية لا يقود إلى قيم محدودة لمطالات الإزاحات العرضية.

أهمية البحث وأهدافه:

إنّ عملية تنظيم التحريضات الاهتزازية وحماية الجسم البشري تملك الاهمية الأولى من أجل تحسين ظروف العمل والحماية من أضرار الاهتزازات.

يتم دراسة الفقدان الديناميكي لاستقرار قضيب رقيق مع نهايات مدعومة بشكل محوري. تحت تأثير حمل طولي سلس في المرحلة الأولية من الحركة ، والتي تكون محدودة بطول المدى للموجة الطولية. يتم حل المشكلة في تقريب خطي. يقارن حجم الانحراف الإضافي مع حجم الاضطرابات الأولية.

طرائق البحث ومواده:

يتم أولاً النظر في نموذج تقريبي يأخذ بعين الاعتبار تأثير القوة الطولية على الحركات العرضية، دون إهمال تأثير الاهتزازات العرضية على الطولية (نموذج عارضة برنولي – اويلر) [3,5]. ولقد استخدمت طريقة نشر تابع الإزاحة في سلسلة قوى وطريقة تحليل فورييه وذلك لإيجاد طريقة لحل المسألة المدروسة.

1- انتشار الأمواج الطولية

يوصف انتشار الأمواج الطولية في قضيب بالمعادلة:

$$ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

حيث $u(x,t)$ الإزاحة الطولانية للمقطع العرضي، x الإحداثي الطولي، t الزمن، E معمل يونغ، ρ كثافة المادة و S المقطع العرضي الثابت للقضيب.

تملك الشروط الحدية والابتدائية الشكل:

$$\begin{aligned} &ES\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} -P_0 & ;0 \le t \le T \\ 0 & ;\ t > T \end{cases} \quad , \quad u(\ell,0) = 0 \\ &u(x,0) = 0 \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le L \end{aligned} \qquad (2)$$

T زمن تأثير قوة الصدم، $\ell = \frac{1}{\mu}$ وسيط كبير للطول حيث μ معامل سماكة القضيب. توافق الشروط (2) الانضغاط المستمر للقوة P_0 ($P_0 > 0$ عند الانضغاط)

من أجل دراسة الحركات العرضية للقضيب من الضروري العثور على دالة:

$$P(x,t) = ES\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3}$$

من أجل $0 \le x \le L\ ,\ t > 0$.

إن الحل العام للمعادلة الموجية (1) مع الأخذ بالحسبان (3) له الشكل:

$$P(x,t) = -P_0\left(f(x-ct) + g(x+ct)\right);\quad c^2 = \frac{E}{\rho} \tag{4}$$

حيث c سرعة الصوت والدالتان $g(z), f(z)$ تتعينان بالشروط (2).

بفرض أن $T_0 = \frac{L}{c}$ زمن انتقال الموجة على طول القضيب. يمكن اتباع طرق مختلفة لدراسة الحركات المستعرضة اعتماداً على العلاقة بين T_0, T .

2- الحركات العرضية الصغيرة للقضيب

توصف الحركات العرضية الصغيرة للقضيب وفقاً للنموذج المدروس بالمعادلة:

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P(x,t)\frac{\partial(w_0 + w)}{\partial x}\right) + \rho S\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

حيث $w_0 + w$ هو الانحراف الكلي لمحور القضيب عن الخط المستقيم، $w_0(x) = \varphi(x)$ تعطي الانحراف الابتدائي، $w(x,t)$ الانحراف الاضافي المرغوب، J عزم عطالة المقطع العرضي.

تؤخذ الشروط الابتدائية:

$$w(x,0) = w_t(x,0) = 0\ \ ;\ 0 \le x \le L \tag{6}$$

في حين يؤخذ نوعين من الشروط الحدية:

$$w = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\ \ ;\ (x = 0,\ x = L) \tag{7}$$

$$EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - P(0,t)\frac{\partial(w_0 + w)}{\partial x} = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ ;\ (x = 0),\quad w = \frac{\partial w}{\partial x}\ ;\ (x = L) \tag{8}$$

الأول منها يقابل الحواف المدعومة بمفاصل والثاني حواف حرة وحواف ثابتة بشكل صارم.

تكتب المعادلة (5) في شكل بلا ابعاد، حيث طول القضيب وزمن انتقال الموجة الطولية على طول القضيب يساوي الواحدة [6].

$$\mu\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varepsilon(x_1,t_1)\frac{\partial(w_0 + w)}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = 0\ \ ;\ \ 0 \le x_1 \le 1 \tag{9}$$

حيث:

$$x = Lx_1\,,\ t = \frac{L}{c}t_1 \quad , \quad \mu = \frac{J}{SL^2} = \left(\frac{r}{L}\right)^2 << 1\,;\, r = \sqrt{\frac{L}{S}}$$

$$\varepsilon(x_1, t_1) = \frac{\rho}{ES}\varepsilon_0\left(f(x_1 - t_1) + g(x_1 + t_1)\right) \;;\; \varepsilon_0 = \frac{P_0}{ES} = 0$$

r نصف قطر عطالة المقطع، $\varepsilon(x_1, t_1)$ التشوه الطولي لانضغاط محور القضيب. $g(z), f(z)$ كما في (4).

النتائج والمناقشة:

درس أويلر [7] المسألة الكلاسيكية لاتزان قضيب يخضع لقوة ضغط ثابتة $(\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 = const)$. صيغة فقدان الاستقرار مع m من أنصاف الموجات $w(x) = w_0 \sin\frac{m\pi\, x}{\ell}$ توافق تشوه القضيب $\varepsilon_m = \frac{m^2\pi^2}{\ell^2}$. من أجل m=1 نحصل على الاجهاد الكلاسيكي الحرج لاويلر $\varepsilon_{ct} = \frac{\pi^2}{\ell^2}$.

نبحث عن حل المعادلة (9) على شكل سلسلة فورييه:

$$w(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t)\sin p_m x \quad ; \quad p_m x = \frac{m\pi}{\ell}$$

حيث تشوه الانضغاط الطولي $\varepsilon(x,t)$ (حل المعادلة (1)) يعبر عنه في سلسلة فورييه أيضاً:

$$\varepsilon(x,t) = -\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_0 - \frac{2\varepsilon_0}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{v_k}\sin(v_k x)\cos(v_k x) \quad ; \quad v_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\ell}$$

ويصف دالة دورية $\varepsilon(x, t+4\ell) = \varepsilon(x,t)$ دورها يساوي أربع أضعاف شوط الموجة الطولية على طول القضيب. من ناحية أخرى ومن أجل $t < \ell$ فإنه يمكن أن نعبر عن الحل على شكل موجة متحركة [8].

يتولد في القضيب عند تعرضه لجهد طولي (صدم) جملة من الأمواج الطولية الدورية. وعند قيم محدودة لوسطاء المسألة في التقريب الخطي، تولد هذه الموجات رنيناً بارامترياً مصحوباً بزيادة غير محدودة في اتساع الذبذبات العرضية. من أجل الحصول على مطالات محدودة، نأخذ جملة شبه خطية تأخذ بعين الاعتبار تأثير الاهتزازات العرضية على الطولية.

3- جملة المعادلات شبه الخطية لحركة القضيب

ندرس حركة قضيب رقيق مرن لزج تحت تأثير قوة طولية مفاجئة مطبقة على الطرف الأيسر. في الاتجاه الطولي يتم تثبيت الطرف الأيمن وفي الاتجاه العرضي يتم دعم الطرفين بشكل متماسك مفصلياً.

بالاعتماد على نموذج عارضة برنولي أولر فإن معادلة الحركة في صيغة شبه خطية وشكل بلا أبعاد (المعاملات غير مقاسة) تأخذ الشكل الآتي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left(1+\frac{\delta_u}{\omega_u}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}=0\ \ ;\ \varepsilon=-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\varepsilon_0(t)\ ,\ u(l,t)=0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial(w+w_0)}{\partial x}\right)+\mu^2\left(1+\frac{\delta_w}{\omega_w}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0\ \ ;\quad w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ x=0{,}1 \quad (11)$$

هنا $u(x,t)$, $w(x,t)$ هي مركبات الإزاحة. طول القضيب وزمن انتقال الموجة على طول القضيب تؤخذ كواحدات طول وزمن حيث:

$$l=\frac{1}{\mu},\quad \mu=\frac{r}{L}\ ,\quad J=Sr^2\quad ,\varepsilon_0(t)=\varepsilon_0 f(t)$$

μ معامل سماكة القضيب، L طول القضيب، r نصف قطر عطالة المقطع العرضي، S مساحة المقطع العرضي و J عزم عطالته. ونستخدم l وسيط كبير للطول. نعبر عن التشوه الطولي لانضغاط القضيب من خلال $\varepsilon(x,t)$ المرتبط مع قوة الضغط الطولية بالعلاقة $P=ES\varepsilon$ حيث E معامل يونغ (في التقريب الخطي $\varepsilon=-\frac{\partial u}{\partial x}$).

δ_w,δ_u معاملات ممانعة الاهتزازات الطولية والعرضية، ω_w,ω_u الترددات المميزة للاهتزازات. حيث نعتبر الشروط الابتدائية من أجل الإزاحات الطولية $u(x,t)$ صفرية. أما من أجل الإزاحات العرضية $w(x,t)$ فإن التلاشي صغير ولكن لا يساوي الصفر، لأنه في خلاف ذلك فإن إثارة الاهتزازات المستعرضة غير ممكن.

تعتبر المعادلات (10) و (11) الأساس في دراستنا، فيها: $\varepsilon_0(t)=\varepsilon_0 f(t)=\frac{P(t)}{ES}$ التشوه المعطى في الطرف الأيسر من القضيب. إن صيغة فقدان الاستقرار مع m من أنصاف الموجات $w(x)=W\sin m\pi x$ توافق تشوه القضيب $\varepsilon_m=\mu^2 m^2\pi^2$. من أجل m=1 فإن $\varepsilon_{ct}=\mu^2\pi^2$ التشوه المطابق لقوة الضغط الطولية الحرجة لاويلر [6,9]. ندرس هنا التأثير طويل الأمد عندما $\varepsilon_0<\varepsilon_{ct}$. أما من أجل $\varepsilon_0>\varepsilon_{ct}$ فأن الانحرافات يمكن أن تكون كبيرة ودقة المعادلة (10) غير كافية.

عند التطبيق المفاجئ للقوة فإن $f(t)=1\,;0\le t<\infty$ وعند التطبيق السلس نأخذ $f(0)=0\ ,\ f'(0)>0$ و $f(t)\to 1$ عندما $t\to\infty$ [1,10].

في المرحلة الاولية من الحركة تكون الانحرافات العرضية صغيرة ويمكن استخدام تقريب خطي لوصف الحركة [6,11]. نفرض $w=0$ في المعادلة (10) و $\varepsilon=-\frac{\partial u}{\partial x}$ في المعادلة (11) تؤول المسألة (10) و (11) إلى حل متسلسل لمسألتين خطيتين حديتين.

آ- نوجد من المعادلة (10) التشوه المحوري $\varepsilon(x,t)$ في شكل سلسلة بالدالة الخاصة بالمسألة $\varphi_k(t)$ المتعلقة بالنبض $f(t)$ [12]:

$$V''(x)+v^2V(x)=0\ \ ;\ \ V'(0)=0\ \ ,\ \ V(1)=0$$

الاشتقاق هنا بالنسبة لـ x. نوجد:

$$u(x,t)=\varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)V(x)\,;\ V(x)=\cos v_k x \quad ; \quad v_k=(k-0.5)\pi$$
$$\frac{d^2\varphi_k}{dt^2}+\delta_u v_k\frac{d\varphi_k}{dt}+v_k^2\varphi_k=2f(t),\qquad \varphi(0)=\frac{d\varphi}{dt}(0)=0 \tag{12}$$

عندئذٍ:

$$\varepsilon(x,t)=-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=2\varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k(t)}{v_k}\sin v_k x \quad ; \quad \psi_k(t)=v_k^2\,\varphi_k(t) \tag{13}$$

من أجل $\delta_u<<1$ نحصل بالاستفادة من دالة الخطوة الأحادية (Heaviside step function) $H(z)$ حيث $f(t)=H(\tau-t)$ (τ فترة زمنية) على صيغ تقريبية للدالة $\psi_k(t)$:

$$\psi_k(t)=1-\cos v_k t\,e^{-\frac{\delta_u v_k t}{2}} \quad ; (t\le\tau) \tag{14}$$

$$\psi_k(t)=(\cos v_k(t-\tau)-\cos v_k t)e^{-\frac{\delta_u v_k t}{2}} \quad ; (t>\tau) \tag{15}$$

على سبيل المثال من أجل $f(t)=1-e^{-\beta t}$ (β يصف سرعة زيادة القوة) فإن:

$$\psi_k(t)=1-\cos v_k t\,e^{-\frac{\delta_u v_k t}{2}}-\frac{v_k^2}{v_k^2+\beta^2}\left(e^{-\beta t}-e^{-\frac{\delta_u v_k t}{2}}\left(\cos v_k t+\frac{\beta}{v_k}\sin v_k t\right)\right) \tag{16}$$

ومن أجل تطبيق مفاجئ طويل الأمد $(f(t)=1)$ فإن لـ $\psi_k(t)$ الصيغة (14):

تأخذ الصيغ (14) – (16) بالحسبان تأثير اللزوجة. وفي خلاف ذلك (غياب اللزوجة) نضع $\delta_u=0$.

عندما $\delta_u=0$ فإن الدوال $\varepsilon(x,t)$ دورية $\left(\varepsilon(x,t+T)=\varepsilon(x,t);T=\frac{2\pi}{v_1}=4\right)$ من أجل تطبيق مفاجئ $(f(t)=1)$ قصير الأمد عندما $t>\tau$ وطويل الأمد من أجل كل قيم $t>0$. وهذا يقود إلى ظهور الرنين البارامتري.

ب– لدراسة الاهتزازات العرضية نبحث عن حل المعادلة (11) عندما $w_0=0$ في شكل سلسلة فورييه:

$$w(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)\sin m\pi x \tag{17}$$

حيث الدوال $T_m(t)$ تحقق جملة المعادلات:

$$\frac{d^2T_m}{dt^2}+\delta_w\omega_m\frac{dT_m}{dt}+\omega_m^2T_m(t)-\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}(t)T_m(t)=0\ ;\ m=1,2,... \tag{18}$$

هنا $\omega_m=\mu m^2\pi^2$ والمعاملات $a_{mn}(t)$ تساوي:

$$a_{mn}(t)=2mn\pi^2\int_0^1\varepsilon(x,t)\cos(m\pi x)\cos(n\pi x)dx=\varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty}C_{mnk}\varphi_k(t)$$

$$C_{mnk}=4mnv_k^2\left(\frac{1}{(2k-1)^2-4(m-n)^2}+\frac{1}{(2k-1)^2-4(m+n)^2}\right)$$

بفرض $\delta_u = 0$. عندئذٍ من أجل التطبيق المفاجئ للقوة (نبضة قصيرة) $f(t)=1$ تكون الدوال $a_{nm}(t)$ دورية. عندما $\varepsilon_0 = 0$ فإن ترددات الاهتزازات الحرة للجملة (18) تساوي ω_m وتردد الاهتزاز البارامتري المحرض θ يساوي $\theta = v_1 = \dfrac{\pi}{2}$. بالنسبة للقوة المطبقة بسلاسة (على سبيل المثال النموذج $f(t)=1-e^{-\beta t}$ فإن الدوال $a_{mn}(t)$ ليست دورية (كما تبين الصيغ (13), (16) عندما $\delta_u = 0$). من أجل التطبيق المفاجئ للقوة (نبضة طويلة) فإن القيمة الوسطى للتشوه $\varepsilon(x,t)$ تساوي ε_0، بعزله يمكن أن نكتب المعادلة (18) على النحو:

$$\frac{d^2T_m}{dt^2}+\delta_w\omega_m\frac{dT_m}{dt}+\left(\omega_m^2-m^2\pi^2\varepsilon_0\right)T_m(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\hat{a}_{mn}(t)T_n(t)=0\;;\;m=1,2,\ldots \qquad (19)$$

حيث الدوال $\hat{a}_{mn}(t)=a_{mn}(t)-\varepsilon_0\delta_{mn}m^2\pi^2$ تملك قيمة وسطية صفرية (δ_{mn} رمز كرونيكر).

عندما $a_{mn}(t)=0$ يمكن أن يحدث فقدان للاستقرار التوازني في الصيغ الـ m من أجل $\omega_m^2-m^2\pi^2\varepsilon_0<0$ أو $\varepsilon_0>m^2\varepsilon_{ct}$. يقود وجود الدوال الدورية $a_{mn}(t)$ إلى أن فقدان الاستقرار في الصيغ الـ m يمكن أن يحدث عند قيم أصغر لـ ε_0 وبشكل خاص من أجل $\varepsilon_0<\varepsilon_{ct}$ أي من أجل حمولة أقل من اويلر [13].

يعد الطنين البارامتري الرئيسي الأخطر ونحصل عليه من أجل m=n, k=1. عندئذٍ بإهمال التأثير المتبادل لشكل الاهتزازات العرضية تأخذ المعادلة (18) الشكل الآتي:

$$\frac{d^2T_m}{dt^2}+\delta_w\hat{\omega}_m\frac{dT_m}{dt}+\left(\hat{\omega}_m^2+a_m(t)\right)T_m(t)=0\;;\;\hat{\omega}_m^2=\omega_m^2-m^2\pi^2\varepsilon_0\;,\;m=2,3,\ldots \qquad (20)$$

حيث:

$$a_m(t)=8m^2\varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty}C_{km}\cos(v_kt)\;،\;C_{km}=\frac{1}{(2k-1)^2}+\frac{1}{(2k-1)^2-16m^2}$$

من أجل m=1 فإن الطنين البارامتري يتحقق من أجل قضيب قصير للغاية [14]. عندما $a_m(t)=0$ يمكن أن يحصل فقد للاستقرار التوازني للصيغ الـ m عندما $\hat{\omega}_m^2<0$ أو عندما $\varepsilon_0>m^2\varepsilon_{ct}$. حيث $\varepsilon_{ct}=\dfrac{\pi^2}{\ell^2}$ تشوه أويلر الحرج للضغط المحوري.

الاستنتاجات والتوصيات

يتولد في القضيب عند تعرضه لجهد طولي جملة من الأمواج الطولية الدورية. وعند قيم محدودة لوسطاء المسألة في التقريب الخطي، تولد هذه الموجات رنيناً بارامترياً مصحوباً بزيادة غير محدودة في اتساع الذبذبات العرضية. من أجل الحصول على مطالات محدودة، أخذت جملة شبه خطية تأخذ بعين الاعتبار تأثير الاهتزازات العرضية على الطولية. تم بناء حل تحليلي تقريبي لهذه الجملة.

المراجع:

1. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР, 1949. Т. 5. №6.

2. Вольмир А.С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении // Строит. механика и расчет сооруж. 1960. №1. С. 6–9.

3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1962. 880 с.

4. Болотин В.В. Поперечные колебания и критические скорости. Изд. АН СССР. Т. 1. 1951. Т. 2. 1953.

5. Пановко Я. Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука,1987. 177 с.

6. Беляев А.К., Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Биения в задаче о продольном ударепо тонкому стержню // Изв. РАН. МТТ. 2015. № 4. С. 112–125.

7. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.: Гостехиздат, 1934.

8. Абрамян А.К., Индейцев Д.А., Постнов В.А. БЕГУЩИЕ И СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ БАЛКИ ТИМОШЕНКОЮ.Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 101-109

9. Belyaev A.K, Morozov N.F, Tovstik P.E, Tovstik T.P. The Lavrentiev – Ishlinsky problem at the initial stage of motion // Int.J. of Eng. Sci 2015.

10. Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского–Лаврентьева // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 28–33.

11. Specification of cross nonlinear vibration of elastic affective bar. . Hasan khalifeh. Journal of Tishreen university, Vo (36). № (1) 2014.

12. С.Е. Холодова, С.И. Перегудин. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Учебное пособие. Санкт-Петербург 2012

13. Морозов Н.Ф., Товстик П. Е. О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой // Доклады АН. 2014. Т. 453, №3. С. 282–285.

14. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой // ДАН. 2014. Т. 453. № 3. С. 282–285.