$k-$ تطبيق ليندلوف و بعض خواص الفضاء Lc

د. عدنان ظريف *

د.براءه عفيصه **

(تاريخ الإيداع 11 / 2 / 2019. قُبِل للنشر في 19 / 5 /2019)

□ ملخّص □

ليكن (X,τ)فضاءً تبولوجياً كيفياً ، يقال إن X فضاء Lc إذا وفقط إذا كان كل فضاء ليندلوف جزئي من X مغلقاً في X .

في هذا البحث سنقدم بعض الخواص التي يتمتع بها فضاء ليندلوف، ثم نقدم بعض المفاهيم التي تساعدنا في برهان بعض الخواص التي تتمتع بها فضاءات Lc . ونقدم مفهوماً جديداً هو مفهوم $k-$ تطبيق ليندلوف ، ثم نوجد الشروط اللازمة التي تجعل كل $k-$تطبيق ليندلوف هو $k-$ تطبيق .

و كذلك إيجاد الشروط التي يحققها التطبيق كي تصبح الصورة المباشرة لفضاء Lcهي فضاء Lc ، وأخيراً قمنا بإيجاد الشروط التي يحققها تطبيق ما والتي تجعل الصورة العكسية لفضاء Lc هي فضاء Lc مع العلم أن القضيتين غير محققتين بصورة عامة .

الكلمات المفتاحية : الفضاء Lc ، فضاء ليندلوف ، $k-$تطبيق ليندلوف ، $k-$ تطبيق.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات –كلية العلوم– جامعة تشرين –اللاذقية –سورية.

** مدرسة – قسم الرياضيات – كلية العلوم –جامعة تشرين– اللاذقية– سورية.

$k-$ map Lindelof and some properties of $Lc-$ space

Dr. Adnan Zarif *
Dr. Braa Afisa **

(Received 11 / 2 / 2019. Accepted 19 / 5 /2019)

□ ABSTRACT □

Let (X,τ) be a topological space , we say that X is $Lc-space$ iff every Lindelof subspace of X is closed in X .
In this paper we will present some properties of the Lindelof space, and then introduce some concepts that help us to prove some of the properties of $Lc-spaces$.
And we introduce a new concept of K- map Lindelof , then we find the necessary conditions that make each K-map Lindelof is k-map.
we find the conditions on the function that make the direct image of $Lc-space$ is $Lc-space$, and finally we have found the conditions on the function that make the inverse image of $Lc-space$ is $Lc-space$,with the knowledge that the two issues are not investigated in general.

Keywords: $Lc-$space , Lindelof space , $k-$map Lindelof , $k-$map .

*** Associate Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
****Assistant Professor at Mathematics Department, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria**

مقدمة :

لعب فضاء ليندلوف دوراً مهماً للغاية في التبولوجيا وذلك لأن فريقاً من الرياضيين اعتبره نمطاً من أنماط الفضاءات المتراصة ، واعتبره فريق آخر من الرياضيين موضوعة من موضوعات الفصل، حيث تم تقديمه من قبل ألكساندروف وأوريسون في عام 1929 م ،حيث يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء ليندلوف إذا وفقط إذا حصلنا على تغطية جزئية لـ X قابلة للعد على الأكثر من كل تغطية مفتوحة لـ X في (X,τ). وفي عام 1979 م قدم الباحثان T.K.Mukherji و M.Sarkar [3] مفهوماً جديداً وهو فضاء Lc، حيث يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء Lc إذا وفقط إذا كان كل فضاء ليندلوف جزئي من X مغلقاً في X. ولقد ورد مفهوم الفضاء Lc تحت مسمى $L-closed$ وذلك في الأعمال [5] و[6] و[7] و[8] .

ثم تابع الباحث راضي ابراهيم محمد علي الدراسة في هذا الموضوع ففي عام 2006 أثبت مجموعة من النتائج من أهمها : كل فضاء Lc هو فضاء T_1، كل فضاء Lc متراص موضعياً هو فضاء T_2 .[4] .

أهمية البحث وأهدافه :

تكمن أهمية البحث في كونه يقدم توصيفات إضافية لبعض أنواع الفضاءات التبولوجية في مجالي التراص وموضوعات الفصل، ويهدف البحث إلى :

إيجاد الشروط التي يحققها التطبيق كي تصبح الصورة المباشرة لفضاء Lc هي فضاء Lc، مع العلم أن القضية غير محققة بصورة عامة .

وكذلك إيجاد الشروط التي يحققها تطبيق ما بحيث تجعل الصورة العكسية لفضاء Lc هي فضاء Lc، وهذه القضية غير محققة بصورة عامة.

طرائق البحث ومواده:

اعتمدنا في بحثنا على مفاهيم أساسية في التبولوجيا العامة وبشكل خاص في مجالي التراص وفق ليندلوف وفضاء Lc.

بعض الرموز والمصطلحات المستخدمة في البحث :

Lc ($Lc-space$)

$k-$ تطبيق ليندلوف ($k-$ map Lindelof)

X و Y فضائين تبولوجيين .

F اسرة المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي .

التعاريف الأساسية :

تعريف : يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء ليندلوف إذا وفقط إذا حصلنا على تغطية جزئية لـ X قابلة للعد على الأكثر من كل تغطية مفتوحة لـ X في (X,τ).

تعريف : التغطية القابلة للعد على الأكثر هي تغطية قابلة للعد أو منتهية .

تعريف: يقال عن فضاء تبولوجي (X,τ) إنه فضاء Lc إذا وفقط إذا كان كل فضاء ليندلوف جزئي من X مغلقاً في X.

تعريف : ليكن (X,τ) و (Y,τ^*) فضائين تبولوجيين كيفيين . يقال عن التطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ إنه تطبيق مفتوح إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأية مجموعة مفتوحة A في X ، مجموعة مفتوحة في Y.[1].

تعريف : ليكن (X,τ) و (Y,τ^*) فضائين تبولوجيين كيفيين . يقال عن التطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ إنه تطبيق مغلق إذا كانت الصورة المباشرة وفقه لأية مجموعة مغلقة A في X ، مجموعة مغلقة في Y.[1].

تعريف: ليكن (X,τ) و (Y,τ^*) فضائين تبولوجيين كيفيين . يقال عن التطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ إنه $k-$ تطبيق إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة متراصة B من Y، مجموعة متراصة في X وكذلك الصورة المباشرة لأي مجموعة متراصة A في X هي مجموعة متراصة في Y.[2] ، [9].

تعريف :إذا كان (X,τ) و (Y,τ^*) فضائين تبولوجيين كيفيين ، نقول عن التطبيق $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ إنه $k-$ تطبيق ليندلوف إذا كانت الصورة العكسية لأي فضاء ليندلوف جزئي B من Y، هو فضاء ليندلوف جزئي في X وكذلك الصورة المباشرة لأي فضاء ليندلوف جزئي A في X هو فضاء ليندلوف جزئي في Y.

النتائج والمناقشة :

مبرهنات مساعدة:

1- كل فضاء Lc هو فضاء T_1 [4] .

2- كل فضاء Lc متراص موضعياً هو فضاء T_2 .[4] .

3- كل فضاء متراص هو متراص موضعياً [4]

4- بفرض $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تطبيق مستمر و (X,τ) (Y,τ^*), فضائين تبولوجيين كيفيين عندئذ : الصورة المباشرة لأية مجموعة متراصة من (X,τ) هي مجموعة متراصة في (Y,τ^*).[1])

5- بفرض $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تطبيق مستمر و (X,τ) (Y,τ^*), فضائين تبولوجيين كيفيين عندئذ : الصورة المباشرة لأي فضاء جزئي ليندلوف من (X,τ) هو فضاء جزئي ليندلوف في (Y,τ^*).[1])

مبرهنة (1): بفرض (X,τ) فضاء ليندلوف و τ^* تبولوجيا على X بحيث إن $\tau^*\subset\tau$ عندئذ يكون (X,τ^*) فضاء ليندلوف .

البرهان :

إن كل تغطية مفتوحة لـ X في (X,τ^*) هي تغطية مفتوحة لـ X في (X,τ) وبما أن (X,τ) هو فضاء ليندلوف، بالتالي يمكننا أن نحصل على تغطية جزئية قابلة للعد على الأكثر من هذه التغطية المفتوحة ، وهذا يعني أن (X,τ^*) فضاء ليندلوف .

مبرهنة (2): بفرض $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تطبيق مستمر ومفتوح وغامر ، عندئذ:

إذا كان f $k-$تطبيق ليندلوف $\Leftarrow$ f $k-$تطبيق .

البرهان :

بفرض B مجموعة متراصة في Y سنبرهن أن $f^{-1}(B)$ متراصة في X .

بما أن B مجموعة متراصة في Y $\Leftarrow$ B هي فضاء ليندلوف جزئي في Y (كون كل متراصة هي ليندلوف).

$\Leftarrow$ $f^{-1}(B)$ فضاء ليندلوف جزئي في X (كون f $k-$تطبيق ليندلوف)

بالتالي من كل تغطية مفتوحة لـ $f^{-1}(B)$ في X يمكننا الحصول على تغطية جزئية قابلة للعد على الأكثر (من الممكن أن تكون منتهية أو قابلة للعد) .

أي لتكن $\{T_i \ : \ i\in I\}$ تغطية مفتوحة كيفية لـ $f^{-1}(B)$ في X هذا يعني :

$$\boxed{f^{-1}(B)\subseteq \bigcup_{i\in I} T_i} \ (1) \qquad \Rightarrow \boxed{f^{-1}(B)\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i} \ (2)$$

ولنفرض جدلا أن هذه التغطية قابلة للعد و ليست منتهية:

بأخذ الصورة المباشرة لطرفي العلاقة (1) $\Leftarrow$

$$B=f(f^{-1}(B))\subseteq f(\bigcup_{i\in I} T_i)=\bigcup_{i\in I} f(T_i)\Rightarrow \quad \boxed{B\subseteq \bigcup_{i\in I} f(T_i)}$$ (كون f غامر)

وبما ان f مفتوح$\Leftarrow$ $f(T_i)$ مفتوحة في (Y,τ^*) مهما تكن $i\in I$ $\Leftarrow$ $\{f(T_i) \ : \ i\in I\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ B في Y.

وبأخذ الصورة المباشرة لطرفي العلاقة (2) نجد :

$$B=f(f^{-1}(B))\subseteq f(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty} f(T_i) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} f(T_i)}$$ (كون f غامر) .

أي حصلنا من التغطية المفتوحة $\{f(T_i) \ : \ i\in I\}$ لـ B في Y على تغطية جزئية قابلة للعد وهذا تناقض مع كون B مجموعة متراصة $\Leftarrow$التغطية الجزئية هنا هي منتهية بالتالي $\boxed{f^{-1}(B) \text{ متراصة في } X}$ $\boxed{1}$.

ومن جهة ثانية :

بفرض A مجموعة متراصة في X سنبرهن أن $f(A)$ متراصة في Y.

بما ان A مجموعة متراصة في X $\Leftarrow$ A هي فضاء ليندلوف جزئي في X (كون كل متراصة هي ليندلوف).

$\Leftarrow$ $f\ (A)$ فضاء ليندلوف جزئي في Y(كون f $k-$ تطبيق ليندلوف).

بالتالي من كل تغطية مفتوحة لـ $f\ (A)$ في Y يمكننا أن نحصل على تغطية جزئية قابلة للعد على الأكثر (من الممكن أن تكون منتهية أو قابلة للعد) .

و لتكن $\{T_i^* \ : \ i\in I\}$ تغطية مفتوحة كيفية لـ $f\ (A)$ في Y $\Leftarrow$

$$\boxed{f\ (A)\subseteq \bigcup_{i\in I} T_i^*} \ (1) \qquad \Rightarrow \boxed{f\ (A)\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i^*} \ (2)$$

ولنفرض جدلا أن هذه التغطية قابلة للعد و ليست منتهية :

بأخذ الصورة العكسية لطرفي العلاقة (1) وفق التطبيق f $\Leftarrow$

$$A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} T_i^*)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(T_i^*)\Rightarrow \quad \boxed{A\subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(T_i^*)}$$

وبما أن f مستمر $\Leftarrow$ $f^{-1}(T_i^*)$ مفتوحة في X مهما تكن $i \in I$ $\Leftarrow$ $\left\{ f^{-1}(T_i^*) \ : \ i \in I \right\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ A في X.

وبأخذ الصورة العكسية لطرفي العلاقة (2) نجد : $\boxed{A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(T_i^*)}$

أي حصلنا من التغطية المفتوحة $\left\{ f^{-1}(T_i^*) \ : \ i \in I \right\}$ لـ A في X على تغطية جزئية قابلة للعد وهذا تناقض مع كون A مجموعة متراصة $\Leftarrow$ التغطية الجزئية هنا هي منتهية بالتالي $\boxed{f(A) \text{ متراصة في } Y}$ $\boxed{2}$.

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد أن f $k-$تطبيق.

مبرهنة(3):

بفرض (X,τ) فضاء Lc و كانت τ^* تبولوجيا على X بحيث أن $\tau \subset \tau^*$ عندئذ يكون (X,τ^*) فضاء Lc .

البرهان :

بفرض A فضاء ليندلوف جزئي من (X,τ^*)، ولنفرض جدلا أن A غير مغلقة في $(X,\tau^*) \Leftarrow A \notin F^*$ (F^* أسرة المجموعات المغلقة في الفضاء التبولوجي (X,τ^*)) ، وبما أن $\tau \subset \tau^*$ فإن $F^* \subset F$ ، وهذا يعني أن $A \notin F$ $\Leftarrow$ A ليست مغلقة في (X,τ) ، بالتالي A ليست ليندلوف جزئي في (X,τ).

وهذا يعني أنه توجد تغطية مفتوحة لـ A في (X,τ) ولتكن $\left\{ T_i \quad : \ i \in I \right\}$ بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i$ ، لايمكن أن نحصل منها على تغطية جزئية قابلة للعد على الأكثر .

وبما أن $\forall i \in I \ ; \ T_i \in \tau \Leftarrow \forall i \in I \ ; \ T_i \in \tau^*$ (كون $\tau \subset \tau^*$) .

بالتالي وجدنا تغطية مفتوحة لـ A في (X,τ^*) لا يمكن أن نحصل منها على تغطية جزئية قابلة للعد على الأكثر وهذا يناقض الفرض بأن A فضاء ليندلوف جزئي من (X,τ^*) وهذا يعني أن فرضنا خاطئ والصحيح هو أن A مغلقة في (X,τ^*) $\Leftarrow (X,\tau^*)$ هو فضاء Lc.

مبرهنة(4):

بفرض $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ تطبيق مستمر وغامر ، حيث (X,τ) فضاء متراص و (Y,τ^*) فضاء Lc.

عندئذ: (Y,τ^*) فضاء T_2.

البرهان :

بما أن f مستمر فإن الصورة المباشرة لفضاء متراص هو متراص وبما ان f غامر فإن (Y,τ^*) فضاء متراص ونعلم أن كل فضاء متراص هو متراص موضعياً .

ولكن (Y,τ^*) فضاء Lc ونعلم أن كل فضاء Lc متراص موضعياً هو T_2 بالتالي (Y,τ^*) فضاء T_2.

مبرهنة (5):

بفرض $f:(X,\tau) \to (Y,\tau^*)$ $k-$تطبيق ، حيث (X,τ) فضاء Lc و (Y,τ^*) فضاء متراص .

عندئذ : (X,τ) فضاء T_2.

البرهان :

بما أن f ($k-$تطبيق) فإن الصورة العكسية لأية مجموعة متراصة في المستقر هي متراصة في المنطلق $\Leftarrow$

$f^{-1}(Y)$ متراصة في (X,τ) وبما أن $X=f^{-1}(Y)$ $\Leftarrow$ X متراصة في (X,τ)

هذا يعني (X,τ) فضاء متراص بالتالي متراص موضعياً بالتالي : (X,τ) هو T_2 (كونه متراص موضعياً و Lc).

ملاحظة : ليس من الضرورة أن تكون الصورة المباشرة لفضاء Lc هي فضاء Lc وذلك وفقاً لتطبيق مستمر سنعرض مثالاً يؤكد ذلك .

مثال:

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية ولنأخذ التطبيق المطابق : $I:(R,P(R))\to(R,\tau)$

حيث τ هي التبولوجيا الضعيفة على R و $P(R)$ التبولوجيا القوية على R .

إن (R,τ) ليس فضاء Lc لأن :

بفرض A فضاء ليندلوف جزئي من (R,τ) فإن A ليست مغلقة (وذلك لأن τ هي التبولوجيا الضعيفة على R $\Leftarrow$ $\overline{A}=R$ وهذا يعني أن A ليست مغلقة) بالتالي (R,τ) ليس فضاء Lc .

أما $(R,P(R))$ هو فضاء Lc لأن :

بفرض A فضاء ليندلوف جزئي من $(R,P(R))$ فإن A مغلقة (وذلك لأن τ هي التبولوجيا القوية على R $\Leftarrow$ $\overline{A}=A$ وهذا يعني أن A مغلقة) بالتالي $(R,P(R))$ فضاء Lc .

سنقوم الآن بناءً على المثال السابق بوضع بعض الشروط على التطبيق f حتى تصبح الصورة المباشرة لفضاء Lc هي فضاء Lc وفقه.

مبرهنة (6):

بفرض $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تطبيق تقابل ومغلق و f^{-1} مستمر على Y، حيث (X,τ) فضاء Lc

عندئذ: (Y,τ^*) فضاء Lc .

البرهان :

بفرض A ليندلوف جزئي من Y نريد أن نبرهن أن A مغلقة في Y .

بما أن f^{-1} مستمر على Y (حيث $f^{-1}:(Y,\tau^*)\to(X,\tau)$) $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ ليندلوف جزئي في X .

(حسب المبرهنة المساعدة 5: بفرض $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ تطبيق مستمر و (X,τ) (Y,τ^*), فضائين تبولوجيين كيفيين عندئذ : الصورة المباشرة لأي فضاء جزئي ليندلوف من (X,τ) هو فضاء جزئي ليندلوف في (Y,τ^*). [1])

وبما أن (X,τ) فضاء Lc $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ مغلقة في X، وبما أن f مغلق فإن $f(f^{-1}(A))$ مغلقة في Y، وبما أن f غامر فإن $A=f(f^{-1}(A))$ مغلقة في Y. بالتالي (Y,τ^*) فضاء Lc وذلك بعد مراعاة الاختيار الكيفي لـ A .

مبرهنة (7): ليكن (X,τ) فضاء Lc و (Y,τ^*) فضاء تبولوجي كيفي وليكن $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^*)$ $k-$ تطبيق ليندلوف غامر ومغلق ، حيث (X,τ) فضاء Lc عندئذ: يكون الفضاء (Y,τ^*) فضاء Lc أيضاً .

البرهان :

بفرض A ليندلوف جزئي من Y نريد أن نبرهن أن A مغلقة في Y .

بما أن f $k-$ تطبيق ليندلوف $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ ليندلوف جزئي في X .

وبما أن (X,τ) فضاء Lc $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ مغلقة في X ، وبما أن f مغلق فإن $f(f^{-1}(A))$ مغلقة في Y، وبما أن f غامر فإن $A=f(f^{-1}(A))$ مغلقة في Y. بالتالي بعد مراعاة الاختيار الكيفي لـ A نجد أن (Y,τ^{*}) فضاء Lc .

ملاحظة : في المرجع [4] ورد شرط على التطبيق f حيث أصبحت وفقه الصورة العكسية لفضاء Lc هي فضاء Lc وهو أن يكون f تطبيق مستمر ومتباين . وورد في نفس العمل مثال يوضح بأنه ليس من الضرورة أن تكون الصورة العكسية لفضاء Lc هي فضاء Lc وذلك وفقاً لتطبيق مستمر فقط ، وهنا سنعرض مثال يوضح أن القضية غير محققة أيضاً في حال كان التطبيق متبايناً و غير مستمر .

مثال:

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية ولنأخذ التطبيق المطابق : $I:(R,\tau)\to(R,P(R))$

حيث τ هي التبولوجيا الضعيفة على R و $P(R)$ التبولوجيا القوية على R.

وقد برهنا أن (R,τ) ليس فضاء Lc بينما $(R,P(R))$ هو فضاء Lc

ملاحظة:

سنقوم الآن بوضع شرط على التطبيق f حتى تصبح الصورة العكسية لفضاء Lc هي فضاء Lc وفقه مغاير لما ورد [4] .

مبرهنة (8):

بفرض $f:(X,\tau)\to(Y,\tau^{*})$ $k-$تطبيق ليندلوف وتقابل و f^{-1} مغلق ، حيث (Y,τ^{*}) فضاء Lc

عندئذ: (X,τ) فضاء Lc .

البرهان :

بفرض A ليندلوف جزئي من X نريد أن نبرهن أن A مغلقة في X .

بما أن f $k-$تطبيق ليندلوف $\Leftarrow$ $f(A)$ ليندلوف جزئي في Y.

وبما أن (Y,τ^{*}) فضاء Lc $\Leftarrow$ $f(A)$ مغلقة في Y وبما أن f^{-1} مغلق $\Leftarrow$ $f^{-1}(f(A))$ مغلقة في X ، وبما أن f متباين فإن $A=f^{-1}(f(A))$ مغلقة في X $\Leftarrow(X,\tau)$ فضاء Lc.

الاستنتاجات والتوصيات :

قمنا في هذا البحث بإيجاد بعض الخواص التي يتمتع بها فضاء ليندلوف، ثم عرضنا بعض المفاهيم التي تساعدنا في برهان بعض الخواص التي تتمتع بها فضاءات Lc .ومن أهم هذه المفاهيم التي قمنا بوضعها التطبيق $k-$ تطبيق ليندلوف . ثم إيجاد الشروط اللازمة التي تجعل كل $k-$تطبيق ليندلوف هو $k-$ تطبيق . و إيجاد الشروط التي تجعل الصورة المباشرة لفضاء Lc هي فضاء Lc وفق تطبيق ما ، وأخيراً إيجاد الشروط التي تجعل الصورة العكسية لفضاء Lc هي فضاء Lc مع العلم أن القضيتين غير محققتين بصورة عامة .

نوصي بالآتي:

1- إيجاد بعض خواص الفضاء MLc (الفضاء Lc الأصغري).

2- محاولة إيجاد الشروط التي تجعل الصورة المباشرة لفضاء MLc هي فضاء MLc وفق تطبيق ما .

3- محاولة إيجاد الشروط التي تجعل الصورة العكسية لفضاء MLc هي فضاء MLc وفق تطبيق ما .

المراجع :

(1)ARKHNGEL'SKII,A . V(Ed)., *General Topology II* , London , vol (50) . 1995 , p . 19-24.

(2)KUNZI , A .DOMINIC VAN DER ZYPEN . , *Maximal (sequentially) Compact Topologies,* University of cape town ,arxiv . Math .GN, south Africa .2003 , p .1-15 .

(3)MUKHERJI , T . K ., Sarkar , M. , *on a class of almost discrete spaces* , Mat . Vesnik , 3 (16) (31)(1979) , p . 459-474 .

(4)RADHI , I. M. ,*Minimal Kc- spaces and Minimal Lc – spaces* ,Tishreen University Journal for studies and scientific Research – Basic science series , vol(28) No (1) , 2006.

(5)HDEIB, H .Z., *A note on L-closed spaces* , Q &A in General Topology 6 , 1988 , p. 67-72.

(6) HDEIB, H .Z., PAREEK ,C .M ., *On spaces in which Lindelof sets are closed*, Q &A in General Topology 4 , 1986 , p. 3-13.

(7) LEVY , R ., *A non-p L-closed space*s , Q &A in General Topology 4 , 1986 , p. 145-146.

(8)ORI , R . G ., *A not on L-closed space*s , Q &A in General Topology 4 , 1986, p. 141-143.

(9) ظريف ، عدنان .، عبد الرزاق ، فاتن .، *فضاءات kc (ولانسكي) وفضاءات kc (ولانسكي) الأصغرية*، اللاذقية ، 2013 ، 73 .