

حلول عدديّة لمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة المحايدة

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور محمد علي**

بشار جديد***

(تاريخ الإيداع 27 / 1 / 2019. قبل للنشر في 9 / 5 / 2019)

□ ملخص □

نقدم في هذا العمل دراسة استقرار تقنية تجميع شرائحية لإيجاد الحل العددي لمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة. وقد تم تحديد شروط لضمان أوسع مساحات من الاستقرار-p للتقنية العددية عندما تم تطبيقها على نموذج اختبار.

تبين الدراسة العددية للتقارب أن التقنية العددية المقترحة عندما تم تطبيقها على مسألة اختبار من نمط هذه المعادلات كانت متسقة ومتقاربة من الرتبة التاسعة. تم إثبات فعالية التقنية الشرائحية المقترحة بحل أربع مسائل معيارية في الحالتين الخطية وغير الخطية، و نتائج المقارنات العددية مع بعض الطرائق الأخرى تشير إلى أفضلية النتائج التي توصلنا إليها من حيث الدقة العددية.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية جبرية متأخرة، تقنية شرائحية تجميعية، حل عددي، استقرار-p، التقارب.

* أستاذ في قسم الرياضيات كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية. E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com

** أستاذ في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية

*** طالب دراسات عليا (دكتوراه)- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.

Numerical Solutions of Systems of Neutral Delay Differential- Algebraic Equations

Dr. Suliman M Mahmoud*

Dr. Mohamad Ali**

Bashar Gdeed ***

(Received 27 / 1 / 2019. Accepted 9 / 5 /2019)

□ ABSTRACT □

This paper studies the numerical stability of spline collocation technique for finding the numerical solutions of neutral delay algebraic differential equations (DDEs). The conditions necessary to ensure the widest areas of p-stability of the proposed numerical technique are determined when they are applied to a test problem.

The numerical study of convergence shows that the numerical technique proposed when applied to the test of these equations was consistent and convergent from the order ninth.

The effectiveness of the proposed spline technique was verified by solving four standard problems in both linear and nonlinear cases. The results of numerical comparisons with some other methods indicate the superiority of our results and the most accurate ones.

Key Words. Delay Algebraic Differential Equations; Spline Collocation Technique; Solution Numerical; P-Stability; Convergence.

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.
E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com.

** Professor, Department. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student, Department of Mathematics, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة

قدمت الكثير من الأبحاث العلمية التي تناولت معالجات عددية لنوعين من المنظومات، النوع الأول منظومات *المعادلات التفاضلية- الجبرية* DAEs والنوع الثاني منظومات *المعادلات التفاضلية- المتأخرة* DDEs، وفي التطبيقات العلمية الحديثة يوجد العديد من الظواهر الطبيعية والتطبيقات الواقعية يتم تفسيرها كمنظومات من *المعادلات التفاضلية- الجبرية- المتأخرة* DDAEs التي هي مزيج جديد من منظومات النوعين الأول DAEs والثاني DAEs، وقد أدى هذا المزيج من المنظومات إلى العديد من الصعوبات والإشكاليات في إمكانية إيجاد حلول عددية مستقرة ومقاربة، وهي صعوبات ستضاف إلى تلك التي قد تظهر في كلا النوعين الأول DAEs والثاني DAEs. لهذا سنركز اهتمامنا على إيجاد تقنية عددية مستقرة ومقاربة لحل منظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة.

تعطى منظومات المعادلات الجبرية التفاضلية المتأخرة في الحالة المعممة بالشكل [8,9]:

$$F(t, y(t), y(t-\tau), y'(t), y'(t-\tau)) = 0 \quad (1.1)$$

حيث $\tau > 0$ ثابت وهو زمن التأخير، $\frac{\partial F}{\partial y'}$ مصفوفة شاذة. إذا لم تكن المشتقات $y'(t-\tau)$ في (1.1) معدومة تدعى المنظومة (1.1) بالمعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة المحايدة و إذا كانت تلك المشتقات معدومة فتدعى بالمعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة.

كما تعطى منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة الخطية بالشكل [10,11]:

$$\begin{aligned} E y'(t) &= L y(t) + M y(t-\tau) + N y'(t-\tau), \quad t \geq 0, \\ y(t) &= \Phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (2.1)$$

حيث E, L, M, N مصفوفات حقيقية من القياس $l \times l$ ، $\tau > 0$ تأخير ثابت، و $y(t)$ دالة متجهة الحل مجهولة لأجل $t > 0$ ، و $\Phi(t)$ دالة متجهة ابتدائية معلومة قابلة للمفاضلة في المجال $t \in [-\tau, 0]$.

فُدمت العديد من الدراسات التي تناولت الاستقرار لنماذج من المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة من الشكل (2.1) وذلك لتحسين شروط وضمان التقارب للطرائق العددية المقترحة في تلك الدراسات.

قدم Ascher & Petzold في [1] عام 1995 دراسة للاستقرار المقارب للمنظومات من نمط هيسنبرغ التفاضلية الجبرية المتأخرة والحيادية وقد أدت دراستهم إلى تحسين شروط تقارب طريقة رانج-كوتا الضمنية وطريقة الخطوة المتعددة المطبقة لحل هذه المنظومات.

درس Campbell & Linh في [2] عام 2009 معايير الاستقرار لمنظومات خطية من المعادلات التفاضلية الجبرية متعددة التأخير وحلها عددياً بعد تحويل النماذج الحيادية إلى نماذج متأخرة للتمكن من حلها عددياً. اقترح Zhang & Chen في [12] عام 2010 طريقة القيمة الحدية اللوحية وكان ذات استقرار A- عندما طُبِّقَت للحل العددي لمنظومات من الشكل الخطي الشكل (2.1).

قدم Tian وآخرون في [10,11] عامي 2011 و 2014 دراستين تناولتا وضع شروط ضرورية وكافية لضمان استقرار طرائق الخطوة المتعددة مع استيفاء ليجندر وطرائق رانج كوتا للحل العددي لمنظومات خطية من الشكل (2.1). استخدم Ha & Mehrmann في [3] عام 2015 خوارزمية Bellman متعددة الخطوات التقليدية للحل العددية لنموذج خطي غير متجانس من الشكل (2.1). وقدمت في [5] عام 2016 دراسة تحليلية للاستقرار من نمط منظومات هابسنبرغ.

كما تم تقديم عدة طرائق لحل نماذج من الشكل غير الخطي (1.1) فقد Sun وآخرون عام 2014 [8] طرائق أولر الضمنية وكذلك قدم Sun عام 2016 [9] صيغ التفاضلات التراجعية حيث وضعوا بعض الشروط لضمان استقرار وتقارب تلك الطرائق. درس Ha في [4] عام 2018 خصائص قابلية الحل والاستقرار الآسي الضعيف لنموذج من الشكل الخطي (2.1).

أهمية البحث وأهدافه:

تعد المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة نماذج رياضية هامة جداً نظراً لوصفها للظواهر الطبيعية وتفسيرها للعديد من تطبيقات الحياة الحقيقية الواقعية، حيث تناولتها الدراسات العلمية الحديثة في شتى المجالات مثل التطبيقات الطبية وعلم الأحياء، وحركة السكان، والكيمياء، والاقتصاد، والزوجة، الفيزياء، والميكانيكا، والعلوم الهندسية، الخ. يهدف هذا العمل لدراسة الاستقرار العددية ووضع شروط ضرورية لضمان الاستقرار القوي لتقنية عددية شرائحية بغية إيجاد حلول عددية مستقرة ومقاربة لهذه المنظومات خاصة وأن طرائق كثيرة تفشل في تحقيق الاستقرار والدقة العددية. يتم استخدام لغة البرمجة *Mathematica:11* عالية المستوى لإيجاد النتائج العددية والرسوم البيانية. كما ويتجلى هدفنا بشكل أساسي في دعم وتطوير البحث العلمي في جامعاتنا وتزويد الباحثين وطلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية والتطبيقية.

طرائق البحث ومواده:

تعتمد طرائق البحث على بعض المفاهيم والمبرهنات الأساسية في نظرية التقريب مثل فضاء التقريبات بكثيرات حدود بالإضافة إلى بعض الأساسيات والمبرهنات في الجبر الخطي، وكذلك تم الاطلاع على عدد من المراجع العلمية الحديثة التي تطرقت لبعض تقنيات الحل العددي لنماذج من نمط المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة للاستفادة من المزايا الايجابية والمقارنة معها، وهكذا تم اختيار فضاء التقريب بكثيرات حدود شرائحية في الفضاء C^4 . تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات-كلية العلوم- جامعة تشرين في الفترة الواقعة بين آب 2018 وكانون ثاني 2019.

2. تقنية تجميع شرائحية: Spline Collocation Technique

لتطبيق التقريبات الشرائحية على منظومات المعادلات التفاضلية الجبرية لأجل $t \in I = [0, T]$ ، سنفرض أن $T = \ell \tau$ ، لأجل عدد صحيح موجب ℓ ، ولنأخذ $t_i = ih$ ، $i = 0(1)n$ ، ونقاط تجزئة منتظمة للمجال $I = [0, T]$ ، إلى n مجال جزئي $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ وليكن $h = \tau / m$ طول كل مجال جزئي عندئذ لأجل أي $\tau > 0$ وخطوة h تحقق $\tau \geq h > 0$ يكون $n = \ell m$. لنأخذ كثيرة الحدود الشرائحية من الدرجة التاسعة [7]:

$$S(t) = \bar{\gamma}^5 [(1 + 5\gamma + 15\gamma^2 + 35\gamma^3 + 70\gamma^4)S_i^{[0]} + (\gamma + 5\gamma^2 + 15\gamma^3 + 35\gamma^4)S_i^{[1]} + (\frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{5}{2}\gamma^3 + \frac{15}{2}\gamma^4)S_i^{[2]} + (\frac{1}{6}\gamma^3 + \frac{5}{6}\gamma^4)S_i^{[3]} + (\frac{1}{24}\gamma^4)S_i^{[4]}] + \gamma^5 [(1 + 5\bar{\gamma} + 15\bar{\gamma}^2 + 35\bar{\gamma}^3 + 70\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[0]} + (\bar{\gamma} + 5\bar{\gamma}^2 + 15\bar{\gamma}^3 + 35\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[1]} + (\frac{1}{2}\bar{\gamma}^2 + \frac{5}{2}\bar{\gamma}^3 + \frac{15}{2}\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[2]} + (\frac{1}{6}\bar{\gamma}^3 + \frac{5}{6}\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[3]} + (\frac{1}{24}\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[4]}] \quad (1.2)$$

في كل مجال جزئي I_i ، حيث إن $\bar{\gamma} = 1 - \gamma \in [0, 1]$ ، $\gamma = (t - t_i) / h$ ، ولتبسيط التعبير نستخدم الترميز:

$$\begin{aligned} S_i^{[0]} &= S(t_i), & S_i^{[1]} &= hS'(t_i), & S_i^{[2]} &= h^2 S''(t_i), \\ S_i^{[3]} &= h^3 S'''(t_i), & S_i^{[4]} &= h^4 S^{(4)}(t_i), & i &= 0(1)n-1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

وباشتقاق الدالة (1.2) بالنسبة لـ t ، نحصل على كثيرة الحدود:

$$\begin{aligned} hS'(t) &= \bar{\gamma}^4 [(-630\gamma^4)S_i^{[0]} + (1+4\gamma+10\gamma^2+20\gamma^3-315\gamma^4)S_i^{[1]} + \\ &(\gamma+4\gamma^2+10\gamma^3-\frac{135}{2}\gamma^4)S_i^{[2]} + (\frac{1}{2}\gamma^2+2\gamma^3-\frac{15}{2}\gamma^4)S_i^{[3]} + (\frac{1}{6}\gamma^3-\frac{3}{8}\gamma^4)S_i^{[4]}] + \\ \gamma^4 [(630\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[0]} + (1+4\bar{\gamma}+10\bar{\gamma}^2+20\bar{\gamma}^3-315\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[1]} - \\ &(\bar{\gamma}+4\bar{\gamma}^2+10\bar{\gamma}^3-\frac{135}{2}\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[2]} + (\frac{1}{2}\bar{\gamma}^2+2\bar{\gamma}^3-\frac{15}{2}\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[3]} - (\frac{1}{6}\bar{\gamma}^3-\frac{3}{8}\bar{\gamma}^4)S_{i+1}^{[4]}] \end{aligned} \quad (3.2)$$

تستخدم التقنية الشرائحية خمس نقاط تجميع [7]:

$$t_{i+z_j} = t_i + z_j h, \quad j=1(1)5 \quad (4.2)$$

في كل مجال جزئي $i=0(1)n-1$ ، $I_i = [t_i, t_{i+1}]$ ، وترتبط تلك النقاط بخمس وسطاء تجميع مرتبة كالاتي:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1 \quad (5.2)$$

حيث $h=T/n$ طول الخطوة، و $t_0 = 0$ ، $t_n = T$

وبشكل عام، يوجد شريحة $S_i(t)$ فوق كل مجال جزئي تُعرف كالاتي:

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t), & t \in [t_0, t_1], \\ \vdots \\ S_i(t), & t \in [t_i, t_{i+1}], \\ \vdots \\ S_{n-1}(t), & t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

هذه الشرائح تحقق الشروط الآتية:

$$S(t) \in C^4[0, T]; \quad S(t_i) \cong y(t_i), \quad i=0(1)n \quad .i$$

$$S_i(t_i) = S_{i-1}(t_i), \quad i=1(1)n-1 \quad .ii$$

$$S_i^{(r)}(t_i) = S_{i-1}^{(r)}(t_i), \quad r=1(1)4; \quad i=1(1)n-1 \quad .iii$$

ويرمز r في البند iii إلى درجة المشتقات.

ويتطبيق التقريبات الشرائحية (1.2)-(3.2) مع نقاط التجميع (4.2)-(5.2) على المسألتين المحددتين بالمعادلتين (2.1)-(1.1)، ينتج لدينا:

$$f[t_{i+z_j}, S_y(t_{i+z_j}), S_y(t_{i-m+z_j}), S'_{y'}(t_{i+z_j}), S'_{y'}(t_{i-m+z_j})], \quad j=1(1)5 \quad (6.2)$$

$$E S'_{y'}(t_{i+z_j}) = L S_y(t_{i+z_j}) + M S_y(t_{i-m+z_j}) + N S'_{y'}(t_{i-m+z_j}), \quad j=1(1)5 \quad (7.2)$$

حيث إن $t_{i+z_j} \in [t_i, t_{i+1}]$ ، $t_{i-m+z_j} \in [t_{i-m}, t_{i-m+1}]$ ، $t_{i-m+z_j} = t_{i-m} + hz_j$ ، $t_{i+z_j} = t_i + hz_j$

3- الاستقرار والتقارب: Stability and Convergence

لدراسة الاستقرار P- للتقنية الشرائحية نحتاج لتطبيقها على نموذج معياري من الشكل (7.2):

$$\begin{cases} y'_1(t) + y'_2(t-\tau) = \lambda y_1(t) + q y_2(t-\tau) \\ y_1(t) - y_2(t) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 1$$

حيث $\lambda, q \in C$ اختيارية والتأخير τ هو ثابت موجب، والمصفوفات في المنظومة (7.2) تعطى كالاتي.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وباستبدال التقريبات الشرائحية مع نقاط التجميع في النموذج المعياري (1.3) نحصل على منظومة المعادلات الآتية:

$$\begin{bmatrix} A_1 - h\lambda B_1 & O \\ B_1 & -B_1 \end{bmatrix} \bar{S}_{i+1} + \begin{bmatrix} O & A_1 - hqB_1 \\ O & O \end{bmatrix} \bar{S}_{i+1-m} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_1 + h\lambda \bar{B}_1 & O \\ -B_1 & B_1 \end{bmatrix} \bar{S}_i + \begin{bmatrix} O & -\bar{A}_1 + hq\bar{B}_1 \\ O & O \end{bmatrix} \bar{S}_{i-m} \quad (2,3)$$

حيث O مصفوفة صفرية من القياس 5×5 ، و تعطى المصفوفات $\bar{B}_1, \bar{A}_1, B_1, A_1$ كالاتي:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 630z_1^4 z_1^4 & z_1^4(1+4z_1+10z_1^2+20z_1^3-315z_1^4) & z_1^4(\frac{135}{2}z_1^4-10z_1^3-4z_1^2-z_1) & z_1^4(\frac{1}{2}z_1^2+2z_1^3-\frac{15}{2}z_1^4) & z_1^4(\frac{3}{8}z_1^4-\frac{1}{6}z_1^3) \\ 630z_2^4 z_2^4 & z_2^4(1+4z_2+10z_2^2+20z_2^3-315z_2^4) & z_2^4(\frac{135}{2}z_2^4-10z_2^3-4z_2^2-z_2) & z_2^4(\frac{1}{2}z_2^2+2z_2^3-\frac{15}{2}z_2^4) & z_2^4(\frac{3}{8}z_2^4-\frac{1}{6}z_2^3) \\ 630z_3^4 z_3^4 & z_3^4(1+4z_3+10z_3^2+20z_3^3-315z_3^4) & z_3^4(\frac{135}{2}z_3^4-10z_3^3-4z_3^2-z_3) & z_3^4(\frac{1}{2}z_3^2+2z_3^3-\frac{15}{2}z_3^4) & z_3^4(\frac{3}{8}z_3^4-\frac{1}{6}z_3^3) \\ 630z_4^4 z_4^4 & z_4^4(1+4z_4+10z_4^2+20z_4^3-315z_4^4) & z_4^4(\frac{135}{2}z_4^4-10z_4^3-4z_4^2-z_4) & z_4^4(\frac{1}{2}z_4^2+2z_4^3-\frac{15}{2}z_4^4) & z_4^4(\frac{3}{8}z_4^4-\frac{1}{6}z_4^3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 630z_1^4 z_1^4 & z_1^4(1+4z_1+10z_1^2+20z_1^3-315z_1^4) & z_1^4(\frac{135}{2}z_1^4-10z_1^3-4z_1^2-z_1) & z_1^4(\frac{15}{2}z_1^4-2z_1^3-\frac{1}{2}z_1^2) & z_1^4(\frac{3}{8}z_1^4-\frac{1}{6}z_1^3) \\ 630z_2^4 z_2^4 & z_2^4(1+4z_2+10z_2^2+20z_2^3-315z_2^4) & z_2^4(\frac{135}{2}z_2^4-10z_2^3-4z_2^2-z_2) & z_2^4(\frac{15}{2}z_2^4-2z_2^3-\frac{1}{2}z_2^2) & z_2^4(\frac{3}{8}z_2^4-\frac{1}{6}z_2^3) \\ 630z_3^4 z_3^4 & z_3^4(1+4z_3+10z_3^2+20z_3^3-315z_3^4) & z_3^4(\frac{135}{2}z_3^4-10z_3^3-4z_3^2-z_3) & z_3^4(\frac{15}{2}z_3^4-2z_3^3-\frac{1}{2}z_3^2) & z_3^4(\frac{3}{8}z_3^4-\frac{1}{6}z_3^3) \\ 630z_4^4 z_4^4 & z_4^4(1+4z_4+10z_4^2+20z_4^3-315z_4^4) & z_4^4(\frac{135}{2}z_4^4-10z_4^3-4z_4^2-z_4) & z_4^4(\frac{15}{2}z_4^4-2z_4^3-\frac{1}{2}z_4^2) & z_4^4(\frac{3}{8}z_4^4-\frac{1}{6}z_4^3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} z_1^5(1+5z_1+15z_1^2+35z_1^3+70z_1^4) & z_1^5(z_1+5z_1^2+15z_1^3+35z_1^4) & z_1^5(\frac{1}{2}z_1^2+\frac{5}{2}z_1^3+\frac{15}{2}z_1^4) & z_1^5(\frac{1}{6}z_1^3+\frac{5}{6}z_1^4) & z_1^5(\frac{1}{24}z_1^4) \\ z_2^5(1+5z_2+15z_2^2+35z_2^3+70z_2^4) & z_2^5(z_2+5z_2^2+15z_2^3+35z_2^4) & z_2^5(\frac{1}{2}z_2^2+\frac{5}{2}z_2^3+\frac{15}{2}z_2^4) & z_2^5(\frac{1}{6}z_2^3+\frac{5}{6}z_2^4) & z_2^5(\frac{1}{24}z_2^4) \\ z_3^5(1+5z_3+15z_3^2+35z_3^3+70z_3^4) & z_3^5(z_3+5z_3^2+15z_3^3+35z_3^4) & z_3^5(\frac{1}{2}z_3^2+\frac{5}{2}z_3^3+\frac{15}{2}z_3^4) & z_3^5(\frac{1}{6}z_3^3+\frac{5}{6}z_3^4) & z_3^5(\frac{1}{24}z_3^4) \\ z_4^5(1+5z_4+15z_4^2+35z_4^3+70z_4^4) & z_4^5(z_4+5z_4^2+15z_4^3+35z_4^4) & z_4^5(\frac{1}{2}z_4^2+\frac{5}{2}z_4^3+\frac{15}{2}z_4^4) & z_4^5(\frac{1}{6}z_4^3+\frac{5}{6}z_4^4) & z_4^5(\frac{1}{24}z_4^4) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} \hat{z}_1^5(1+5z_1+15z_1^2) & \hat{z}_1^5(z_1+5z_1^2+ & \hat{z}_1^5(\frac{1}{2}z_1^2+\frac{5}{2}z_1^3+\frac{15}{2}z_1^4) & \hat{z}_1^5(\frac{1}{6}z_1^3+\frac{5}{6}z_1^4) & \hat{z}_1^5(\frac{1}{24}z_1^4) \\ +35z_1^3+70z_1^4) & 15z_1^3+35z_1^4) & & & \\ \hat{z}_2^5(1+5z_2+15z_2^2) & \hat{z}_2^5(z_2+5z_2^2+ & \hat{z}_2^5(\frac{1}{2}z_2^2+\frac{5}{2}z_2^3+\frac{15}{2}z_2^4) & \hat{z}_2^5(\frac{1}{6}z_2^3+\frac{5}{6}z_2^4) & \hat{z}_2^5(\frac{1}{24}z_2^4) \\ +35z_2^3+70z_2^4) & 15z_2^3+35z_2^4) & & & \\ \hat{z}_3^5(1+5z_3+15z_3^2) & \hat{z}_3^5(z_3+5z_3^2+ & \hat{z}_3^5(\frac{1}{2}z_3^2+\frac{5}{2}z_3^3+\frac{15}{2}z_3^4) & \hat{z}_3^5(\frac{1}{6}z_3^3+\frac{5}{6}z_3^4) & \hat{z}_3^5(\frac{1}{24}z_3^4) \\ +35z_3^3+70z_3^4) & 15z_3^3+35z_3^4) & & & \\ \hat{z}_4^5(1+5z_4+15z_4^2) & \hat{z}_4^5(z_4+5z_4^2+ & \hat{z}_4^5(\frac{1}{2}z_4^2+\frac{5}{2}z_4^3+\frac{15}{2}z_4^4) & \hat{z}_4^5(\frac{1}{6}z_4^3+\frac{5}{6}z_4^4) & \hat{z}_4^5(\frac{1}{24}z_4^4) \\ +35z_4^3+70z_4^4) & 15z_4^3+35z_4^4) & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_k = [s_{y_1,k}, s_{y_1,k}^{[1]}, \dots, s_{y_1,k}^{[4]}, s_{y_2,k}, s_{y_2,k}^{[1]}, \dots, s_{y_2,k}^{[4]}]^T,$$

$$\bar{S}_{k-m} = [s_{y_1,k-m}, s_{y_1,k-m}^{[1]}, \dots, s_{y_1,k-m}^{[4]}, s_{y_2,k-m}, s_{y_2,k-m}^{[1]}, \dots, s_{y_2,k-m}^{[4]}]^T; k = i, i+1$$

ملاحظة (1): إذا تحققت المتراجحات $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < 1$ ، تكون منظومة المعادلات التكرارية (2.3) موجودة

دائماً وتملك حلاً وحيداً لأن محددتي المصفوفتين A_1, B_1 غير صفريين كما سنجد:

$$|A_1| = -\frac{105(z_1 z_2 z_3 z_4)^4 \hat{z}_1 \hat{z}_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4 (\hat{z}_2 - \hat{z}_1)(\hat{z}_3 - \hat{z}_1)(\hat{z}_2 - \hat{z}_3)(\hat{z}_1 - \hat{z}_4)(\hat{z}_2 - \hat{z}_4)(\hat{z}_3 - \hat{z}_4)}{2} \neq 0$$

$$|B_1| = \frac{1}{288} (\hat{z}_1 \hat{z}_2 \hat{z}_3 \hat{z}_4)^5 (z_1 z_2 z_3 z_4)^5 (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4) \neq 0$$

حيث: $j=1(1)5, \hat{z}_j = 1 - z_j$

تعريف (1): [6] يقال عن طريقة عددية مطبقة على نموذج الاختبار (1.3) إنها ذات استقرار P- إذا كان تحت

الشرط $Re(\lambda) < -|q|$ الحل العددي الشرائحي $S(x_i) \rightarrow 0$ عندما $x_i \rightarrow \infty$ مهما تكن h تحقق $\tilde{m}h = \tau$

$\tilde{m} \in N$

فإذا رمزنا بـ S_P لمنطقة الاستقرار P-، حيث تعرف هذه المنطقة بأنها مجموعة جميع النقاط $(h\lambda, hq)$ من المستوي التي من أجلها تكون التقنية الشرائحية مستقرة.

حيث: $\tau = mh, S(x_{i+mz_j}) = S(x_{i+z_j} - mh), x_{i+mz_j} \in [x_{i-m}, x_{i-m+1}]$ ، $u = \lambda h, v = qh$

نعيد كتابة المنظومة الخطية (2.3) بالشكل:

$$W(u, v) \hat{S}_{i+1} = G(u, v) \hat{S}_i, i=0(1)n-1 \quad (3.3)$$

حيث:

$$\hat{S}_{i+1} = (\bar{S}_{i+1}, \bar{S}_{i+1-m})^T, \hat{S}_i = (\bar{S}_i, \bar{S}_{i-m})^T,$$

$$W(u, v) = \text{Diag}[A, B], G(u, v) = \text{Diag}[\bar{A}, \bar{B}].$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 - h\lambda B_1 & O \\ B_1 & -B_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} O & A_1 - hqB_1 \\ O & O \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} -\bar{A}_1 + h\lambda \bar{B}_1 & O \\ -\bar{B}_1 & \bar{B}_1 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} O & -A_1 + hq\bar{B}_1 \\ O & O \end{bmatrix}$$

حيث:

تدعى $g(u, v) = W^{-1}(u, v)G(u, v)$ ، دالة الاستقرار لتقنية التجميع الشرائحية.

وهكذا وفقاً للتعريف فإن $u = \lambda h, v = qh$ تنتمي إلى منطقة الاستقرار P-، بمعنى أن $(u, v) \in S_P$ إذا كانت القيم

المميزة $\xi_k(u, v), k = 1(1)10$ لمسألة القيمة المميزة المعممة:

$$\xi W(u, v) \cdot \underline{x} = G(u, v) \cdot \underline{x}, \quad \underline{x} \neq 0 \quad (4.3)$$

تقع داخل قرص الوحدة، أي إذا تحققت الشروط:

$$|\xi_k(u, v)| < 1, \quad k = 1(1)10. \quad (5.3)$$

لنأخذ $\det(\xi W(u, v) - G(u, v)) = 0$ المعادلة المميزة للمسألة (4.3) وندرس السلوك المقارب عندما $u \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty$ باستخدام برنامج Mathematica11، وإجراء العديد من الاختبارات العددية استطعنا الحصول على بعض التحديدات المناسبة لقيم وسطاء التجميع تتحقق من أجلها المتراجحة (5.3) وتحقق الاستقرار للطريقة وندرج فيما يأتي أفضل هذه التحديدات:

$$\text{التحديد الأول لوسطاء التجميع: } z_1 = 0.75; z_2 = 0.8; z_3 = 0.95; z_4 = 0.99$$

$$\text{التحديد الثاني لوسطاء التجميع: } z_1 = 0.9; z_2 = 0.93; z_3 = 0.96; z_4 = 0.998$$

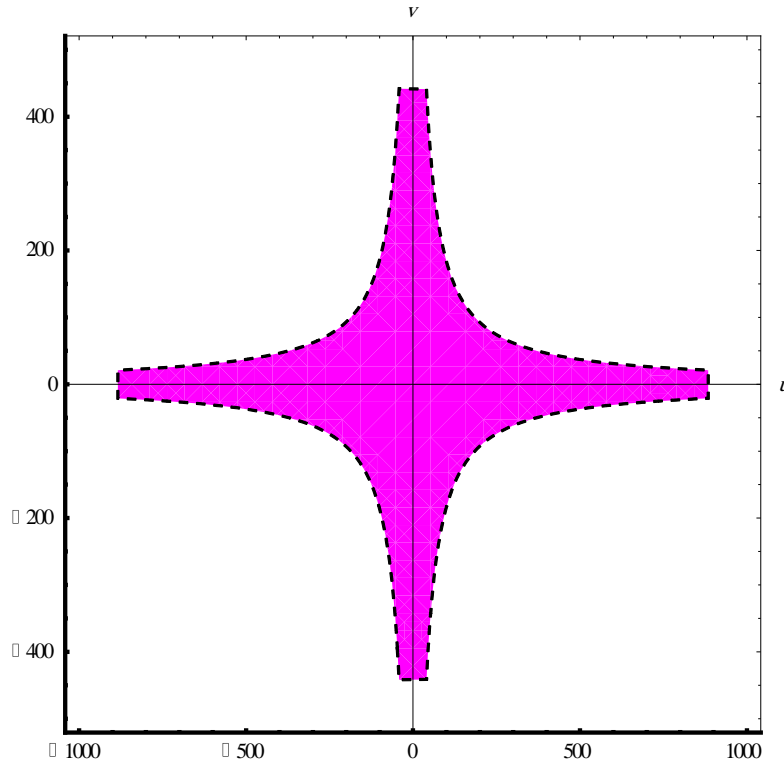
وبحساب القيم المميزة للمسألة (4.3) التحديد الأول لوسطاء التجميع نحصل على القيم المدرجة في الجدول (1).

الجدول(1): القيم المميزة لمسألة القيمة المميزة المعممة

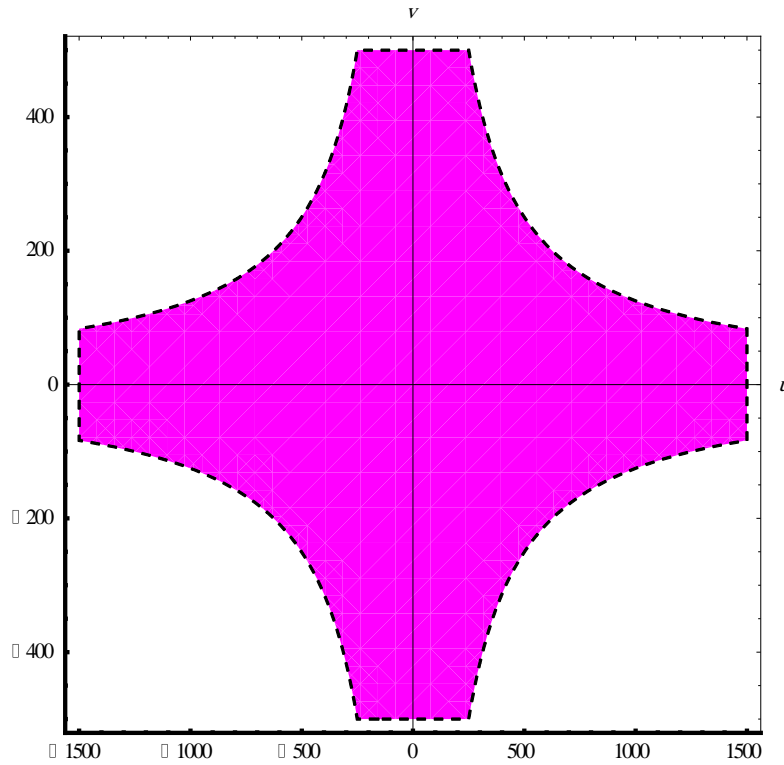
$\xi_1 = 0.00127522$	$\xi_6 = -0.0491798$
$\xi_2 = 2.18504E - 7$	$\xi_7 = -0.0000238$
$\xi_3 = 5.37709E - 17$	$\xi_8 = -7.538770E - 3$
$\xi_4 = 2.70671E - 7$	$\xi_9 = -3.7654E - 14$
$\xi_5 = 0.875471$	$\xi_{10} = 0$

ولتحديد منطقة الاستقرار S_p للطريقة الشرائحية المطبقة إلى مسألة الاختبار (1.3) نعين المنحني الحدودي لمجموعة نقاط الاستقرار $\{(u, v)\}$ في المستوي $0uv$ ، تحت الشرط $|\operatorname{Re}(u)| < -\operatorname{Re}(v)$ وفقاً لـ: $I = \sqrt{-1} \det(e^{\phi I} W(u, v) - G(u, v)) = 0$ ، وباستخدام الأمر الرسومي RegionPlot في برنامج Mathematica11 نرسم دالة الاستقرار في الأشكال (1)-(4) ومناطق الاستقرار-P وهي المناطق المظللة من المستوي، ومن الواضح أن الطريقة ترسم مساحات مختلفة من الاستقرار صغيرة وكبيرة بحسب توضع قيم وسطاء التجميع.

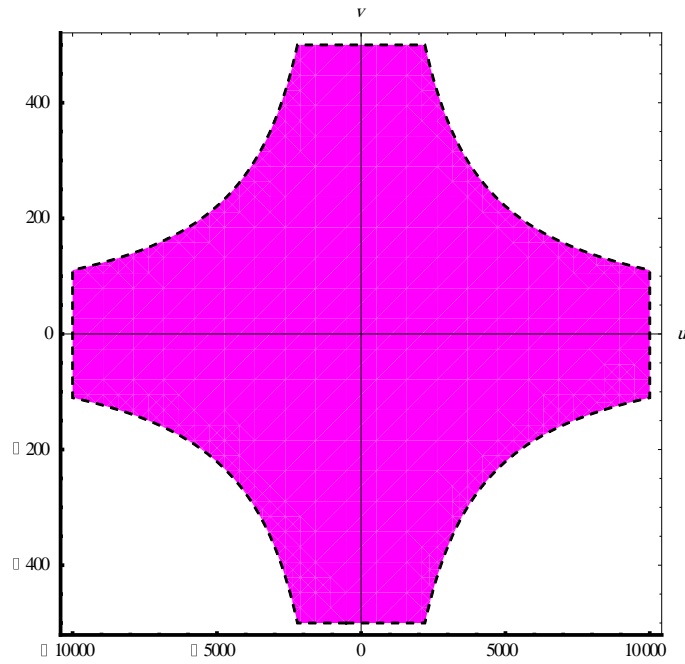
تبين الأشكال (1)-(4) أن أكبر مساحة من الاستقرار-P ترسمها دالة الاستقرار للتقنية الشرائحية عندما يتم إعطاء وسطاء التجميع وفق التحديد الثاني: $z_1 = 0.9; z_2 = 0.93; z_3 = 0.96; z_4 = 0.998$.



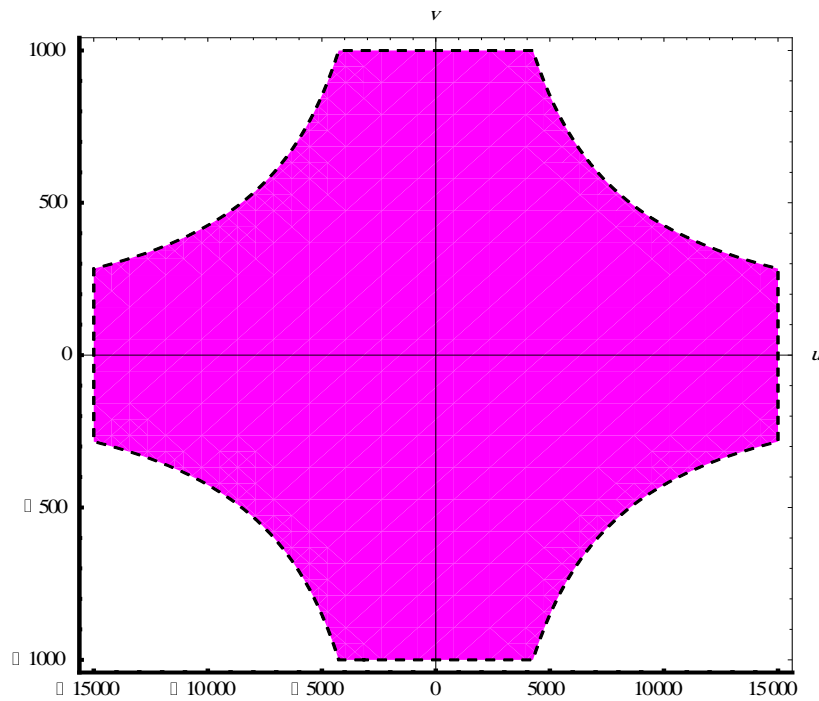
الشكل (1): منطقة الاستقرار P- للطريقة باستخدام الوسطاء: $z_1 = 0.2; z_2 = 0.4; z_3 = 0.6; z_4 = 0.8$



الشكل (2): منطقة الاستقرار P- للطريقة باستخدام الوسطاء: $z_1 = 0.5; z_2 = 0.7; z_3 = 0.8; z_4 = 0.99$



الشكل (3): منطقة الاستقرار P- للطريقة باستخدام الوسطاء: $z_1=0.75; z_2 = 0.8; z_3 = 0.95; z_4 = 0.99$



الشكل (4): منطقة الاستقرار P- للطريقة باستخدام الوسطاء: $z_1=0.9; z_2 = 0.93; z_3 = 0.96; z_4 = 0.998$

الاتساق: Consistent

تعريف (2) [7]: يقال عن طريقة عددية مطبقة على منظومة الاختيار (1.3) إنها متسقة (Consistent) من المرتبة p إذا كان $\max_{0 \leq i \leq n} |\tau_i| = O(h^{p+1})$ ، حيث τ_i هو خطأ الاقتطاع الموضوعي للطريقة.

نتيجة (2): بفرض أن $y \in C^{10}([0, T]) \times C^{10}([0, T])$ ، عندئذ فإن طريقة التجميع الشرائحية المطبقة على المسألة (1.3) مع خمس نقاط تجميع تكون متناسقة ومن المرتبة التاسعة.

الإثبات: بفرض أن $y_1(t), y_2(t) \in C^{10}[0, T]$ حيث $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ دالة الحل لمسألة الاختبار (1.3)، و أن $\tau_i = (\tau_{i,k})$ متجه من الفضاء R^{10} ، عندئذ يمكن الحصول على الخطأ المقتطع للمنظومة (2.3) في كل مجال جزئي $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0(1)n - 1$ بالشكل:

$$\tau_i = A \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1}) \\ hy'_1(t_{i+1}) \\ \vdots \\ h^4 y_1^{(4)}(t_{i+1}) \\ y_2(t_{i+1}) \\ hy'_2(t_{i+1}) \\ \vdots \\ h^4 y_2^{(4)}(t_{i+1}) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} y_1(t_{i+1-m}) \\ hy'_1(t_{i+1-m}) \\ \vdots \\ h^4 y_1^{(4)}(t_{i+1-m}) \\ y_2(t_{i+1-m}) \\ hy'_2(t_{i+1-m}) \\ \vdots \\ h^4 y_2^{(4)}(t_{i+1-m}) \end{bmatrix} - \bar{A} \begin{bmatrix} y_1(t_i) \\ hy'_1(t_i) \\ \vdots \\ h^4 y_1^{(4)}(t_i) \\ y_2(t_i) \\ hy'_2(t_i) \\ \vdots \\ h^4 y_2^{(4)}(t_i) \end{bmatrix} - \bar{B} \begin{bmatrix} y_1(t_{i-m}) \\ hy'_1(t_{i-m}) \\ \vdots \\ h^4 y_1^{(4)}(t_{i-m}) \\ y_2(t_{i-m}) \\ hy'_2(t_{i-m}) \\ \vdots \\ h^4 y_2^{(4)}(t_{i-m}) \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

الآن، باستخدام منشور تايلور:

$$y_r(t) = \sum_{k=0}^9 \frac{h^k}{k!} y_r^{(k)}(t_i) \gamma^k + O(h^{10}), \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

وأيضاً باستخدام وسطاء التجميع $z_1 = 0.75; z_2 = 0.8; z_3 = 0.95; z_4 = 0.99$ والتعويض في المنظومة (6.3) نحصل على:

$$\|\tau_i\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq 10} |\tau_{k,i}| = 5.34127 \times 10^{-6} h^{10} C \equiv O(h^{10})$$

$$C = \max_{1 \leq k \leq 10} \|y^{(k)}(t)\|, \quad \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

نجد أن الخطأ المقتطع الموضعي عند t_i من المرتبة العاشرة ويحسب **الخطأ الشامل** على كامل المجال $[0, T]$ بعد n خطوة كالتالي:

$$\|E\|_{\infty} = n \|\tau_i\|_{\infty} = n \cdot O(h^{10}) = \frac{T}{h} O(h^{10}) \equiv O(h^9)$$

إذن فالتقنية الشرائحية المقترحة متناسقة ومن المرتبة التاسعة وهو المطلوب.

4-النتائج العددية: Numerical Results

نقدم أربع مسائل اختبارات خطية وغير خطية لتوضيح الاستقرار والتقارب والدقة العددية للطريقة الشرائحية المقترحة. كما سنقوم بإجراء مقارنات لنتائج طريقتنا الشرائحية مع بعض الطرائق الأخرى في مراجع مختلفة [1,3,9,11]. تمت كتابة برامج الطريقة وتنفيذها باستخدام لغة البرمجة Mathematica11.

مسألة (1): ليكن اختبارنا الأول منظومة المعادلة التفاضلية الجبرية المتأخرة [9]

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{1}{e^2(1+e^2)}x(t)y(t-\tau) - \frac{1}{e^2(1+e^2)}x(t-\tau)y(t)$$

$$0 = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t-\tau) - y(t)$$

$$x(t) = e^{-2t}, \quad -2\tau \leq t \leq 0$$

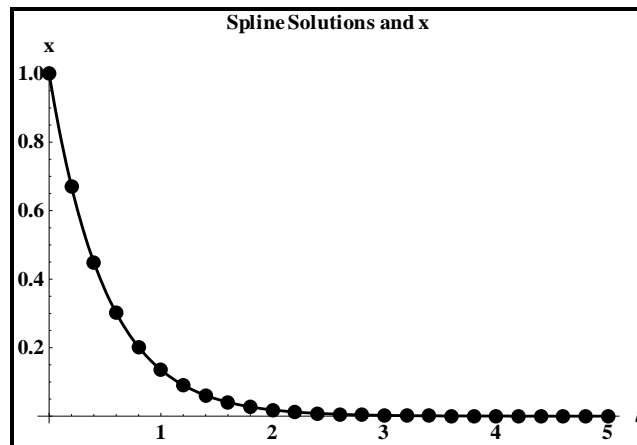
$$y(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-2t+2}), \quad -2\tau \leq t \leq 0,$$

حيث تعطى دالة التأخير الابتدائية: $\Phi_1(t) = e^{-2t}, \Phi_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{-2t+2}), t \in [-2\tau, 0]$

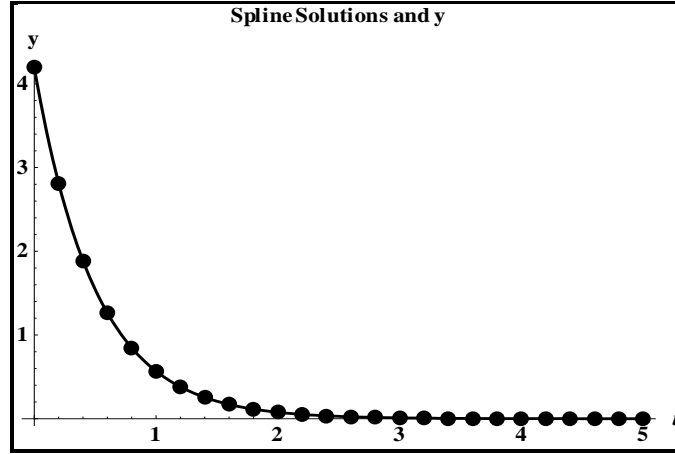
نطبق الطريقة الشرائحية ونحسب الحل الشرائحي الخطأ المطلق فيه ونقارن نتائجنا مع نتائج طريقة التفاضلات التراجعية BDF [9]، وندرج نتائج المقارنات في الجدول (2). نرسم في الأشكال (5)-(8) الحل الشرائحي والحل الدقيق والأخطاء المطلقة بخطوة $h = 0.2$ في المجال $[0,5]$ وتأخير زمني في المجال $[-2,0]$. تبين نتائج المقارنات والرسومات البيانية للحل الشرائحي إلى أفضلية نتائجنا وتطابقه إلى حد كبير مع الحل الدقيق.

الجدول (2): مقارنة أكبر الأخطاء المطلقة في المسألة (1) للطريقة المقترحة مع طريقة أخرى بخطوات h مختلفة.

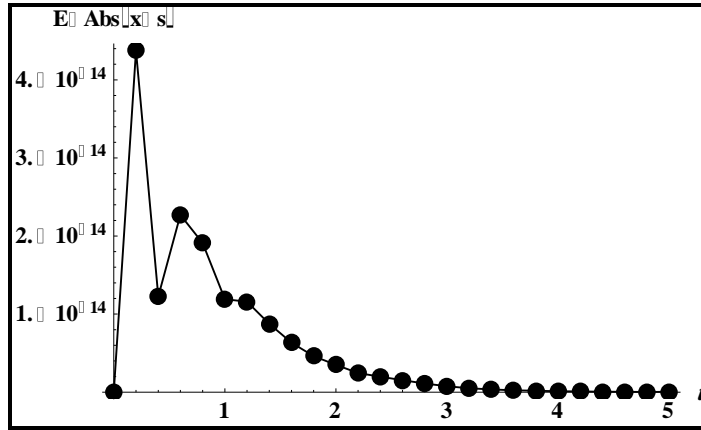
h	طريقة التفاضلات التراجعية BDF [9]		الطريقة الشرائحية المقترحة	
	$Max x_i - x(t_i) $	$Max y_i - y(t_i) $	$Max x_i - x(t_i) $	$Max y_i - y(t_i) $
0.1	4.2 E-3	1.75 E-2	1.04916 E -14	5.32907 E-15
0.01	4.83 E-5	2.03 E-4	5.88418E -15	3.55271 E-15
0.001	4.90 E-7	2.05 E-6	1.44328 E -15	1.33227 E-15
0.0005	1.23 E-7	5.14 E-7	8.88338 E -16	6.44089 E-16
0.00025	3.06 E-8	1.29 E-7	7.55112 E-17	1.55112 E-16



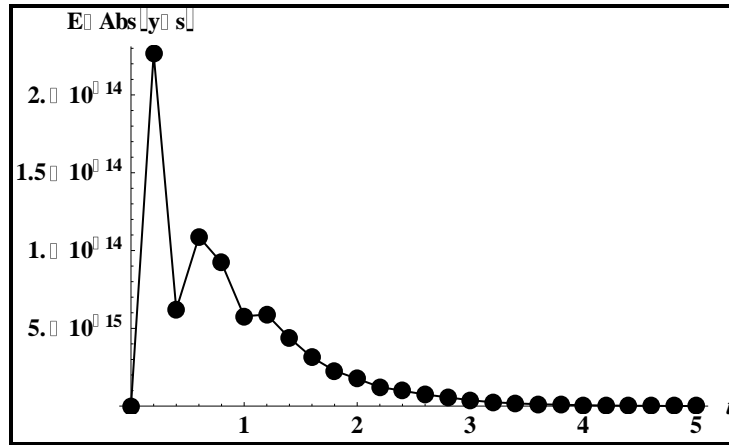
الشكل (5): الحل الشرائحي التقريبي ●●● والحل الدقيق $x(t)$ للمسألة (1) بخطوة $h=0.2$.



الشكل (6): الحل الشرائحي التقريبي ●●● والحل الدقيق $y(t)$ للمسألة (1) بخطوة $h=0.2$.



الشكل (7): الخطأ في الحل الشرائحي لـ $x(t)$ للمسألة (1) بخطوة $h=0.2$.



الشكل (8): الخطأ في الحل الشرائحي لـ $y(t)$ للمسألة (1) بخطوة $h=0.2$.

مسألة (2): اختبارنا الثاني في المسألة غير الخطية [9]:

$$x'(t) = -3x(t) + e^{-6}x(t)y(t-\tau) - e^{-6}x(t-\tau)y(t)$$

$$0 = x(t) - 2y(t), \quad t \geq 0$$

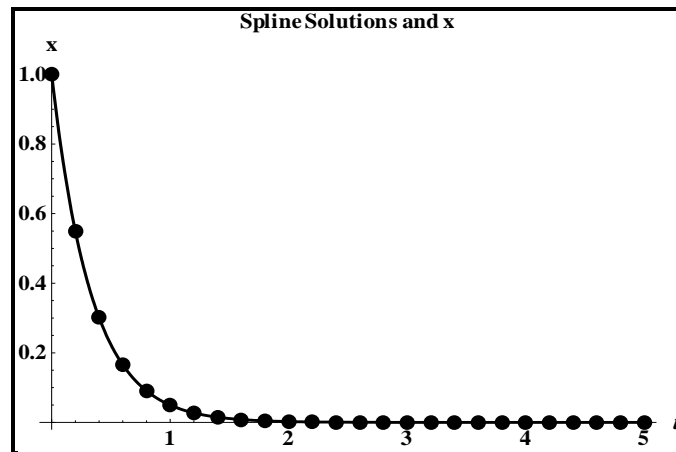
$$\phi_1(t) = e^{-3t}, \quad \phi_2(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad t \in [-\tau, 0]$$

حيث يعطى التأخير الزمني $\tau = 2$.

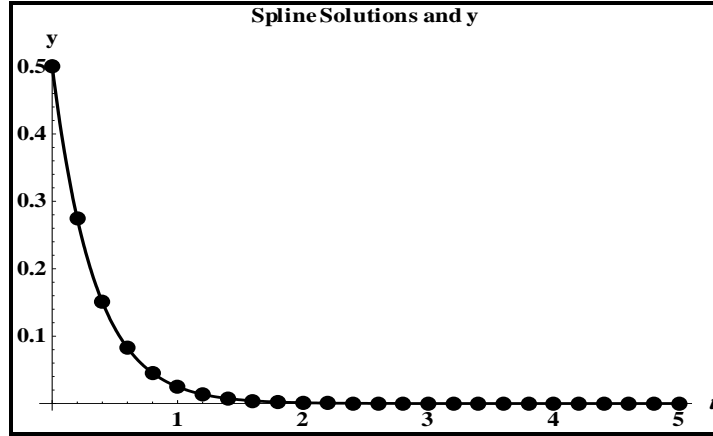
نطبق الطريقة الشرائحية ونحسب الحل الشرائحي ونقارن نتائجنا مع نتائج طريقة التفاضلات التراجعية [9] BDF و طريقة اولر الضمنية [9] وندرج النتائج في الجدول (3). نرسم في الإشكال (9)-(12) مقارنات الحل الشرائحي مع الحل الدقيق والأخطاء المطلقة فيها بخطوة $h=0.2$ في المجال $[0,5]$ وتأخير زمني $\tau = 2$. تبين المقارنات والرسومات البيانية إلى دقة وأفضلية نتائجنا.

الجدول(3): مقارنة الطريقة المقترحة مع طرائق أخرى في المرجع [9].

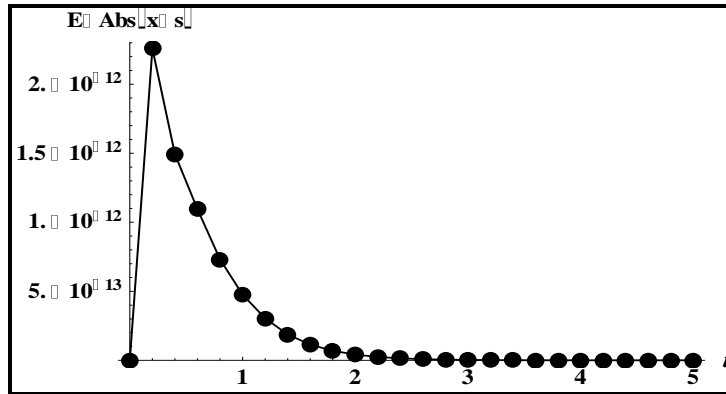
t	طريقة اولر الضمنية [9]		طريقة التفاضلات التراجعية BDF [9]		الطريقة المقترحة		الحل الدقيق	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	$x(t_i)$	$y(t_i)$
0.1	0.8725	0.4363	0.8607	0.4304	0.86070797642	0.43035398822	0.860708	0.430354
0.2	0.7613	0.3806	0.7403	0.3701	0.74081822068	0.37040911034	0.740818	0.370409
0.3	0.6642	0.3321	0.6371	0.3186	0.63762815162	0.31881407581	0.637628	0.318814
0.4	0.5795	0.2898	0.5484	0.2742	0.54881163609	0.27440581804	0.548812	0.274406
0.5	0.5056	0.2528	0.4720	0.2360	0.47236655274	0.23618327637	0.472367	0.236183
0.6	0.4412	0.2206	0.4063	0.2031	0.40656965974	0.20328482987	0.40657	0.203285
0.7	0.3849	0.1925	0.3497	0.1748	0.34993774911	0.17496887455	0.349938	0.174969
0.8	0.3358	0.1679	0.3010	0.1505	0.30119421191	0.15059710595	0.301194	0.150597
0.9	0.2930	0.1465	0.2590	0.1295	0.25924026064	0.12962013032	0.25924	0.12962
1.0	0.2557	0.1278	0.2230	0.1115	0.22313016014	0.11156508007	0.22313	0.111565
1.2	0.1946	0.0973	0.1652	0.0826	0.16529888822	0.08264944411	0.165299	0.0826494
1.4	0.1482	0.0741	0.1224	0.0612	0.12245642825	0.06122821412	0.122456	0.0612282
1.6	0.1128	0.0564	0.0906	0.0453	0.09071795328	0.0453589766	0.090718	0.045359
1.8	0.0859	0.0429	0.0672	0.0336	0.06720551273	0.03360275636	0.0672055	0.0336028
2.0	0.0654	0.0327	0.0497	0.0249	0.04978706836	0.02489353418	0.0497871	0.0248935



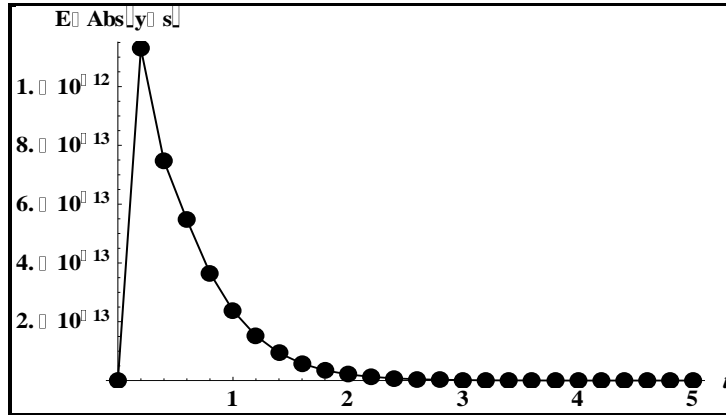
الشكل (9): الحل الشرائحي التقريبي ●●● والحل الدقيق $x(t)$ للمسألة (2) بخطوة $h=0.2$.



الشكل (10): الحل الشرائحي التقريبي ••• والحل الدقيق $y(t)$ — للمسألة (2) بخطوة $h=0.2$.



الشكل (11): الخطأ في الحل الشرائحي لـ $x(t)$ للمسألة (2) بخطوة $h=0.2$.



الشكل (12): الخطأ في الحل الشرائحي لـ $y(t)$ للمسألة (2) بخطوة $h=0.2$.

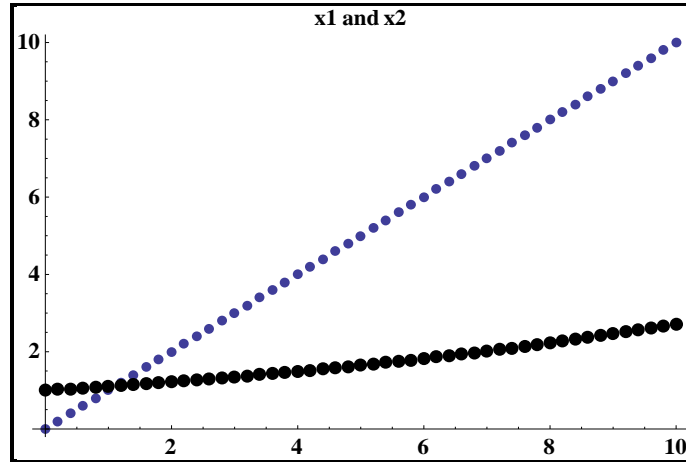
مسألة 3: لناخذ منظومة المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة الآتية [3]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \exp(-\frac{t-\tau}{10}) \\ -t \end{bmatrix}$$

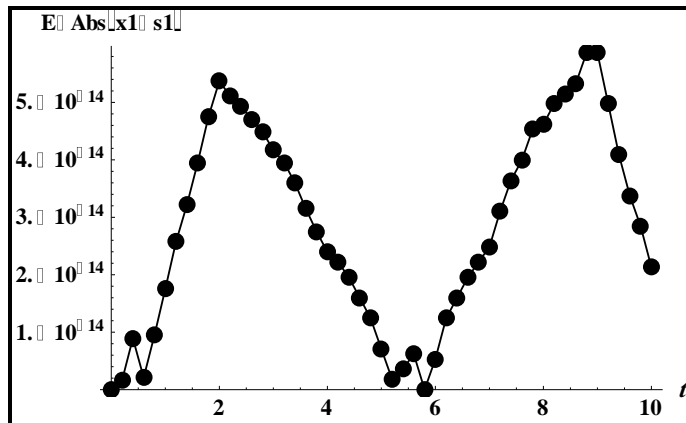
لأجل $t \in [0, \infty)$ ، بتأخير زمني $\tau = 1$ ، دالة تأخير ابتدائية:

$$\phi(t) := \begin{bmatrix} t \\ \exp(t/10) \end{bmatrix}, \quad \text{for } t \in [-\tau, 0]$$

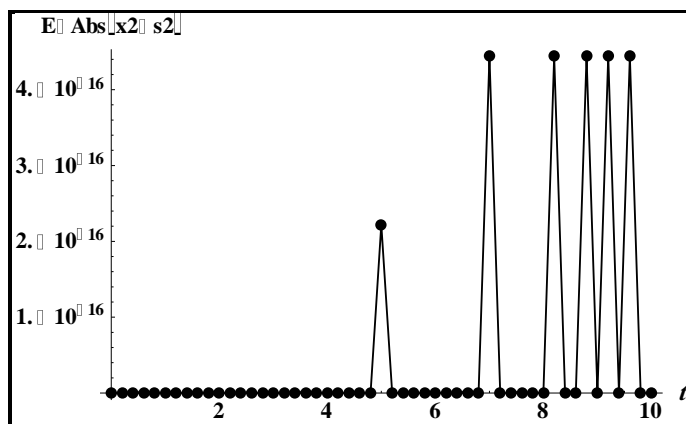
نطبق الطريقة الشرائحية ونحسب الخطأ المطلق بالحل الشرائحي وندرج النتائج في الجدول (4). نرسم في الإشكال (13)-(15) مقارنات الحل الشرائحي مع الحل الدقيق والأخطاء المطلقة فيه بخطوة $h=0.2$ في المجال $[0,10]$ وتأخير زمني $\tau = 1$. يبين الشكل (16) الحل العددي والخطأ المطلق فيه بخطوة $h=0.01$ بطريقة الخطوات المتعددة [3] Bellman. توضح المقارنات والرسومات إلى أن النتائج دقيقة وجديرة بالاهتمام.



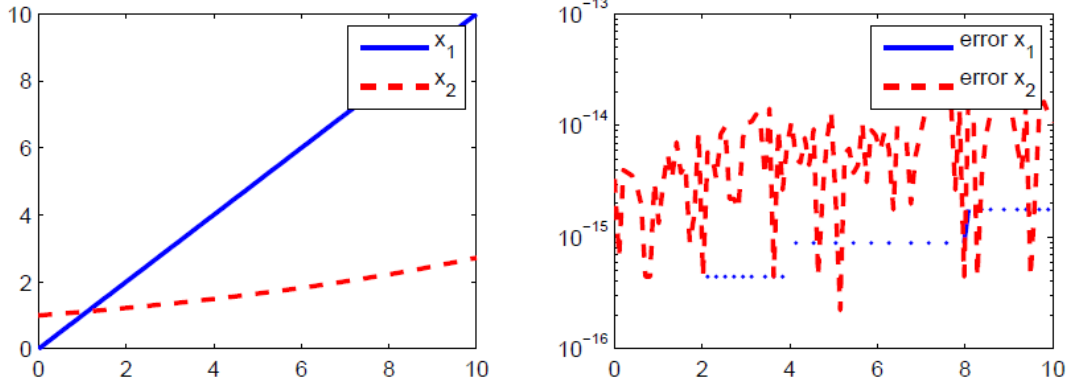
الشكل (13): الحل الشرائحي التقريبي لـ x_1, x_2 للمسألة (3) بخطوة $h=0.2$ وتأخير $\tau = 1$.



الشكل (14): الخطأ المطلق للحل الشرائحي لـ x_1 للمسألة (3) بخطوة $h=0.2$ وتأخير $\tau = 1$.



الشكل (15): الخطأ المطلق للحل الشرائحي لـ x_2 للمسألة (3) بخطوة $h=0.2$ وتأخير $\tau = 1$.



الشكل (16): الحل العددي والخطأ المطلق في الحل للمسألة (3) بخطوة $h=0.01$ بطريقة الخطوات لـ Bellman [3].

الجدول (4): الخطأ المطلق بالحل الشرائحي للطريقة المقترحة مطبقة على المسألة 4.

t	الخطأ المطلق في x_2	الخطأ المطلق في x_1
0.2	1.000E-18	1.66533 E -15
0.8	1.000E-18	9.54792 E -15
1.6	1.000E-18	3.95239 E -14
2.0	1.000E-18	5.37348 E -14
2.6	1.000E-18	4.70735 E -14
3.0	1.000E-18	4.17444 E -14
3.8	1.000E-18	2.75335 E -14
4.4	1.000E-18	1.95399 E -14
5.0	2.22045 E-16	7.10543 E -15
5.8	1.000E-18	1.000 E -18
6.6	1.000E-18	1.95399 E -14
7.4	1.000E-18	3.64153 E -14
8.0	1.000E-18	4.61853 E -14
8.8	4.44089E-16	5.86198 E -14
9.4	1.000E-18	4.08562 E -14
10	1.000E-18	2.13163 E -14

مسألة (4): منظومتنا الأخيرة مؤلفة من أربع معادلات ثلاث منها تفاضلية متأخرة ومعادلة جبرية [1]:

$$x_1' = (1 + x_2 - \sin t)y + \cos t + \sin t - (x_2(t - \tau) - \sin(t - \tau))^2, \quad t > 0$$

$$x_2' = \cos t + x_2(t - \tau) - \sin(t - \tau),$$

$$x_3' = y + (x_2(t - \tau) - \sin(t - \tau))^2,$$

$$0 = (x_1 - \sin t)(y - \exp(t)),$$

حيث $\tau > 0$ ثابت تأخير معلوم، والقيم الابتدائية:

$$x_1(0)=0, x_2(0)=0, x_3(0)=1$$

مع دالة التأخير الابتدائية: $t \leq 0 \phi(t) = x_2(t) = \sin t$ ،

$$\text{الحل التحليلي: } x_1(t) = \sin t - \cos t + \exp(t), x_2(t) = \sin t, x_3(t) = \exp(t), y(t) = \exp(t)$$

نحسب الحل الشرائحي بالطريقة المقترحة وندرج في الجدول (5) نتائج مقارنات أكبر الأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي مع طريقة رانج كوتا-غوص ليجندر [1]. نسجل في الجدول (6) الأخطاء المطلقة في الطريقة الشرائحية المقترحة بخطوة $h=0.4$ في المجال $[0,10]$.

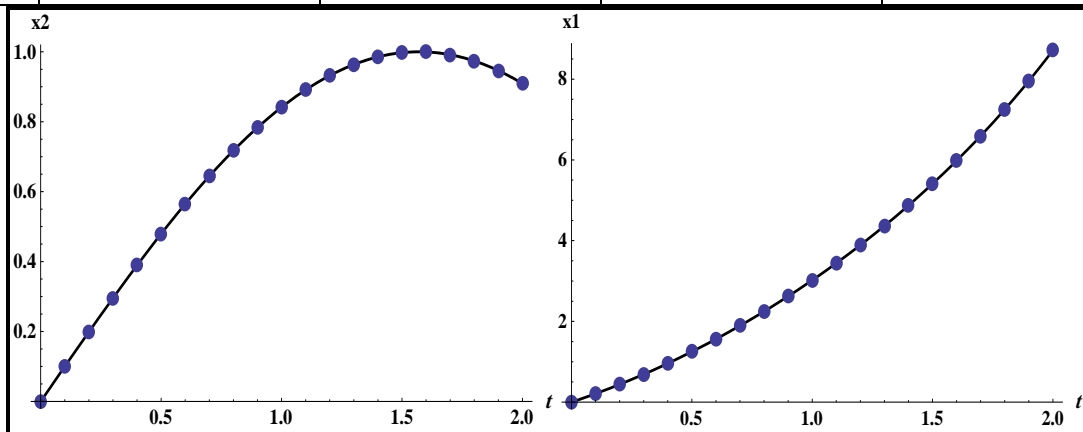
نرسم في الإشكال (17)-(20) مقارنات الحل الشرائحي مع الحل الدقيق والأخطاء المطلقة فيه بخطوة $h=0.1$ في المجال $[0,2]$ وتأخير زمني $\tau = 0.25$. بمقارنة النتائج تتضح دقة الطريقة المقترحة، حيث لا يظهر فارق يذكر بين الحل الشرائحي والحل الدقيق وهذا يؤكد الاستقرار والتقارب للطريقة وتطابق الدراسة النظرية مع التطبيقية.

الجدول(5): مقارنة أكبر الأخطاء المطلقة في الطريقة المقترحة مع طريقة أخرى في المرجع [1].

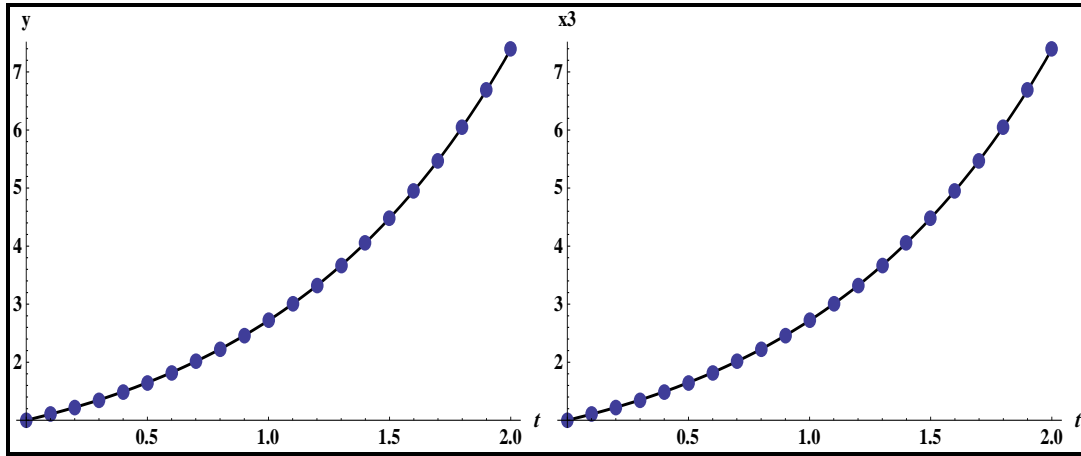
H	طريقة رانج كوتا-غوص ليجندر [1]			الطريقة الشرائحية المقترحة			
	δx_1	δx_3	δy	δx_1	δx_2	δx_3	δy
0.25	1.9 E-9	5.5 E-8	8.8 E-4	5.32907E-15	7.77156E-15	4.44089E-15	7.99361E-15
0.125	2.8 E-11	7.9 E-11	11 E-4	2.2482E-15	3.66374E-15	3.9968E-15	3.55271E-15
0.05	2.3 E-3	.67e-3	1.8 E-2	6.66134E-16	2.55351E-15	1.9984E-15	2.88658E-15
0.025	6.5 E-4	.17e-3	9.2 E-2	2.22045E-16	3.05311E-16	1.33227E-15	2.22045E-16

الجدول(6): الأخطاء المطلقة في الطريقة الشرائحية المقترحة بخطوة $h=0.4$ في المجال $[0,10]$.

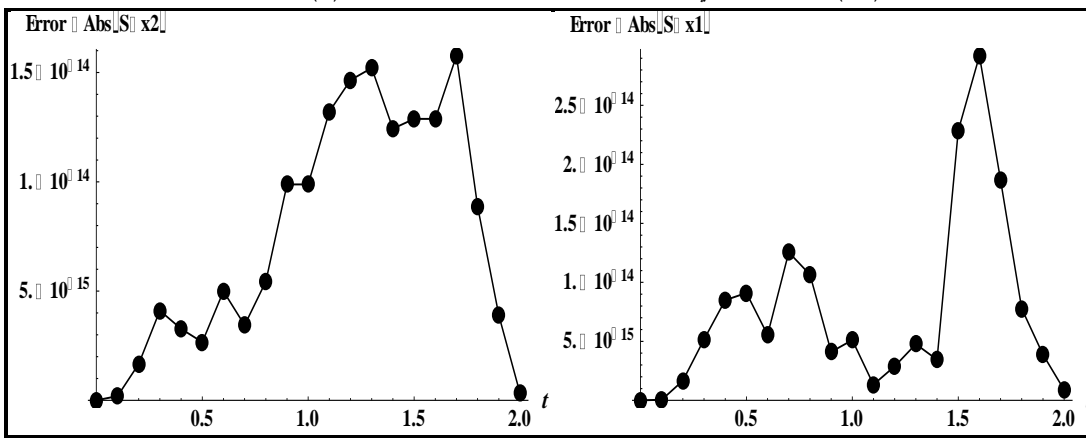
T	δx_1	δx_2	δx_3	δy
0.4	1.13187 E-13	1.03251 E-14	6.81677 E-14	1.02141 E-14
0.8	1.23457 E-13	2.74225 E-14	1.00364 E-13	2.75335 E-14
1.2	1.88072 E-13	5.05151 E-14	2.13607 E-13	5.01821 E-14
1.6	2.43472 E-13	6.07292 E-14	3.13527 E-13	6.12843 E-14
2.0	4.04121 E-13	8.63754 E-14	5.44453 E-13	8.52651 E-14
2.4	5.52447 E-13	8.26006 E-14	7.51399 E-13	8.52651 E-14
2.8	8.43992 E-13	8.98726 E-14	1.13332 E-12	9.23706 E-14
3.6	2.44776 E-12	1.64313 E-14	3.03402 E-12	2.13163 E-14
4.	2.42795 E-12	3.85247 E-14	3.21876 E-12	4.9738 E-14
5.2	1.08373 E-11	9.62563 E-14	1.34435 E-11	1.13687 E-13
6.0	3.07617 E-11	3.99902 E-13	3.6664 E-11	4.54747 E-13
7.2	1.20277 E-11	1.21148 E-12	1.39153 E-11	1.13687 E-12
8.0	2.15227 E-11	1.54732 E-12	2.57387 E-11	1.36424 E-12
9.2	5.08991 E-11	2.31046 E-11	6.43922 E-11	2.36469 E-11
10	7.90146 E-13	3.3513 E-11	3.0559 E-11	4.00178 E-11



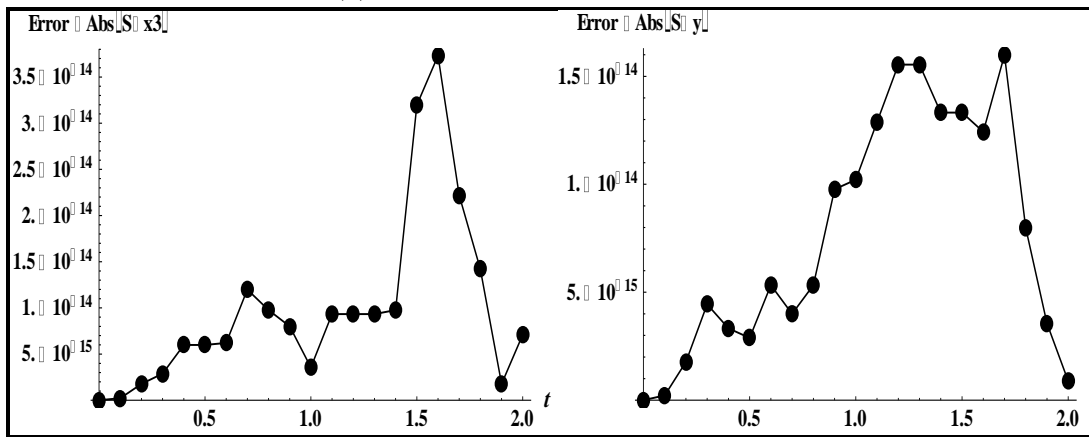
الشكل(17): الحل الشرائحي ●●● والحل الدقيق — لـ x_2, x_1 للمسألة(4) بخطوة $h=0.1$.



الشكل (18): الحل الشرائحي ●●● والحل الدقيق — لـ y, x_3 للمسألة (4) بخطوة $h=0.1$



الشكل (19): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لـ x_2, x_1 للمسألة (4) بخطوة $h=0.1$



الشكل (20): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي لـ y, x_3 للمسألة (4) بخطوة $h=0.1$

الاستنتاجات و التوصيات:

تمت دراسة الاستقرار لتقنية عددية تهدف لإيجاد حلول عددية مستقرة ومتقاربة للمنظومات من المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة. تم تحديد الشروط اللازمة على وسطاء التجميع لرسم أكبر مساحات من الاستقرار-P. تم إجراء اختبارات عددية لتأكيد الاستقرار والتقارب للتقنية المقترحة بحل أربع مسائل اختبار موجودة في مراجع مختلفة [1,3,9]، حيث أشارت المقارنات والنتائج المدرجة في الجداول (2)-(6) الأشكال (5)-(20) إلى أن طريقتنا تفوقت على: طريقة التفاضلات التراجعية BDF [9]، و طريقة اولر الضمنية [9] وطريقة رانج كوتا-غوص ليجندر [1]، وطريقة الخطوات ل Bellman [3]. ولقد تبين جلياً أن التقنية المقترحة قدمت حل شرائحي يتطابق إلى حد كبير مع الحل الدقيق وهذا ما يؤكد الاستقرار والتقارب. نظراً للفعالية والدقة العالية التي قدمتها التقنية الشرائحية في إيجاد الحل العددي لمسألة المعادلات التفاضلية الجبرية المتأخرة الخطية وغير الخطية، نوصي بتطوير تقنية شرائحية لإيجاد الحلول العددية لمسألة المعادلات التفاضلية الجبرية العشوائية، وكذلك مسألة المعادلات التفاضلية المتأخرة العشوائية.

المراجع:

1. ASCHER U. M. and L. R. Petzold, *The Numerical Solution of Delay-Differential-Algebraic Equations of Retarded and Neutral Type*, SIAM J. Numer. Anal, Vol. 32, No. 5, 1995, pp. 1635-1657.
2. CAMPBELL S. L., V. H. LINH, *Stability criteria for differential-algebraic equations with multiple delays and their numerical solutions*. Applied Mathematics and Computation 208 ,2009,pp.397-415.
3. HA P. · V. MEHRMANN, *Analysis and Numerical Solutions of Delay Differential-Algebraic Equations*, PhD Thesis, Technical University Berlin, Berlin 2015, 139 pages.
4. HA P, *Spectral Characterizations of Solvability and Stability for Delay Differential-Algebraic Equations*, Acta Math Vietnam, 4, 2018, pp.1-21.
5. MILANO F. & I. Dassios, *Small-Signal Stability Analysis for Non-Index Hessenberg Form Systems of Delay Differential-Algebraic Equations*, Ieee Transactions On Circuits And Systems-I: Regular Papers, Vol. 63, No. 9, 2016, pp. 1521- 1530.
6. ISMAIL F. & M. B. SULEIMAN, *The P-Stability and Q-Stability of Singly Diagonally Implicit Runge - Kutta Method For Delay Differential Equations*, International Journal of Computer Mathematics, Vol. 76, 2000, pp. 267-277.
7. MAHMOUD S. M., ALI M., and B. Gdeed. *Numerical Treatment of Delay-Differential Equations by Using Spline Hermite Approximations*. Tishreen University Journal Research-Basic Science Series Vol. 39, No. 5, 2017.
8. SUN L., Y. CONG, J. KUANG, *Asymptotic behavior of nonlinear delay differential-algebraic equations and implicit Euler methods*, Applied Mathematics and Computation 228 ,2014, 395-403.
9. SUN L., *Analysis of Backward Differentiation Formula For Nonlinear Differential-Algebraic Equations With 2 Delays*, Springer open, Sun SpringerPlus 2016, pp.1-25.

10. TIAN H., Q. YU, And J. KUANG, Asymptotic Stability of Linear Neutral Delay Differential-Algebraic Equations and Linear Multistep Methods, SIAM J. NUMER. ANAL, Vol. 49, No. 2, 2011,pp. 608–618.
11. TIAN H., Q. YU, And J. KUANG, *Asymptotic Stability Of Linear Neutral Delay Differential-Algebraic Equations And Runge–Kutta Methods*, SIAM J. NUMER. ANAL, Vol. 52, No. 1, 2014,pp. 68–82.
12. ZHANG C., H. CHEN, *Asymptotic stability of block boundary value methods for delay differential-algebraic equations*, Mathematics and Computers in Simulation 81, 2010, pp.100–108.