دراسة مسألة التداخل في فضاء موري

الدكتورة منال حسين[*]

الدكتور محمد علي[**]

حيدر سليمان[***]

(تاريخ الإيداع 8 / 1 / 2019. قُبِل للنشر في 15 / 5 /2019)

□ ملخّص □

درسنا في هذا البحث إحدى مسائل التحليل التابعي وهي مسألة تداخل الفضاءات التابعية، وبشكل خاص فقد درسنا تداخل الفضاءات $M_q^{p,t}$ المتعلقة بفضاءات موري M_q^p.

أولاً، ذكرنا بعض النتائج التي تم التوصل إليها في مجال التداخل لبعض الفضاءات التابعية الشهيرة مثل فضاءات هولدر، ليبيغ، أورليتش وموري. بعد ذلك، قُمنا بتعريف $M_q^{p,t}$ عن طريق إدخال وسيط جديد t على تعريف فضاء موري ومن ثمَّ درسنا بعض خواصه. وقدَّمنا المبرهنة التي تدرس التداخل بين $M_q^{p,t}$ وفضاء موري، بالإضافة إلى المبرهنة التي تدرس التداخل بين $M_q^{p,t}$ وفضاء ليبيغ.

أخيراً، درسنا في ثلاث حالات تداخل الفضاءات التابعية $M_q^{p,t}$، ووجدنا بأن الوسيطين p و t يلعبان الدور الرئيسي في تداخل هذه الفضاءات.

الكلمات المفتاحية: فضاء موري، فضاء أورليتش، التداخل.

[*] **مدرسة- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة طرطوس- طرطوس- سورية.**

[**] **أستاذ- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين- اللاذقية- سورية.**

[***] **طالب دراسات عليا (ماجستير)- قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة طرطوس- طرطوس- سورية.**

Study of inclusion problem in Morrey space

Dr. Manal Hussein[*]
Dr. Mohammad Ali[**]
Haydar Suliman[***]

(Received 8 / 1 / 2019. Accepted 15 / 5 /2019)

□ ABSTRACT □

In this research we study one of the functional analysis problems, it is inclusion of functional spaces. We study especially the inclusion of spaces $M_q^{p,t}$ which branches from Morrey spaces M_q^p.

First, we mentioned some of the results that have been reached in the field of inclusion of some of the famous functional spaces such as Holder, Lebesgue, Orlicz and Morrey spaces. We then defined $M_q^{p,t}$ by introducing a new parameter t to define the Morrey space and then studied some of its properties. Moreover, we presented the theorem that studies the inclusion between $M_q^{p,t}$ and Morrey space in addition to the theorem that studies the inclusion between $M_q^{p,t}$ and Lebesgue space.

Finally, we studied in three cases the inclusion of functional spaces $M_q^{p,t}$,and we found that the parameters p and t play the key role in the inclusion of these spaces.

Keywords: Morrey spaces, Orlicz spaces, Inclusion.

[*]**Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.**
[**]**Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
[***]**Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tartous University, Tartous, Syria.**

مقدمة:

يقسم التحليل التابعي بشكل عام إلى مجموعة من الفروع الرئيسية، إحدى هذه الفروع هي نظرية الفضاءات التابعية، التي تنقسم بدورها إلى موضوعات متعددة، أحد هذه الموضوعات هو موضوع تداخل الفضاءات التابعية، وتتلخص نتائج نظرية تداخل الفضاءات التابعية من خلال الإجابة على السؤال التالي:

إذا كان لدينا فضاء توابع ما معرف من خلال وسيط ، ما العلاقة بين الفضاءات التابعية التي تنشأ عند إعطاء قيم مختلفة لهذا الوسيط؟

مثل هذه الدراسة تمت فيما سبق على بعض الفضاءات التابعية الشهيرة مثل فضاءات هولدر [1]، ليبيغ [2]، أورليتش ([2], [3]) ، وموري ([4], [5], [6]).

فمثلاً، درس Benjamin A. Landon في [1] فضاء توابع هولدر $(0 < \alpha \le 1)$ H_α، وبيّن أنه يحقق خاصة التداخل التالية: $H_\alpha \subseteq H_\beta \subseteq C_{2\pi} \quad for \quad 0 \le \beta < \alpha \le 1$

وبالنسبة إلى فضاء ليبيغ $(1 \le p < \infty)$ L_p، أثبت Al Azhary Masta, et.al في [2] النتيجة الآتية:

إذا كان $1 \le p_2 < p_1 < \infty$ فإن: $L_{\ \ 1}(X) \subseteq L_{p_2}(X)$

حيث:

$$X := B(a, r_0) \quad for\ some \quad a \in \mathbb{R}^n \quad and \quad r_0 > 0$$

أيضاً، أثبت M Taqiyuddin and A A Masta في [3] المبرهنة الآتية التي تخص تداخل فضاءات أورليتش المولَّدة بواسطة توابع مقعرة:

ليكن $\Phi_1, \Phi_2 \in G$ ، عندئذٍ الشروط الآتية متكافئة:

1) $\Phi_1 \preccurlyeq \Phi_2$
2) $L_{\Phi_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_{\Phi_1}(\mathbb{R}^n)$
3) يوجد ثابت $C > 0$ بحيث أن $\|f\|_{L_{\Phi_1}(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L_{\Phi_2}(\mathbb{R}^n)}$ من أجل كل $f \in L_{\Phi_2}(\mathbb{R}^n)$

وفيما يخص فضاء موري $(1 \le p \le q < \infty)$ $^p_q(\mathbb{R}^n)$ ، فقد تمّ التوصل إلى النتيجة الآتية [4]:

إذا كان $1 \le p_1 \le p_2 \le q < \infty$ ، فإن: $L^q(\mathbb{R}^n) = M^q_q(\mathbb{R}^n) \subseteq M^{p_2}_q(\mathbb{R}^n) \subseteq M^{p_1}_q(\mathbb{R}^n)$

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية هذا البحث في إدخال وسيط جديد على تعريف فضاء موري ومِن ثُمَّ دراسة خواص وتداخل هذا الفضاء.

ويهدف هذا البحث إلى الوصول إلى النتائج التالية:

1) إدخال وسيط جديد t على تعريف فضاء موري ^p_q للحصول على $M^{p,t}_q$.
2) دراسة بعض خواص $^{p,t}_q$.
3) دراسة التداخل بين $^{p,t}_q$ وفضاء موري.
4) دراسة التداخل بين $M^{p,t}_q$ وفضاء ليبيغ.
5) دراسة التداخل في الفضاءات التابعية $M^{p,t}_q$ من أجل حالات مختلفة لـ p و t.

طرائق البحث ومواده:

يقع البحث ضمن اختصاص الرياضيات النظرية وبشكل خاص ضمن التحليل التابعي ونظرية الفضاءات، لذلك فإن الطرق المتبعة تعتمد بشكل أساسي على أدبيات نظرية الفضاءات في التحليل التابعي.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

تعريف 1 فضاء ليبيغ(الكلاسيكي) [7]:

يعرّف فضاء ليبيغ الكلاسيكي $(1 \le p < \infty)$ $L^p(\Omega)$، بأنه مجموعة التوابع f القابلة للقياس والتي تحقق الشرط الآتي:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

وكما هو معلوم أن فضاء ليبيغ (الكلاسيكي) يشكل فضاء باناخ، إذا عرِّف عليه النظيم الآتي [8]:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \quad 1 \le p < \infty$$

متراجحة هولدر (Holder's inequality) [9]:

ليكن $1 < p, q < \infty$ بحيث أن $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

وليكن $f \in L^p$ و $g \in L^q$. عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية:

$$\int_{\Omega} |fg| dx \le \|f\|_p \|g\|_q$$

متراجحة مينكوفسكي (Minkowski's inequality) [9]:

ليكن $1 < p < \infty$ و $f, g \in L^p$.

عندئذٍ تتحقق المتراجحة الآتية: $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

تعريف 2 فضاء موري [4]:

من أجل $1 \le p \le q < \infty$ ، يعرّف فضاء موري $M_q^p(\mathbb{R}^n)$ بأنه مجموعة كل التوابع f القابلة للمكاملة محلياً من الدرجة p على $\mathbb{R}^n$ والتي تحقق:

$$\|f\|_{M_q^p} := \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

هنا: $B(a,r)$ كرة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$ مركزها a ونصف قطرها r . و$|B(a,r)|$ يرمز إلى قياس ليبيغ لها.

تعريف 3: من أجل $1 \le t \le p \le q < \infty$ ، نرمُز بـ $M_q^{p,t} = M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ للأسرة:

$$M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{loc}^{\frac{p}{t}}(\mathbb{R}^n) \ : \ \|f\|_{M_q^{p,t}} < \infty \right\}$$

حيث $\|.\|_{M_q^{p,t}}$ يُعطى بالشكل:

$$\|f\|_{M_q^{p,t}} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(y)|^{\frac{p}{t}} dy \right)^{\frac{t}{p}}$$

نتيجة(1):

من تعريف الأسرة $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ ينتج لدينا مباشرةً:

- من أجل $t = 1$ يُصبح ${}_q^{p,t}(\mathbb{R}^n) = M_q^p(\mathbb{R}^n)$ أي أن أسرة توابع فضاء موري هي حالة خاصة من الأسرة $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$.
- من أجل $t = 1$ و $p = q$ يُصبح $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$ أي أن أسرة توابع فضاء ليبيغ هي حالة خاصة من الأسرة $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$.

النتائج والمناقشة:

ينتج من تعريف $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ النتائج الآتية:

مبرهنة 1:

إذا عرَّفنا على الأسرة ${}_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ العمليتين الآتيتين:

$$1)\ (f+g)(y) = f(y) + g(y)$$

$$2)\ (\lambda f)(y) = \lambda f(y) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f,g \in M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$$

فإن الأسرة ${}_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ تشكّل فضاءً خطياً فوق الحقل $\mathbb{R}$.

الإثبات:

إذا كان f و g من ${}_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ ، α و β من $\mathbb{R}$ فإن: $\|f\|_{M_q^{p,t}} < \infty$ و $\|g\|_{M_q^{p,t}} < \infty$

لكي يكون الفضاء ${}_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ فضاءً خطياً يجب تَحقُّق الشرط:

$$\alpha f + \beta g \in M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n) \quad \forall f,g \in M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n) \ , \ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

لدينا:

$$\left(\int_{B(a,r)} |(\alpha f + \beta g)(y)|^{\frac{p}{t}} dy \right)^{\frac{t}{p}} = \left(\int_{B(a,r)} |\alpha f(y) + \beta g(y)|^{\frac{p}{t}} dy \right)^{\frac{1}{p/t}}$$

وبتطبيق متراجحة مينكوفسكي (Minkowski's inequality) نجد:

$$\left(\int_{B(a,r)} |\alpha f(y) + \beta g(y)|^{\frac{p}{t}} dy \right)^{\frac{1}{p/t}} \leq \left(\int_{B(a,r)} |\alpha f(y)|^{\frac{p}{t}} dy \right)^{\frac{1}{p/t}} + \left(\int_{B(a,r)} |\beta g(y)|^{\frac{p}{t}} dy \right)^{\frac{1}{p/t}}$$

وبالتالي:

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|\alpha f(y)+\beta g(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}} \le$$

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|\alpha f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}} + |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|\beta g(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

وبأخذ $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}$ لطرفي المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$\|\alpha f+\beta g\|_{M_q^{p,t}} \le |\alpha|\|f\|_{M_q^{p,t}} + |\beta|\|g\|_{M_q^{p,t}} < \infty$$

$$\Rightarrow \alpha f+\beta g \in M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$$

مبرهنة 2: يشكل التابع:

$$\|f\|_{M_q^{p,t}} := \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

نظيماً على الفضاء الخطي $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$.

الإثبات:

1) $\|f\|_{M_q^{p,t}} \ge 0$ من أجل كل f من ${}_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$.

2) كما أن $f=0 \Leftrightarrow \|f\|_{M_q^{p,t}}=0$.

3) نثبت فيما يلي أن: $\|\lambda f\|_{M_q^{p,t}} = |\lambda|\|f\|_{M_q^{p,t}}$ من أجل كل f من $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ و λ من $\mathbb{R}$.

$$\|\lambda f\|_{M_q^{p,t}} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|(\lambda f)(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|\lambda f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{|\lambda|^{\frac{p}{t}}}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$= |\lambda|\sup_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}} = |\lambda|\|f\|_{M_q^{p,t}}$$

4) نثبت متراجحة المثلث: $\|f+g\|_{M_q^{p,t}} \le \|f\|_{M_q^{p,t}} + \|g\|_{M_q^{p,t}}$

ليكن f و g من $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$، وبتطبيق متراجحة مينكوفسكي نجد:

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)+g(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$\le |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}} + |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|g(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

وبأخذ $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}$ لطرفي المتراجحة الأخيرة نجد أن:

$$\|f+g\|_{M_q^{p,t}} \le \|f\|_{M_q^{p,t}} + \|g\|_{M_q^{p,t}}$$

نتيجة (2):

من المبرهنة (1) والمبرهنة (2) ينتج أن: $\left(M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n), \|.\|_{M_q^{p,t}}\right)$ فضاء منظم.

نَدرس في المبرهنة الآتية التداخل بين ${}_{q}^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ وفضاء موري $M_q^p(\mathbb{R}^n)$.

مبرهنة 3:

إذا كان $1 \le t \le p \le q < \infty$ ، فإن: $M_q^p(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$

الإثبات:

ليكن $f \in M_q^p(\mathbb{R}^n)$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ ، $r > 0$. وبتطبيق متراجحة هولدر (Holder's inequality) نجد:

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p}}$$

$$\le |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)}\left(|f(y)|^{\frac{p}{t}}\right)^{t}dy\right)^{\frac{1}{t}}\left(\int_{B(a,r)}dy\right)^{1-\frac{1}{t}}\right]^{\frac{t}{p}}$$

$$\le |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

بأخذ $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}$ نجد: $\|f\|_{M_q^{p,t}} \le \|f\|_{M_q^p}$ وبما أن f من $M_q^p(\mathbb{R}^n)$ فإن $\|f\|_{M_q^p} < \infty$

إذن $\|f\|_{M_q^{p,t}} < \infty$ وبالتالي f من $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$. أي أن: $M_q^p(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$.

نَدرس في المبرهنة الآتية التداخل بين $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$ وفضاء ليبيغ $L^q(\mathbb{R}^n)$.

مبرهنة 4:

إذا كان $1 \le t \le p \le q < \infty$ ، فإن: $L^q(\mathbb{R}^n) = M_q^q(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$

الإثبات:

بما أن $_q^q(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^p(\mathbb{R}^n)$

و $M_q^p(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$

ينتج أن: $M_q^q(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$

نَدرس في المبرهنة الآتية ثلاث حالات لتداخل الفضاءات التابعية $M_q^{p,t}(\mathbb{R}^n)$.

الحالة الأولى تَدرس التداخل عند إعطاء قيم مختلفة لـ p ، الحالة الثانية تَدرس التداخل عند إعطاء قيم مختلفة لـ t وفي الحالة الثالثة نعطي قيم مختلفة لـ p و t

مبرهنة 5:

1) إذا كان $1 \le t \le p_1 \le p_2 \le q < \infty$ ، فإن: $M_q^{p_2,t}(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p_1,t}(\mathbb{R}^n)$

2) إذا كان $1 \le t_2 \le t_1 \le p \le q < \infty$ ، فإن: $M_q^{p,t_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t_1}(\mathbb{R}^n)$

3) إذا كان $1 \le t_2 \le t_1 \le p_1 \le p_2 \le q < \infty$ ، فإن: $M_q^{p_2,t_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p_1,t_1}(\mathbb{R}^n)$

الإثبات:

إثبات (1):

ليكن $f \in M_q^{p_2,t}(\mathbb{R}^n)$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ ، $r > 0$. وبتطبيق متراجحة هولدر نجد:

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p_1}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p_1}}$$

$$\le |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)}\left(|f(y)|^{\frac{p_1}{t}}\right)^{\frac{p_2}{p_1}}dy\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\left(\int_{B(a,r)}dy\right)^{1-\frac{p_1}{p_2}}\right]^{\frac{t}{p_1}}$$

$$\le |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p_2}{t}}dy\right)^{\frac{t}{p_2}}$$

بأخذ $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}$ نجد أن: $\|f\|_{M_q^{p_1,t}} \le \|f\|_{M_q^{p_2,t}}$ وبما أن $f \in M_q^{p_2,t}(\mathbb{R}^n)$ فإن $\|f\|_{M_q^{p_2,t}} < \infty$

إذن $\|f\|_{M_q{}^{1,t}} < \infty$ وبالتالي $f \in M_q^{p_1,t}(\mathbb{R}^n)$. الأمر الذي يعني أن: $M_q{}^{2,t}(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p_1,t}(\mathbb{R}^n)$.

إثبات (2):

ليكن $f \in M_q^{p,t_2}(\mathbb{R}^n)$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ ، $r > 0$. وبتطبيق متراجحة هولدر نجد:

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t_1}}\,dy\right)^{\frac{t_1}{p}}$$

$$\leq |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)}\left(|f(y)|^{\frac{p}{t_1}}\right)^{\frac{t_1}{t_2}}dy\right)^{\frac{t_2}{t_1}}\left(\int_{B(a,r)}dy\right)^{1-\frac{t_2}{t_1}}\right]^{\frac{t_1}{p}}$$

$$\leq |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p}{t_2}}dy\right)^{\frac{t_2}{p}}$$

بأخذ $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}$ نجد أن: $\|f\|_{M_q^{p,t_1}} \leq \|f\|_{M_q^{p,t_2}}$ وبما أن $f \in M_q^{p,t_2}(\mathbb{R}^n)$ فإن: $\|f\|_{M_q^{p,t_2}} < \infty$
إذن $\|f\|_{M_q^{p,t_1}} < \infty$ وبالتالي $f \in M_q^{p,t_1}(\mathbb{R}^n)$. وهذا يعني أن: $M_q^{p,t_2}(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{p,t_1}(\mathbb{R}^n)$.

إثبات (3):

ليكن $f \in M_q^{p_2,t_2}(\mathbb{R}^n)$ ، $a \in \mathbb{R}^n$ ، $r > 0$. وبتطبيق متراجحة هولدر نجد:

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p_1}{t_1}}dy\right)^{\frac{t_1}{p_1}}$$

$$\leq |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left[\frac{1}{|B(a,r)|}\left(\int_{B(a,r)}\left(|f(y)|^{\frac{p_1}{t_1}}\right)^{\frac{p_2/t_2}{p_1/t_1}}dy\right)^{\frac{p_1/t_1}{p_2/t_2}}\left(\int_{B(a,r)}dy\right)^{1-\frac{p_1/t_1}{p_2/t_2}}\right]^{\frac{t_1}{p_1}}$$

$$\leq |B(a,r)|^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{|B(a,r)|}\int_{B(a,r)}|f(y)|^{\frac{p_2}{t_2}}dy\right)^{\frac{t_2}{p_2}}$$

بأخذ $\sup\limits_{a\in\mathbb{R}^n, r>0}$ نجد أن: $\|f\|_{M_q^{p_1,t_1}} \leq \|f\|_{M_q^{p_2,t_2}}$ وبما أن $f \in M_q^{p_2,t_2}(\mathbb{R}^n)$ فإن $\|f\|_{M_q^{p_2,t_2}} < \infty$
إذن $\|f\|_{M_q^{\ 1,t_1}} < \infty$ وبالتالي $f \in M_q^{p_1,t_1}(\mathbb{R}^n)$. أي أن: $M_q^{p_1,t_1}(\mathbb{R}^n) \subseteq M_q^{\ 2,t_2}(\mathbb{R}^n)$.

الاستنتاجات و التوصيات:

توصلنا في هذه المقالة إلى:

1) تعريف $^{p,t}_{q}$ من خلال إدخال الوسيط t على تعريف فضاء موري.
2) إثبات بعض خواص $^{p,t}_{q}$.
3) دراسة التداخل بين $^{p,t}_{q}$ وفضاء موري $M^{p}_{q}(\mathbb{R}^{n})$.
4) دراسة التداخل بين $M^{p,t}_{q}$ وفضاء ليبيغ $L^{q}(\mathbb{R}^{n})$.
5) دراسة تداخل $^{p,t}_{q}$ من أجل حالات مختلفة لـ p و t.

ونوصي بتطبيق نتائج هذا البحث على فضاءات تابعية أخرى مختلفة عن فضاءات موري.

المراجع:

[1] LANDON, B.A. *Degree Of Approximation Of Holder Continuous Function.* PhD Thesis in Mathematics, Orlando, USA, 2008.
[2] MASTA, A.A; GUNAWAN, H; SETYA-BUDHI, W. *Inclusion Properties of Orlicz and weak Orlicz spaces.* J. Math. Fund. Sci. Vol. 48, No. 3, 2016, 193-203.
[3] TAQIYUDDIN, M; MASTA, A.A. *Inclusion Properties of Orlicz Spaces and Weak Orlicz Spaces Generated by Concave Functions.* IOP Conf. Ser.:Mater. Sci. Eng. Vol. 288, 2018.
[4] GUNAWAN, H; HAKIM, D.I; LIMANTA, K.M; MASTA, A.A. *Inclusion properties of generalized Morrey spaces.* Math. Nachr. Vol. 290, 2017, 332-340.
[5] GUNAWAN, H; HAKIM, D.I; NAKAI, E; SAWANO, Y. *On inclusion relation between weak Morrey spaces and Morrey spaces.* Nonlinear Anal. Vol. 168, 2018, 27-31.
[6] SAWANO, Y; TANAKA, H. *Morrey spaces for non-doubling measures.* Acta Math. Sin. Engl. Ser. Vol. 21, No. 6, 2005, 1535-1544.
[7] CRUZ-URIBE, D; FIORENZA, A; RUZHANSKY, M; WIRTH, J. *Variable Lebesgue Spaces and Hyperbolic Systems.* Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona, Birkhauser, 2014, 173.
[8] CRUZ-URIBE, D.V; FIORENZA, A. *Variable Lebesgue Spaces. Foundations and Harmonic Analysis.* Birkhauser, 2013, 316.
[9] JUNGHENN, H.D. *Principles of Analysis.* CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018, 541.