

صيغة عددية مستقرة لمعادلة فيتزهوغ - ناغومو التفاضلية الجزئية ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن

د. سامي انجرو¹

د. سليمان محمود²

عامر قاسم³

(تاريخ الإيداع 30 / 5 / 2019. قُبل للنشر في 28 / 8 / 2019)

□ ملخص □

يقدم هذا البحث صيغة عددية مستقرة لمعادلة فيتزهوغ-ناغومو التفاضلية الجزئية ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن باستخدام طريقة الفروق المنتهية، وتقريب $L1$ للمؤثر الكسري. تمت معالجة الطرف اللاخطي باستخدام تقريب تايلور من الدرجة صفر. تم برهان الاستقرار اللا مشروط وتوافق الصيغة المقدمّة نظرياً، كما تمت دراسة التقارب عددياً. قدمنا بعض الاختبارات والمقارنات التي تدعم النتائج النظرية وتظهر كفاءة الصيغة المقترحة.

الكلمات المفتاحية: الحساب التفاضلي الكسري، طريقة الفروق المنتهية، المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية الكسرية زمنياً، معادلة فيتزهوغ-ناغومو، اشتقاق كابوتو الكسري.

¹ أستاذ مساعد - قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة تشرين- اللاذقية-سورية.

² أستاذ - قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة تشرين- اللاذقية-سورية.

³ طالب دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات-كلية العلوم-جامعة تشرين- اللاذقية-سورية.

البريد الإلكتروني: amer.alive331@gmail.com

A Stable Numerical Scheme for Fitzhugh-Nagumo Time-Fractional Partial Differential Equation

Dr. Sami Injrou¹
Dr. Suliman Mahmoud²
Amer Kassem³

(Received 30 / 5 / 2019. Accepted 28 / 8 / 2019)

□ ABSTRACT □

This research presents a stable numerical scheme for the Fitzhugh-Nagumo time-fractional partial differential equation using finite differences method, and L1-approximation for the fractional operator. The nonlinear term has been treated by Taylor approximation of zero degree. The unconditional stability and consistency for the proposed scheme have been theoretically proven, and the convergence have been numerically studied. We provide some experiments and comparisons that supports the theoretical results and shows the efficiency of the proposed scheme.

Key words: Fractional Calculus, Finite Differences Method, Time-Fractional Nonlinear Partial Differential Equations, Fitzhugh-Nagumo Equation, Caputo Fractional Derivative.

¹ Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

² Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

³ Postgraduate Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria. Email: amer.alive331@gmail.com

مقدمة:

تشكل المعادلات التفاضلية أداةً بالغة الأهمية في نمذجة الظواهر الطبيعية رياضياً *Mathematical Modeling*، ويعود ذلك إلى ارتباط مفهوم التغيير في الطبيعة بمفهوم الاشتقاق، في حين أنّ فكرة الاشتقاق من مراتب كسرية لم تعد كونها مسألةً محرّضةً لشغف العلماء منذ نهاية القرن السابع عشر نظراً لتعقيدها، وعدم اتصالها بشكل مباشر بالتفسيرات الفيزيائية، فبقيت في إطار نظري ضيق حتى برزت في العقود الأخيرة تطبيقات مثل نمذجة حالات الانبعاث غير التقليدي للغازات *Anomalous Diffusion* [1]، ونمذجة المواد البوليميرية ذات خصائص الليونة والزوجة في *Viscoelasticity* [2]، وتطبيقات أخرى مهمة يمكن الاطلاع على بعضها في المرجع [3]. قبل البدء بعرض المعادلة التي يركّز هذا البحث على دراستها، نعرض النظام التفاضلي الآتي [4]:

$$\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u)(u - \delta) - v, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^\alpha v(t, x)}{\partial t^\alpha} = \epsilon(u - \gamma v). \quad (2)$$

يدعى النظام التفاضلي (1)(2) - حيث $\alpha = 1$ نموذج فيتزهوغ-ناغومو *Fitzhugh-Nagumo Model (FHN)* الذي قدمه الباحثون *R. Fitzhugh* عام 1961 في [5]، و *J. Nagumo* وآخرون في [6]، وهو يصف عملية التحفيز في الأنسجة الحية مثل اطلاق كمون التحفيز بين طرفي غشاء الخلية العصبية، وانتقاله على طول محاورها كالمسالة العصبية. ظهرت مؤخراً عام 2008 في [7] مؤشرات تدلّ على مواعمة الاشتقاق الكسري لوصف ديناميكا بعض أنواع الخلايا العصبية الهرمية في القشرة الدماغية للفئران، تبعتها عام 2011 دراسة في [8] للخصائص الديناميكية لنموذج *FHN* (1)(2) - ذو المشتق الكسري بالنسبة للزمن، أي عندما $\alpha \in (0, 1)$ ، علماً أنه في بعض الدراسات الديناميكية يُدرس تصرف النظام الزمني والذي يعبر عن اطلاق كمون التحفيز، فيغيب حدّ الانبعاث المكاني *(Spatial Diffusion)* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ المسؤول عن نمذجة انتقال الموجة الكمونية (كسالة عصبية) على طول محوار الخلية العصبية، أو انتشاره عبر أي نسيج قابل للتحفيز مثل الانسجة العصبية العضلية لعضلة القلب [4]. في حين أن المتحول $v(x, t)$ يصف عودة غشاء الخلية العصبية إلى كمون الراحة *(Recovery Variable)* وبالاستغناء عنه ينتج نموذج يصف انتقال مقدّمة الموجة الكمونية *Wave Front Propagation* [9], p.42):

$$\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1 - u)(u - \delta), \quad (t, x) \in [0, T] \times [a, b] = \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

وتدعى (3) معادلة *Fitzhugh-Nagumo* ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن، وقد درست هذه المعادلة في عام 2013 في المرجع [10] إذ قدّم *HARIHARAN* و *RAJARAMAN* تقريباً عددياً بطريقة حزم موجات *Harr* (*Harr Wavelets*) وذلك بعد نقل المعادلة إلى فضاء التردد باستخدام تحويل لابلاس، كما أوجد *TCHIER* وآخرون عام 2016 حلاً تقريبية تحليلية باستخدام طريقة باقي سلسلة القوى *RPSM* في [11]. تبعتها في عام 2017 دراسة *Kumar* و آخرون في [12] إذ قدّموا حلاً تقريبية تحليلية من خلال الدمج بين طريقة *q-Homotopy* وتحويل لابلاس. ويختلف هذا البحث بتركيزه على الحلول العددية الصرفة للمسألة ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن وبدون نقل المسألة إلى فضاء التردد، وتجدر الإشارة إلى وجود دراسة عددية مقدّمة من قبل *MOGHADDAM* و *MACHADO* في عام 2017 [13] باستخدام التقريبات الشرائحية للمؤثر الكسري والفرق المنتهية للمشتقات المكانية، لكنها تختلف في كونها تدرس المسألة ذات الاشتقاق الكسري برتبة متحوّلة بالنسبة للزمن.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى دراسة معادلة فيتزهوغ-ناغومو التفاضلية الجزئية ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن عددياً مع شروط ابتدائية وحيدة من نوع ديرخلية من خلال تقديم صيغة عددية متوائمة ومستقرة بدون شروط باستخدام طريقة الفروق المنتهية. إنَّ الحلول التقريبية التي يقدمها هذا البحث تعد في غاية الأهمية، لأنها تُمكن الباحثين من فهم سلوك الظواهر الفيزيائية أو الكيميائية والتنبؤ بالنتائج المستقبلية لها.

طرائق البحث ومواده:

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات التطبيقية، وبشكل خاص في مجال التحليل العددي والمعادلات التفاضلية الجزئية، إذ يعتمد على طرائق التحليل العددي الأساسية، الجبر الخطي، والتحليل الذالي ويوظفها لمعالجة المعادلات التفاضلية الجزئية عددياً، حيث لا تتوفر صيغ تحليلية صريحة للحل الدقيق للمعادلة المدروسة.

النتائج والمناقشة:

مفاهيم أساسية في الحساب التفاضلي الكسري Fractional Differential Calculus:

تعريف 1: [14] يقال عن دالة حقيقية $f(t)$ معرفة على المجال $(0, T)$ ، إنها تنتمي الى الفضاء $C_\gamma[0, T]$ ، حيث $\gamma \in R$ ، إذا وجد عدد حقيقي $p > \gamma$ يحقق أن $f(t) = t^p f_1(t)$ ، حيث $f_1(t) \in C[0, T]$ ، وأكثر من ذلك يقال إن $f \in C_\gamma^n[0, T]$ ، إذا فقط إذا تحقق أن $f^{(n)} \in C_\gamma[0, T]$ ، حيث $n \in N$.

تعريف 2: [14] يعرف تكامل ريمان- ليوفيل الكسري Riemann-Liouville Fractional Integral من المرتبة $\alpha > 0$ لدالة u من الفضاء $C_\gamma[0, T]$ ، وذلك من اجل أية $\gamma \geq -1$ بالعلاقة الآتية:

$$I_{0+}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds ; \alpha > 0 , 0 < t \leq T .$$

يُلاحظ أن $I_{0+}^n f(t)$ ، بحيث $n \in N$ يمثل التكامل التقليدي المكرر n مرة [3].

تعريف 3: [14] يعرف اشتقاق كابوتو الكسري Caputo Fractional Derivative من المرتبة $\alpha \geq 0$ لدالة $u \in C_\gamma^n[0, T]$ ، حيث $n = [\alpha] + 1, \gamma \geq -1$ ، بالعلاقة الآتية [14]:

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} := I_{0+}^{n-\alpha} (u^{(n)}(t)) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{u^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds ; 0 < t \leq T, \alpha \notin N \\ \frac{d^n u(t)}{dt^n} ; \alpha = n \in N \cup \{0\}. \end{cases} \quad (4)$$

يمكن ملاحظة أنه لحساب قيمة المشتق الكسري في نقطة ما، فإنه يتوجب أخذ قيم الدالة المعنية منذ اللحظة الابتدائية، ويبدو ذلك في التعريف من خلال التكامل على المجال $[0, t]$ ، وهذا ما يدعى بالخاصية اللامحلية للمؤثر الكسري أو تأثير الذاكرة.

تقريبات الفروق المنتهية :Finite Difference Approximations

لنقطيع منطقة العمل $\Omega = [0, T] \times \mathcal{D}$ نضع $I_\tau = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, M, M = \frac{T}{\tau}\}$ حيث $\tau > 0$ الخطوة الزمنية. وبالأسلوب نفسه نضع $\mathcal{D}_h = \{x_i = a + ih; i = 0, 1, \dots, N, N = \frac{(b-a)}{h}\}$ حيث $h > 0$ الخطوة المكانية، عندها يمكن تقريب قيم الدالة المجهولة في نقاط التقطيع بالشكل $\{U_i^n \approx u(t_n, x_i); (t_n, x_i) \in I_\tau \times \mathcal{D}_h\}$. بفرض أن $\delta_h^- v_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}$ ، $\delta_h^+ v_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$ مؤثر الفروق الأمامي، والخلفي على الترتيب لكل دالة متقطعة $v = \{v_i; 0 \leq i \leq N\} \in \mathbb{R}^N$ بالتالي تعطى تقريبات المشتقات الطبيعية كما يأتي [15]:

$$\frac{\partial u(t_n, x_i)}{\partial t} = \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) = \delta_\tau^+ U_i^n + r_{\delta, \tau}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u(t_n, x_i)}{\partial x^2} = \delta_h^- \delta_h^+ U_i^n + \mathcal{O}(h^2) = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) = \Delta_h U_i^n + r_{\Delta, h}, \quad (6)$$

حيث $r_{\Delta, h} = \mathcal{O}(h^2)$ و $r_{\delta, \tau} = \mathcal{O}(\tau)$ يمثلان الخطأ المقتطع لمؤثري الفروق δ_τ^+ و Δ_h على الترتيب . يعطى تقريب المشتق الكسري من أجل $\alpha \in (0, 1)$ على المجال $(0, T]$ وفق (11) كالاتي:

$$\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s, x)}{(t-s)^\alpha} ds; \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (7)$$

نأخذ أولاً المشتق الكسري في النقطة t_n من العلاقة (7) كالاتي:

$$\frac{\partial^\alpha u(t_n, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} \frac{\partial u(s, x)}{\partial s} ds; \quad 0 < \alpha < 1, \quad \forall x \in [a, b],$$

عندئذ يمكن استخدام (5) لتقريب المشتق الطبيعي على كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ لنحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(t_n, x)}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} \left(\frac{u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)}{\tau} + \mathcal{O}(\tau) \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_n - s)^{-\alpha} ds + r_\tau^\alpha \\ &= \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} (u(t_{k+1}, x) - u(t_k, x)) \\ &= D_\tau^\alpha u(t_n, x) + r_\tau^\alpha; \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (8)$$

فُدمت الصيغة (8) في المرجع [1]، حيث $b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} > 0$ ، $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ، مقتطع $r_\tau^\alpha \lesssim c_u \tau^{2-\alpha}$ حيث c_u ثابت متعلق بالدالة u ، ويتحقق أن:

$$\forall n \geq 2: \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n + b_{n-1} = b_0; \quad v_k^n = (b_{n-k-1} - b_{n-k}) > 0.$$

مسألة القيمة الحدية الابتدائية Initial Boundary Value Problem

بفرض $u(t, x) \in C_\gamma^1(I; C^2(\mathcal{D}))$ فمِن أجل $(t, x) \in I \times \mathcal{D} = [0, T] \times [a, b] = \Omega \subset \mathbb{R}^2$ تعرّف المسألة الحدية الابتدائية لمعادلة فيتزهوغ-ناغومو النفاضلية الجزئية ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن بالشكل الآتي:

$$\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\delta); \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \delta < 1, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u(0, x) &= g(x); & \forall x \in \mathcal{D} \\ u(t, a) &= l(t), u(t, b) = r(t); & \forall t \in I \end{aligned} \quad (10)$$

حيث $l(t), r(t), g(x)$ دوال مستمرة تمثل الشرط الابتدائي والشروط الحدية من نوع ديرخلية على الترتيب. ويعطى بالعلاقة (7)، ومن الملاحظ أن $f(v) = v(1-v)(v-\delta) \in C^1(\mathbb{R})$ ، يحقق شرط ليبنتشر المحلي Local Lipschitz condition [16]، أي من أجل $B > 0$ يوجد $L = L(B) > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$\|f(v_1) - f(v_2)\| \leq L\|v_1 - v_2\| \quad \forall \|v_1\|, \|v_2\| < B,$$

فيما يأتي سنعتبر $B = \max_{0 \leq n \leq M} B_n$ ، حيث $\|u(t_n, x)\|_\infty \leq B_n$ في اللحظات الزمنية $0 \leq t_n \leq T$.

الصيغة العددية للمسألة الحدية الابتدائية:

بالاستغناء عن الأخطاء المقطعة، وتعويض الصيغ التقريبية (8) و (6) في المعادلة (9)، في النقطة (t_n, x_i) على اعتبار أن U_i^n التقريب العددي لـ $u(t_n, x_i)$ ، ولتقريب الجزء غير الخطي $f(U_i^n)$ ، نستخدم منشور تايلور من الدرجة 0 للدالة $f(U_i^n)$ حول U_i^{n-1} كالآتي:

$$f(U_i^n) \approx f(U_i^{n-1}) = U_i^{n-1} (1 - U_i^{n-1})(U_i^{n-1} - \delta),$$

وذلك من أجل $i = 0, 1, \dots, N, n = 1, 2, \dots, M$ لنحصل على الصيغة العددية (L1-FD) للمسألة الحدية الابتدائية (9) 10-9(10):

$$\begin{aligned} \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} (U_i^{k+1} - U_i^k) &= \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{h^2} + f(U_i^{n-1}), \quad n \geq 1 \\ U_0^n &= l(t_n), \quad U_N^n = r(t_n); & 0 \leq n \leq M, \\ U_i^0 &= g(x_i); & i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (11)$$

مبرهنة (1): من أجل $u \in C^{2,4}(\Omega)$ فإن الصيغة العددية (11) متوائمة Consistent من المرتبة $\mathcal{O}(\tau + h^2)$.
برهان: يمكن حساب الخطأ المقطع المحلي R_i^n للصيغة (11) باعتبار $u_i^n = u(t_n, x_i)$ الحل التحليلي الدقيق للمسألة (9)-(10) في النقطة (t_n, x_i) وتعويضه في الصيغة العددية (11) واستخدام العلاقات (6) و (8)، على تنظيم الفرق بين الصيغتين التحليلية (9) و العددية (11) كالآتي:

$$|R_i^n| = \left| \frac{\partial^\alpha u(t_n, x_i)}{\partial t^\alpha} - D_\tau^\alpha u_i^n + \Delta_h u_i^n - \frac{\partial^2 u(t_n, x_i)}{\partial x^2} + f(u_i^{n-1}) - f(u_i^n) \right|$$

عندئذ بحساب قيمة u_i^n بالاعتماد على منشور تايلور حول النقطة u_i^{n-1} وتطبيق شرط ليبنتشر المحلي ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} |R_i^n| &\leq |r_\tau^\alpha| + |r_{\Delta, h}| + \left| f(u_i^{n-1}) - f(u_i^n + \tau u'(t_{n-1}, x_i) + \mathcal{O}(\tau^2)) \right| \\ &\leq |r_\tau^\alpha| + |r_{\Delta, h}| + L|\tau u'(t_n, x_i) + \mathcal{O}(\tau^2)| \leq \mathcal{O}(\tau^{2-\alpha}) + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(\tau) + \\ &\mathcal{O}(\tau^2) = \mathcal{O}(\tau + \tau^2 + \tau^{2-\alpha} + h^2) = \mathcal{O}(\tau + h^2) \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

بالتالي فالصيغة العددية متوائمة لأن $|R_i^n| \xrightarrow{\tau, h \rightarrow 0} 0$ من المرتبة $\mathcal{O}(\tau + h^2)$.

∠

الآن بوضع $\mu = \tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)$ يمكن كتابة (11) بالشكل المكافئ الآتي:

$$\begin{aligned} b_0 U_i^n + \frac{\mu}{h^2} (-U_{i-1}^n + 2U_i^n - U_{i+1}^n) &= b_{n-1} U_i^0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n U_i^k + \mu f(U_i^{n-1}), \\ U_0^n &= l(t_n), \quad U_N^n = r(t_n); & 1 \leq n \leq M, \\ U_i^0 &= g(x_i); & i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

ونكتب بالشكل المصفوفي الآتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}U^n &= F^n + B^n. \\ \mathcal{M}_{i-1,i} &= \mathcal{M}_{i+1,i} = \frac{-\mu}{h^2}, \quad \mathcal{M}_{i,i} = b_0 + \frac{2\mu}{h^2}; \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ F_i^n &= b_{n-1}U_i^0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n U_i^k + \mu f(U_i^{n-1}); \quad 1 \leq i \leq N-1, \\ B_1^n &= \frac{\mu}{h^2}l(t_n), \quad B_{N-1}^n = \frac{\mu}{h^2}r(t_n), \quad B_i^n = 0; \quad 1 < i < N-1. \end{aligned}$$

إن $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{N-1, N-1}$ مصفوفة حقيقية ثلاثية الأقطار متناظرة، مسيطرة قطرياً تماماً

Strictly Diagonally Dominant لأن:

$$|\mathcal{M}_{ii}| - |\mathcal{M}_{i-1,i}| - |\mathcal{M}_{i+1,i}| = b_0 = 1 > 0; \quad \forall 0 < i < N,$$

فهي معرفة إيجابياً [17]، وبالتالي لجملة المعادلات الجبرية (11) حلّ وحيد، وبالإضافة إلى ذلك، وحسب

المبرهنة (1) من المرجع [18] لدينا $\|\mathcal{M}^{-1}\|_\infty \leq 1$ ، لأنه بوضع:

$$\beta = \min_{0 < i < N} \{|\mathcal{M}_{ii}| - |\mathcal{M}_{i-1,i}| - |\mathcal{M}_{i+1,i}|\} = 1,$$

نحصل على:

$$\|\mathcal{M}^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\beta} = 1. \quad (12)$$

الآن لدراسة استقرار الصيغة التقريبية (11) نحتاج الى بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية:

نأخذ فضاء الدوال المنقطعة $\mathcal{V}_h = \{v \in \mathbb{R}^{N+1}; v = \{v_i, 0 \leq i \leq N\}, v_0 = v_N = 0\}$ ذو النظم

$\|v\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i|$ ، سنعتبر فيما يأتي أن $\|v\| = \|v\|_\infty$ ، ولنأخذ فضاء المتتاليات المحدودة

$\ell^p(X) = \{(v^n)_{n=0}^\infty; v^n \in X, n \geq 0, \|(v^n)_{n=0}^\infty\|_{\ell^p(X)} < \infty\}$ والمزود بالنظم [19]:

$$\|(v^n)_{n=0}^\infty\|_{\ell^p(X)} = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^\infty \tau \|v^n\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; 0 \leq p < \infty, \\ \sup_{n \geq 0} \|v^n\|_X & ; p = \infty. \end{cases}$$

لتبسيط العرض سنعتبر $(v^n)_{n=0}^\infty \in \ell^p(X)$ ، وذلك بفرض أن $v^n = 0$ من أجل $m < n < \infty$.

مبرهنة (2): [19] (Remark 2.1)، ليكن $X = \mathbb{R}$ وليكن $D_\tau^\alpha v^n$ التقريب $L1$ المبين في العلاقة (11) وبفرض

أن $\alpha \in (0, 1)$ ، $p \in \left(\frac{1}{\alpha}, \infty\right)$ والمتتالية $v^n \in X$ $n \geq 0$ ، حيث $v^0 = 0$ عندئذ إذا تحقق أن:

$$\|(D_\tau^\alpha v^n)_{n=1}^m\|_{\ell^p(X)} \leq \kappa \|(v^n)_{n=1}^{m-1}\|_{\ell^p(X)} + \sigma; \quad \forall 1 \leq m \leq M$$

حيث $\kappa, \sigma > 0$ ثوابت، فإنه من أجل أي $\tau > 0$ تتحقق متراجحة Gronwäll الكسرية المنقطعة الآتية:

$$\|(v^n)_{n=1}^M\|_{\ell^\infty(X)} + \|(D_\tau^\alpha v^n)_{n=1}^M\|_{\ell^p(X)} \leq c\sigma,$$

حيث الثابت c غير متعلق بـ τ, M, σ أو v^n ويمكن ان يتعلق بـ α, κ, T, p, X .

بفرض \tilde{U}_i^n الحل التقريبي للصيغة (11)، مع أخطاء التدوير $e_i^n = U_i^n - \tilde{U}_i^n$; $1 \leq i < N$, $0 \leq n \leq M$

وبوضع $e_0^n = e_N^n = 0, n \geq 0$ نجد أن $e^n \in \mathcal{V}_h$ ، عندئذ لدينا المبرهنة الآتية:

مبرهنة (3): من أجل أي تقطيع $I_\tau \times \mathcal{D}_h$ ، فإن الصيغة العددية (11) مستقرة بلا شروط Unconditionally Stable أي يتحقق:

$$\|e^n\| \leq C \|e^0\| ; \quad n \geq 1, \quad \forall \tau, h > 0.$$

حيث C ثابت غير متعلق بـ n, τ, h, M, N ويمكن أن يتعلق بـ $T, (b-a), \alpha$.

برهان: بتعويض كلاً من الحل التقريبي \tilde{U}_i^n والحل العددي الدقيق U_i^n للصيغة (11)، فنحصل على:

$$D_\tau^\alpha e^n = \Delta_h e^n + f(U^{n-1}) - f(\tilde{U}^{n-1}),$$

$$\mathcal{M} e^n = b_{n-1} e^0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n e^k + \mu (f(U^{n-1}) - f(\tilde{U}^{n-1})),$$

بضرب طرفي المعادلة بـ \mathcal{M}^{-1} نصل إلى:

$$e^n = \mathcal{M}^{-1} \left(b_{n-1} e^0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n e^k \right) + \mu \mathcal{M}^{-1} (f(U^{n-1}) - f(\tilde{U}^{n-1})), \quad (13)$$

حيث $H = 0, N$ ، $(f(U_H^{n-1}) - f(\tilde{U}_H^{n-1})) = 0$ ؛ لأن $e_0^n = e_N^n = 0, \forall n \geq 0$ ، بالتالي فالعلاقة (11) محققة في الفضاء \mathcal{V}_h وبأخذ نظيم الطرفين وتطبيق متراجحة المثلث نحصل على:

$$\|e^n\| \leq \left\| \mathcal{M}^{-1} \left(b_{n-1} e^0 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n e^k \right) \right\| + \left\| \mu \mathcal{M}^{-1} (f(U^{n-1}) - f(\tilde{U}^{n-1})) \right\|,$$

باستخدام (12) و (8) وتطبيق شرط ليبتشز نجد:

$$\|e^n\| \leq \left(b_{n-1} \|e^0\| + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^n \|e^k\| \right) + \mu \left\| (f(U^{n-1}) - f(\tilde{U}^{n-1})) \right\|,$$

$$D_\tau^\alpha \|e^n\| \leq \left\| (f(U^{n-1}) - f(\tilde{U}^{n-1})) \right\| \leq L \|e^{n-1}\|, \quad (14)$$

بوضع $v^n = \|e^n\| - \|e^0\|, n \geq 0$ ، فإن $v^0 = 0$ بالتالي باستخدام متراجحة المثلث بعد التعويض في المتراجحة (11) نحصل على المتراجحة الآتية:

$$D_\tau^\alpha v^n \leq L v^{n-1} + L \|e^0\| ; \quad 1 < n \leq M, \quad (15)$$

نتحقق المتراجحة (11) بمعرفة أنه من أجل أي ثابت c تتحقق العلاقة $D_\tau^\alpha c = 0$ ، وهذه من خصائص معاملات الصيغة (11). إذا بتعريف المتتاليات $(v^n)_{n=0}^m, (D_\tau^\alpha v^n)_{n=0}^m \in \ell^p(\mathbb{R})$ وذلك من أجل أي $1 \leq m \leq M$ ، حيث $D_\tau^\alpha v^0 = 0$ و $v^0 = 0$ ، عندئذ بوضع $(\sigma^n)_{n=1}^m = (L \|e^0\|)_{n=1}^m \in \ell^p(\mathbb{R})$ يتحقق حسب (11) الآتي:

$$(D_\tau^\alpha v^n)_{n=1}^m \leq (L v^{n-1})_{n=1}^m + (\sigma^n)_{n=1}^m ; \quad 1 < m \leq M,$$

حيث تتحقق المتراجحة حدًا لحد. بأخذ النظيم في الفضاء $\ell^p(\mathbb{R})$ ؛ $0 < p < \infty$ ، نحصل على:

$$\|(D_\tau^\alpha v^n)_{n=1}^m\|_{\ell^p(\mathbb{R})} \leq \|(L v^{n-1})_{n=1}^m + (\sigma^n)_{n=1}^m\|_{\ell^p(\mathbb{R})} ; \quad \forall 1 < m \leq M$$

بتطبيق متراجحة المثلث وملاحظة أن $v^0 = 0$ ينتج:

$$\|(D_\tau^\alpha v^n)_{n=1}^m\|_{\ell^p(\mathbb{R})} \leq L \|(v^n)_{n=1}^{m-1}\|_{\ell^p(\mathbb{R})} + \|(\sigma^n)_{n=1}^m\|_{\ell^p(\mathbb{R})} ; \quad \forall 1 < m \leq M$$

وبهذا نصل من أجل $p > \frac{1}{\alpha}$ إلى المتراجحة الآتية:

$$\|(D_\tau^\alpha v^n)_{n=1}^m\|_{\ell^p(\mathbb{R})} \leq L \|(v^n)_{n=1}^{m-1}\|_{\ell^p(\mathbb{R})} + T^\alpha L \|e^0\| ; \quad \forall 1 < m \leq M$$

وباستخدام المبرهنة (2)، نحصل من أجل $\alpha \in (0,1)$ ، وأي $\tau > 0$ على:

$$\|(v^n)_{n=1}^M\|_{\ell^\infty(X)} + \|(D_t^\alpha v^n)_{n=1}^M\|_{\ell^p(X)} \leq cT^\alpha L \|e^0\|; \quad \forall 1 \leq n \leq M$$

حيث الثابت c غير متعلق بـ τ, M, σ أو v^n ومنه

$$\|(v^n)_{n=1}^M\|_{\ell^\infty(X)} \leq cT^\alpha L \|e^0\|$$

وبذلك نصل بسبب كون $v^n = \|e^n\| - \|e^0\|$ وبعمليات مباشرة على التنظيم إلى تحقق المترجمات الآتية:

$$\|v^n\| \leq cT^\alpha L \|e^0\|$$

$$\|e^n\| \leq (cT^\alpha L + 1) \|e^0\| \quad \forall 1 \leq n \leq M.$$

بوضع $C := (cT^\alpha L + 1)$ نصل الى المترجمة الآتية:

$$\|e^n\| \leq C \|e^0\| \quad \forall 1 \leq n \leq M.$$

حيث C ثابت غير متعلق بـ n, h, τ, M, N وذلك من اجل اختيار كيفي $\tau > 0$ وبالتالي المبرهنة (3) محققة.

∠

دراسة التقارب العددي:

في هذه الفقرة نختبر التقارب العددي للصيغة (11) باستخدام برنامج Mathematica 11 لحل المسألة الحدية الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial^\alpha u(t, x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(1 - u)(u - \delta); \quad 0 < \alpha < 1, 0 < \delta < 1,$$

$$u(0, x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}; \quad \forall x \in \mathcal{D} = [a, b], \quad (16)$$

$$u(t, a) = l(t), u(t, b) = r(t); \quad \forall t \in [0, 1],$$

وقد استُخدم أحد التقريبات التحليلية المتوفرة في [11] على منطقة العمل $[0, 1] \times [0, 1]$ عند قيم مختلفة $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ من أجل $\delta = \frac{4}{10}$ للحصول على الشروط الحدية $l(t), r(t)$ ، ويعطى هذا التقريب التحليلي للمسألة الحدية (16) كالاتي:

$$u_4(t, x, \alpha, \delta) = \frac{1}{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1} - \frac{(2\delta - 1)e^{\frac{x}{\sqrt{2}}t^\alpha}}{2 \left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1\right)^2 \Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(2\delta - 1)^2 e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - 1\right) t^{2\alpha}}}{4 \left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1\right)^3 \Gamma(2\alpha + 1)} -$$

$$\frac{(2\delta - 1)^3 e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \left(4e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + e^{\sqrt{2}x} + 1\right) t^{3\alpha}}}{16 \left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1\right)^4 \Gamma(3\alpha + 1)} - \frac{(2\delta - 1)^4 e^{\frac{x}{\sqrt{2}} \left(11e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + e^{\frac{3x}{\sqrt{2}}} - 11e^{\sqrt{2}x} - 1\right) t^{4\alpha}}}{96 \left(e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} + 1\right)^5 \Gamma(4\alpha + 1)}. \quad (17)$$

منطقة تقارب هذا التقريب هي $t \in (0, 1)$ لأنه بشكل سلسلة قوى لـ t ، وقد استخدمنا $e_t^n = \|U_t^n - U_{t_2}^n\|_\infty$ لحساب تقدير الخطأ المرتكب في اللحظة t_n ، وذلك بالنسبة للخطوة الزمنية $\tau > 0$ ، مستعينين بالحل التقريبي الأكثر دقة بطول خطوة أقل $\tau_2 < \tau$. ونستخدم مقياس متوسط الخطأ المطلق (Mean Absolute Error) MAE وتقدير مرتبة التقارب (Estimated Convergence Order) ECO وفق العلاقات [13]:

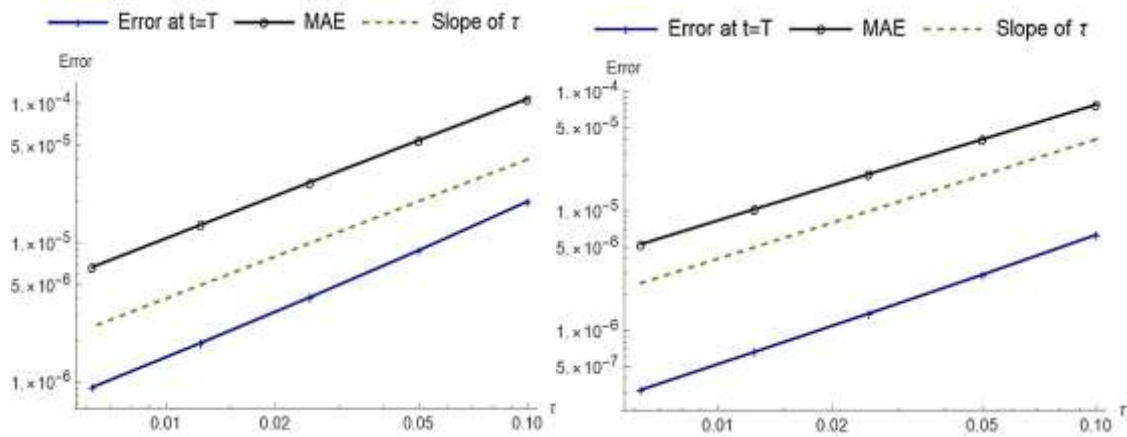
$$MAE_\tau = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^M e_t^n, \quad ECO = \frac{\log(MAE_{\tau_2}) - \log(MAE_\tau)}{\log(\tau_2) - \log(\tau)},$$

يوضح الجدول (1) أن الصيغة (11) متقاربة بمعدل تقارب زمني من المرتبة $O(\tau)$ وهذا ينسحب على النتائج المبينة في الشكل (1). كل ذلك تمّ بتثبيت طول خطوة مكانية $h = 1/100$ للحد من تأثير الأخطاء المكانية. أما لحساب

مرتبة التقارب المكاني فمن أجل $\tau = \frac{1}{320}$ نستخدم نفس المقاييس باستبدال τ ب h ويتبين في الجدول (2) أن الصيغة العددية متقاربة بمعدل تقارب مكاني من المرتبة الثانية وبمعدل تقارب عام من المرتبة $O(\tau + h^2)$ وهذا يتفق مع النتائج النظرية في المبرهنة (1).

جدول(11) " قيم تقدير الخطأ ومعدل التقارب الزمني من أجل $\alpha = 0.9$

τ	1/10	1/20	1/40	1/80	1/160
e^M	2.55E-05	1.23E-05	6.05E-06	2.98E-06	1.47E-06
<i>ECO</i>	-	1.045371	1.029268	1.021323	1.017068
<i>MAE</i>	5.35E-05	2.81E-05	1.48E-05	7.74E-06	4.04E-06
<i>ECO</i>	-	0.927123	0.929716	0.933317	0.938017



الشكل 1) البيان اللوغاريتمي لتقدير الخطأ بالنسبة للخطوة الزمنية ، من أجل $\alpha = 0.5$ على اليمين، و $\alpha = 0.1$ على اليسار

لمقارنة الحلول التي يمكن الحصول عليها باستخدام الصيغة (11) مع تلك التي يمكن الحصول عليها من التقريب التحليلي (11) نقوم بحل المسألة (11) على المنطقة $[0,10] \times [-20,20] = [0,T] \times [a,b]$ ، ونقارن القيم العددية في جوار صغير لـ $t=0$ ، بحيث يكون فيها التقريب التحليلي RPSM عالي الدقة [11]، وقد استُخدم طول خطوة $\tau = 10^{-2}, h = 10^{-2}$.

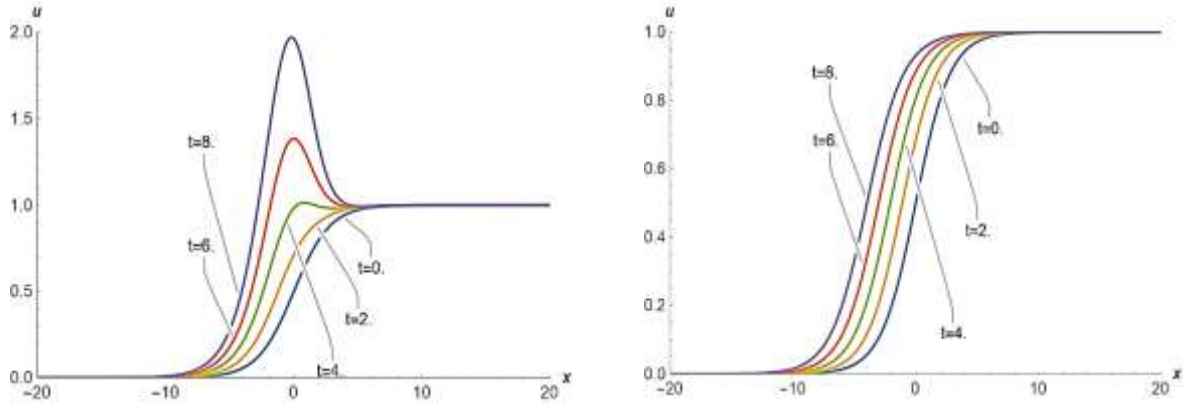
جدول (1) " تقدير قيم الخطأ المقطع ومرتبة التقارب العددي المكاني "

α	0.5				0.9			
	1/10	1/20	1/40	1/80	1/10	1/20	1/40	1/80
e^M	2.5E-07	5.3E-08	1.1E-08	2.1E-09	1.8E-07	4.6E-08	1.0E-08	2.1E-09
<i>ECO</i>	-	2.2553	2.3239	2.3607	-	1.9808	2.1610	2.2972
<i>MAE</i>	1.6E-06	4.1E-07	1.0E-07	2.6E-08	1.6E-06	4.0E-07	9.8E-08	2.4E-08
<i>ECO</i>	-	1.9882	1.9998	1.9999	-	1.9888	1.9997	1.9999

جدول(2) "قيم كل من التقريب التحليلي والعددي والخطأ المطلق"

x	t	$\alpha = 0.9, \delta = 0.1$			$\alpha = 0.50, \delta = 0.20$		
		u_{RPSM}	u_{L1-FD}	$Error$	u_{RPSM}	u_{L1-FD}	$Error$
0.01	0.01	0.503416	0.503269	1.5E-04	0.510233	0.508278	2.0E-03
0.02	0.02	0.506610	0.506432	1.8E-04	0.515510	0.513916	1.6E-03
0.03	0.03	0.509731	0.509535	2.0E-04	0.519972	0.518595	1.4E-03
0.04	0.04	0.512807	0.512598	2.1E-04	0.524010	0.522772	1.2E-03

يظهر الجدول (3) التوافق بين نتائج التقريبات التحليلية RPSM والعددي L1-FD بخطأ معقول بالنسبة لطول الخطوة المستخدمة، في حين يُفقد هذا التوافق من أجل قيم $t > 1$ ، ويتطور هذا الأمر وصولاً إلى ظهور تضخم غير فيزيائي أي أنه ذو منشأ رياضي بحث في الحل RPSM، وهذا موضَّح في الشكل (3)، وذلك من أجل $\alpha = 0.9, \delta = 0.1$. وعدم الاستقرار مرده إلى أن التقريب التحليلي يملك شكل سلسلة قوى متباعدة من أجل قيم $t > 1$ ، في حين تظهر بجلاء خاصية استقرار الصيغة العددية (11) وهذا يبيِّن كفاءة الصيغة المقدَّمة في هذا البحث.



الشكل 2) "البيانات للحلين التقريبيين العددي (على اليمين)، والتحليلي (على اليسار) في لحظات زمنية مختلفة"

الاستنتاجات والتوصيات:

لقد تم في هذا العمل تقديم صيغة عددية مستقرة (L1-FD) لمعادلة فيتزهوغ-ناغومو ذات المشتق الكسري بالنسبة للزمن بخطأ مققطع $O(\tau + h^2)$. الدراسة العددية للتقارب والاختبارات العددية تدعم النتائج النظرية المقدَّمة في المبرهنات (1) و (3)، و توثق فعالية الصيغة العددية المقدَّمة، كما تمت مقارنة نتائجنا مع نتائج طريقة RPSM، أظهرت الاختبارات فعالية الصيغة العددية التي حصلنا عليها لحل مثل هذا النوع من المسائل. يوصى بتوسيع هذه الدراسة لتشمل معادلات بمتحولين مكانيين وشروط حدية معمة. والعمل على صيغ عددية تعطي دقة عالية بالنسبة للزمن.

المراجع:

- [1] LIN, Y. ;XU, C. *Finite difference / spectral approximations for the time-fractional diffusion equation*. J Comput Phys, Vol. 225, 2007, 1533–52.
- [2] ADOLFSSON, K. ;ENELUND, M. ;OLSSON, P. *On the fractional order model of viscoelasticity*. Mech Time-Dependent Mater, Vol. 9, 2005, 15–34.
- [3] PODLUBNY, I. *Feactional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering, vol. 198, Academic Press, Slovac Republic, 1999, 340.
- [4] HASTINGS, S. P. *Single and Multiple Pulse Waves for the FitzHugh-Nagumo equations*. SIAM J Appl Math, Vol. 42 (2), 1982, 247–60.
- [5] FITZHUGH, R. *Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane*. Biophys J, Vol.1, 1961. 445-66.
- [6] NAGUMO, J. J. ;ARIMOTO, S. ;YOSHIZAWA, S. *An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon*. Proc IRE, Vol. 117, 1962, 2061–70.
- [7] LUNDSTROM, B. N. ;HIGGS, M. H. ;SPAIN, W. J. ;FAIRHALL, A. L. *Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons*. Nat Neurosci, Vol. 11 (11), 2008, 1335–42.
- [8] LIU, Y. ;XIE, Y. ;KANG, Y. ;TAN, N. ;JIANG, J. ;XU, J. *Dynamical Characteristics of the Fractional-Order FitzHugh-Nagumo Model Neuron*. In: Wang R, Gu F, editors. Adv. Cogn. Neurodynamics, Springer Netherlands, 2011, p. 756.
- [9] FITZHUGH, R. *Mathematical models of excitation and propagation in nerve*. Biological Engineering, McGraw-Hill, 1969.
- [10] HARIHARAN, G. ;RAJARAMAN, R. *Two reliable wavelet methods to Fitzhugh – Nagumo(FN) and fractional FN equations*. J Math Chem, Vol. 51, 2013, 2432–54.
- [11] TCHIER, F. ;INC, M. ;KORPINAR, Z. S. ;BALEANU, D. *Solutions of the time fractional reaction-diffusion equations with residual power series method*. Adv Mech Eng, Vol. 8 (10), 2016, 1–10.
- [12] KUMAR, D. ;SINGH, J. ;BALEANU, D. *A new numerical algorithm for fractional Fitzhugh–Nagumo equation arising in transmission of nerve impulses*. Nonlinear Dyn, Vol. 91, 2017, 307–317.
- [13] MOGHADDAM, B. P. ;MACHADO, J. A. T. *A stable three-level explicit spline finite difference scheme for a class of nonlinear time variable order fractional partial differential equations*. Comput Math with Appl, Vol. 73, 2016, 1–8.
- [14] ODIBAT, Z. ;MOMANI, S. *Numerical methods for nonlinear partial differential equations of fractional order*. Appl Math Model, Vol. 32, 2008, 28–39.
- [15] RECKTENWALD, G. *Finite-difference approximations to the heat equation*. Mechanical Engineering, Vol. 10, 2011, 1-27.
- [16] BAEUMER, B. *Numerical solutions for fractional reaction – diffusion equations*. Comput Math with Appl, Vol. 55, 2008, 2212–26.
- [17] ANDELIC, M. ;DA FONSECA, C. M. *Sufficient conditions for positive definiteness of tridiagonal matrices revisited*. Positivity, Vol. 15, 2011, 155–9.
- [18] VARAH, J. M. *A lower bound for the smallest singular value of a matrix*. Linear Algebra Appl, Vol. 11, 1975, 3–5.
- [19] JIN, B. ;LI, B. ;ZHOU, Z. *Numerical Analysis of Nonlinear Subdiffusion Equations*. SIAM J Numer Anal, Vol. 56, 2018, 1–23.