

## دراسة الاستقرار بمتوسط المربعات لطريقة عددية مطبقة لحل نماذج من المعادلات التفاضلية العشوائية

الدكتور سليمان محمد محمود\*

الدكتور أحمد الوسوف\*\*

على سمير احسان\*\*\*

تاريخ الإيداع 12 / 5 / 2019. قُبل للنشر في 16 / 9 / 2019

### □ ملخص □

يقدم هذا العمل محاكاة عددية لنماذج من المعادلات التفاضلية العشوائية باستخدام تقريبات هرميت مع نقطتين تجميعيتين، وحساب عمليات وينر العشوائية المستمرة مع الزمن بمحاكاة حاسوبية منفصلة. تمت دراسة الاستقرار العشوائي بمتوسط المربعات بتطبيق التقنية المقترحة مع عملية وينر على نموذج اختبار من المعادلات التفاضلية العشوائية. تبين الدراسة أن الطريقة المقترحة تكون مستقرة بمتوسط المربعات ومقاربة بقوة من المرتبة الثالثة وترسم مناطق واسعة من الاستقرار في المستوي الحقيقي. تم اختبار فعالية الطريقة المقترحة بحل ثلاث مسائل اختبار، وتشير النتائج العددية إلى فعالية وكفاءة الطريقة المقترحة بالمقارنة مع طرائق عددية أخرى.

**الكلمات المفتاحية:** معادلات تفاضلية عشوائية، عملية وينر، كثيرة حدود هرميت ، تقارب قوي، الاستقرار بمتوسط المربعات.

\* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

E-mail: Suliman\_mmn@yahoo.com

\*\* أستاذ مساعد - قسم الاحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

\*\*\* طالب دراسات عليا (دكتوراه) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## Studying mean-square stability of numerical method applied for solving models of stochastic differential equations

Dr. Suliman M. Mahmood\*

Dr. Ahmad Al-Wassouf \*\*

Ali S. Ehsaan \*\*\*

(Received 12 / 5 / 2019. Accepted 16 / 9 / 2019)

### □ ABSTRACT □

In this paper, Herimte approximations with two collocation points are used for the numerical simulation of stochastic of differential equations (SDE), and continuous wiener processes are computed by computer discrete simulations. The mean-square stability was studied by applying the proposed technique with the Wiener process on a test stochastic differential equation.

The study shows that the proposed method is mean-square stability, strongly convergent from order third and locates large stability regions of method at the real plane.

Moreover, the scheme is tested on three problems to illustrate the applicability and efficiency of the purposed technique. Comparisons of our results with others methods, it reveals that our method is better than others.

**Key Words:** Stochastic Differential Equations, Wiener Process, Herimte Polynomials, Strong Convergence, Mean-Square Stability.

---

\* Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

*E-mail: Suliman\_mmm@yahoo.com.*

\*\* Associate Prof, Depart. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

\*\*\* Postgraduate student, Depart. of Mathematics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

## مقدمة:

تجاهلت العديد من الدراسات حتى وقت قريب النماذج التي تتضمن مؤثرات عشوائية، نظراً للصعوبة البالغة في إيجاد حلول تلك النماذج. ولكن الآن، تلعب المعادلات التفاضلية العشوائية دوراً مهماً وبارزاً في مجالات متعددة بعد التطور التكنولوجي الهائل في التطبيقات الصناعية والعلمية واستخداماتها الواسعة في نمذجة الظواهر العشوائية، وهي تحدث في منظومة المعادلات التفاضلية التي تتأثر بالضجة العشوائية، ونذكر على سبيل المثال، في علوم الاقتصاد (تمويل، معدل الفائدة، أسعار الأسهم)، نمو السكان، علم الفيزياء (جزيئات السوائل، الضجيج الحراري)، في علم التحكم (معالجة الإشارات، ضبط، تصفية)، في الطب (عدد خلايا السرطان، عدد أشخاص مصابين بمرض وبائي)، علم الأحياء، والميكانيكا، الخ.

تتميز المعادلات التفاضلية العشوائية بأن حلولها ذات عمليات عشوائية مستمرة مع الزمن، وأن الحل الذي يكون معلوماً في اللحظة الحالية قد لا يكون معلوم في المستقبل (أو بعد لحظة)، ولسوء الحظ فإن إمكانية الحصول على حلول تحليلية لمثل هذه النماذج غير متوفرة في معظم الحالات لهذا يسعى الباحثون إلى تطوير طرائق عددية لمحاكاة الحلول التحليلية بحلول منفصلة.

قدم الباحثون تطويرات عديدة لطرائق رانج-كوتا، فقد قام Wang في [12] عام 2008 بتطوير طرائق رانج كوتا من المرحلة الثالثة تملك تقارباً قوياً من المرتبة الأولى وتم تحديد مناطق الاستقرار لطريقتين الأولى صريحة والثانية شبه ضمنية. كما طور Famelis في [5] عام 2009 طرائق رانج كوتا من المرحلتين الثالثة والرابعة، وحصل على تقارب من مراتب مختلفة دون التطرق إلى تحديد مناطق الاستقرار.

استخدم Khodabin وآخرون في [7] عام 2011 طرائق رانج كوتا من المرتبة الثانية وتمت دراسة التقارب بمتوسط المربعات. درس Zhu وآخرون في [14] عام 2012 الاستقرار لتقنية تستخدم عمليات سلسلة ماركوف، ومصروفة معدلات القفز الزمني للانتقال إلى تقسيمات زمنية جديدة باستكشاف التسلسل المناسب.

قدم Mahmoud وآخرون في [8] محاكاة عددية لنموذج من المعادلات التفاضلية العشوائية باستخدام كثيرات حدود شرائحية من الدرجة الخامسة مع خمسة وسطاء تجميع، وقدموا أيضاً في [9-10] طريقتين شرائحيين تعتمدان على التقريب بكثيرات حدود هرميت من الدرجتين الخامسة مع ثلاثة وسطاء والسابعة مع أربعة وسطاء تجميع على الترتيب استخدمت الأولى لحل مسائل في المعادلات التفاضلية الجبرية والثانية لحل مسائل في المعادلات التفاضلية متعددة الحالات.

وحديثاً تم تطوير تقنيات متعددة، حيث قدم Azadfar & Nabati في [1] عام 2018 طريقة ميلستين باستخدام دوال مقطعة بزمن منفصل، وحصلوا على تقارب قوي تحت شرط ليبنتشيز المحلية وشرط خاسمينسكي.

قدم Bayram وآخرون في [3] عام 2018 طريقة منشور تايلور إيتو مع محاكاة مونت كارلو للعملية العشوائية، والحصول على تقنية أولر مارياما وميلستين. درس Eissa وآخرون في [4] عام 2018 الاستقرار بمتوسط المربعات لطرائق ميلستين ذات الخطوات المجزأة بوسيط حر وحصلوا على مناطق استقرار أكبر من مناطق استقرار ميلستين. قدم Haghghi & Rößler في [6] عام 2018 طريقة تقريب متوازنة بخطوة مضاعفة التجزيء، وتم تحديد مناطق الاستقرار في المستوي الحقيقي. قدم Xiao وآخرون في [13] عام 2018 تعديلاً لطريقة زيتا العشوائية كدمج بين طريقتي أولر-مارياما وأولر التراجعية، وناقشوا استقرار الحلول العددية.

## المعادلات التفاضلية العشوائية: Stochastic Differential Equations(SDEs)

قبل البدء نحتاج للتعريف الآتي:

**تعريف 1:** عملية وينر (Wiener Process): [8]

إن عملية وينر هي متغير عشوائي  $W(t)$  مستمر مع الزمن في المجال  $[0, T]$ ، وتحقق الخصائص الآتية:  
**خاصة 1:** من أجل كل  $t$ ، يكون توزيع المتغير العشوائي  $W(t)$  توزيعاً طبيعياً بمتوسط Mean يساوي الصفر وتباين Variance يساوي  $t$ .

**خاصة 2:** إن  $W(0) = 0$  باحتمال يساوي 1.

**خاصة 3:** من أجل كل  $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ، يكون الفرق  $W(t_2) - W(t_1)$  متغيراً عشوائياً موزعاً طبيعياً بمتوسط صفر وتباين  $t_2 - t_1$ ، وهذا يكافئ العبارة الآتية:

$$W(t_2) - W(t_1) \sim \sqrt{t_2 - t_1} N(0,1)$$

حيث  $N(0,1)$  يرمز لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

**خاصة 4:** من أجل كل  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ ، فإن الفرقين  $W(t_2) - W(t_1)$  و  $W(t_4) - W(t_3)$  يكونان متغيرين عشوائيين مستقلين.

**خاصة 5:** إن عملية وينر  $W(t)$  يمكن تمثيلها بمسارات مستمرة.

إن عملية وينر تكون حاسمة في نمذجة العمليات العشوائية لأنها تمثل التكامل للضجيج المثالي المستقل عن التكرار والمسمى بالضجج الأبيض White noise.

تعطى المعادلة التفاضلية العشوائية وفق صيغة ستراتونوفيتش Stratonovich بالشكل [5]:

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t) \circ dW_t \\ X_0 = X_{t_0}, \end{cases} \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

حيث  $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  دالتان قابلتان للقياس و  $X_0 = X_{t_0}$  شرط ابتدائي،  $W_t = W(t)$  عملية وينر،  $X_t = X(t)$  عملية عشوائية أو متغير عشوائي.

تسمى الدالة  $f(t, X_t)$  معامل الإزاحة للمعادلة التفاضلية العشوائية وهو جزء محدد فيها، وتدعى الدالة  $g(t, X_t)$  بمعامل انتشارها، وهو جزء عشوائي يؤثر على الحجم المتوسط للتقلبات  $X_t$ ، التي تنشأ ذاتياً من العملية العشوائية. يمكن إعادة كتابة صيغة ستراتونوفيتش (1) بشكل مكافئ لصيغة إيتو بعد الاستبدال بالعلاقة [2]:

$$g(t, X_t) \circ dW_t = \frac{1}{2} g'_X(t, X_t) g(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t$$

نلاحظ أن المعادلة التفاضلية العشوائية (1) تعطى بالشكل التفاضلي على خلاف الشكل المشتق للمعادلة التفاضلية العادية، والسبب هو أن العديد من العمليات العشوائية تشبه عملية وينر، تكون مستمرة لكنها ليست قابلة للاشتقاق باحتمال يساوي 1، أي أن العملية  $dW(t)/dt$  غير ممكنة، لهذا يمكن كتابة (1) بالشكل التكاملي الآتي:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t f(s, X(s)) ds + \int_0^t g(s, X(s)) \circ dW(s), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

حيث إن الشرط الابتدائي  $X(0) = X_0$  هو متغير عشوائي.

## أهمية البحث وأهدافه:

يلجأ الباحثون إلى تصميم نماذج عشوائية لفهم الظواهر الطبيعية المختلفة في العالم الحقيقي الذي نعيش فيه، ومن المعلوم أن للمعادلات التفاضلية العشوائية نصيب كبير من هذه النماذج. وهي تلعب دوراً مهماً في التطبيقات العلمية والصناعية المتطورة، كنماذج لمساكن في الاقتصاد، والتعاملات المصرفية، وعلم الأحياء، ومساكن التدفق، وحركة الجزيئات، والالكترونات، الخ. ولسوء الحظ واجه الباحثون مصاعب كبيرة في تحديد الحلول التحليلية لمعظم هذه النماذج، وتجنب البعض الخوض فيها نظراً لتعقيدها، وحديثاً يسعى الباحثون بشكل حثيث لتطوير طرائق عددية لمحاكاة حلولها عددياً، وتعد هذه الحلول ذات أهمية كبيرة لأنها السبيل الوحيد للحصول على المعلومات. ولهذا نهدف لتطوير تقنية عددية مستقرة ومتقاربة لمحاكاة الحلول لبعض هذه النماذج العشوائية.

## طرائق البحث ومواده:

تناقش في هذا المقال العلمي طريقة عددية لمحاكاة مسارات الحلول لبعض المعادلات التفاضلية العشوائية، وتقديم دراسة تحليلية للاستقرار والتقارب العددي لهذه الطريقة عندما يتم تطبيقها لنموذج اختبار من نمط المسائل المطروحة. تعتمد منهجية البحث على بعض مفاهيم الإحصاء الرياضي وتقنيات التحليل العددي، والتحليل الدالي، والتحليل الرياضي، وعلوم الخوارزميات، والكمبيوتر. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات-كلية العلوم- جامعة تشرين في الفترة الواقعة بين تموز 2018 نيسان 2019.

## النتائج والمناقشة:

### محاكاة حاسوبية لمسار عملية وينر المتقطعة العشوائية:

#### Computer Simulation of Discrete Wiener Process Path

نقوم بإجراء محاكاة حاسوبية لعملية وينر المنفصلة حيث تكون  $W(t)$  محددة عند قيم منفصلة  $t$ . لهذا نأخذ تجزئة منتظمة للمجال  $[0, T]$  بخطوة  $dt = T/n$ ، و  $n$  عدد صحيح موجب، حيث  $W_j = W(t_j)$  لأجل  $t_j = j dt$ ،  $j = 0, 1, \dots, n$ . وهكذا يتحقق لدينا من خصائص عملية وينر الآتي:  
نجد أولاً أن  $W_0 = 0$  باحتمال 1.  
وكذلك نجد:

$$W_j = W_{j-1} + dW_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

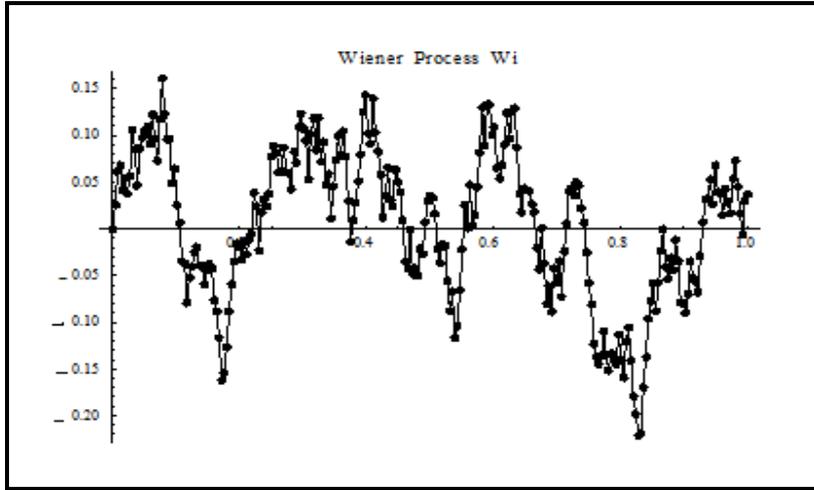
و إن كل  $dW_j$  هو متغير عشوائي مستقل له التوزيع  $dW_j \sim \sqrt{dt} N(0, 1)$ ، وبالتالي فإن  $dW_j = \sqrt{dt} rd$ ، حيث  $rd$  متغير عشوائي له التوزيع  $N(0, 1)$ ، وللتبسيط نستخدم أحيانا الترميز  $h=dt$ .

نقدم برنامجاً بلغة Mathematica 11 يحاكي عملية وينر العشوائية المنفصلة في المجال  $[0, T]$ ، بخطوة  $n=256$ ،  $dt=1/256$ . ننفذ البرنامج لمحاكاة مسار عملية وينر في الشكل (1)، ثم نحسب المتوسط والوسط والتباين لقيم وينر العشوائية ونضع النتائج في الجدول (1).

المدخلات:  $n=256$ ،  $T=1.0$ ،  $dt=1/256$

```

Clear[W,dW,dt,n,T];
n=2^8; T=1.0;
dt=(T)/(n);
W[0]=0;
dW[1]=Sqrt[dt]*RandomReal[{-1,1}];
W[1]=W[0]+dW[1];
For[i=2,i<=n, dW[i]=Sqrt[dt]*RandomReal[{-1,1}];
W[i]=W[i-1]+dW[i];
i++]
ListPlot[Table[{i dt,W[i]},{i,0,n}],Joined->True,Mesh->All, PlotLabel->"Wiener process"]
Wien = Table[W[i], {i, 0, n}]
{Mean[Wien], Median[Wien] ,Variance[Wien]}
    
```



الشكل(1): توليد عملية وينر العشوائية بخطوة  $dt=1/256$  في المجال الزمني  $[0,1]$ .

جدول(1): قيم وسطاء عملية وينر الممثلة في الشكل(1) باستخدام  $n=200$ ، وخطوة زمنية  $dt=1/200$

متباين القيم العشوائية Variance[ $W_i$ ]	وسيط القيم العشوائية Median [ $W_i$ ]	متوسط القيم العشوائية Mean[ $W_i$ ]
0.00561471	0.0181193	0.00616789

### تقنية عددية للمعادلات التفاضلية العشوائية: Numerical Technique of SDEs

سننشئ تقنية عددية ونطبقها على المعادلة التفاضلية العشوائية المعطاة وفق صيغة ستراتونوفيتش(1)، ولأجل ذلك نستخدم التجزئة المنتظمة:  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ ، حيث  $t_i = i dt$ ،  $i = 0, 1, \dots, n$ ، و  $dt = \frac{T}{n}$  طول الخطوة، و  $n$  عدد صحيح موجب.

### استيفاء هرميت: Hermite Interpolation [15]

بفرض  $X(t) \in C^1[t_k, t_{k+1}]$ ، حيث  $C^1$  هو فضاء الدوال المستمرة مع مشتقاتها من المرتبة الأولى في المجال الجزئي  $[t_k, t_{k+1}]$ ، ونضع شروط استيفاء هرميت عند طرفي هذا المجال:

$$H_k(t_k) = X(t_k), H_k(t_{k+1}) = X(t_{k+1})$$

$$H'_k(t_k) = X'(t_k), H'_k(t_{k+1}) = X'(t_{k+1})$$

عندئذ توجد كثيرة حدود هرميت وحيدة من الدرجة الثالثة بالشكل [15]:

$$H_k(t) = \sum_{j=k}^{k+1} R_j(t)X_j + \sum_{j=k}^{k+1} G_j(t)X'_j, t \in [t_k, t_{k+1}] \quad (3)$$

حيث  $X_j = X(t_j)$  و تدعى  $G_j(t), R_j(t)$  مضاريب هرميت وهي كثيرات حدود من الدرجة الثالثة تعطى في كل مجال جزئي  $[t_k, t_{k+1}]$  ، بالشكل:

$$R_j(t) = [t - 2(t - t_j)L'_j(t_j)]L_j^2(t) \quad (4)$$

$$G_j(t) = (t - t_j)L_j^2(t)$$

حيث  $L_j(t)$  مضاريب لاغرانج في المجال الجزئي  $[t_k, t_{k+1}]$  تعطى بالشكل:

$$L_j(t) = \frac{(x - x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})}$$

ومضاريب هرميت  $G_j(t), R_j(t)$  تحقق الشروط الآتية:

$$R_j(t_k) = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases} \quad \text{and } R'_j(t_k) = 0, \forall j, k$$

$$G'_j(t_k) = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases} \quad \text{and } G_j(t_k) = 0, \forall j, k$$

لتبسيط التعبير نعيد كتابة كثيرة حدود استيفاء هرميت (3) \_ (4) بالشكل:

$$H_k(t) = \bar{\xi}^2(1 + 2\xi)S_k + \bar{\xi}^2\xi S_k^{[1]} + \xi^2(1 + 2\bar{\xi})S_{k+1} - \xi^2\bar{\xi} S_{k+1}^{[1]}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

حيث

$$S_k = H_k(t_k), S_k^{[1]} = dh H'_k(t_k) \quad (6)$$

$$\xi = (t - t_k)/dh, \quad \bar{\xi} = 1 - \xi \in [0, 1]$$

حيث  $H'_0(t_0), H_0(t_0)$  قيم ابتدائية وهي معلومة من شروط البدء للمسألة.

وباشتقاق كثيرة الحدود (5) بالنسبة لـ t نحصل على:

$$dt H'_k(t) = 6(\bar{\xi}^2 - \bar{\xi})S_k + (3\bar{\xi}^2 - 2\bar{\xi})S_k^{[1]} + 6(\xi - \xi^2)S_{k+1} + (3\xi^2 - 2\xi)S_{k+1}^{[1]} \quad (7)$$

وبشكل عام فإن التجزئة تحدد n شريحة  $H_k(t)$  ،  $k = 0, 1, \dots, n-1$  ، تعطى بالشكل:

$$H(t) = \begin{cases} H_0(t), & t \in [t_0, t_1], \\ \vdots \\ H_k(t), & t \in [t_k, t_{k+1}], \\ \vdots \\ H_{n-1}(t), & t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

لنعرف نقطتين تجميعيتين:

$$t_{k+\alpha} = t_k + \alpha dt, \quad t_{k+\beta} = t_k + \beta dt, \quad (8)$$

في كل مجال جزئي  $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , مع الوسيطين التجميعيين:

$$0 < \alpha < \beta = 1 \quad (9)$$

الآن بتطبيق كثيرات حدود هرميت الشرائحية (5)-(7) مع نقاط التجميع (8)-(9) إلى منظومة المعادلات

التفاضلية العشوائية (1)، ينتج لدينا:

$$\begin{cases} H'(t_{k+\alpha}) = f(t_{k+\alpha}, H(t_{k+\alpha})) + g(t_{k+\alpha}, H(t_{k+\alpha})) \circ dW_k, \\ H'(t_{k+\beta}) = f(t_{k+\beta}, H(t_{k+\beta})) + g(t_{k+\beta}, H(t_{k+\beta})) \circ dW_k, \end{cases} \quad (10)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

وهي خاضعة للشروط الابتدائية:

$$H(t_0) = H_0(t_0) = X_0 \quad (11)$$

تكتب المنظومة (10) بالشكل:

$$6(\alpha^2 - \alpha)S_k + (1 - 4\alpha - 3\alpha^2)S_k^{[1]} + 6(\alpha - \alpha^2)S_{k+1} + (3\alpha^2 - 2\alpha)S_{k+1}^{[1]} = dt f(t_{k+\alpha}, H(t_{k+\alpha})) + g(t_{k+\alpha}, H(t_{k+\alpha})) \circ dW_k, \quad (12)$$

$$6(\beta^2 - \beta)S_k + (1 - 4\beta - 3\beta^2)S_k^{[1]} + 6(\beta - \beta^2)S_{k+1} + (3\beta^2 - 2\beta)S_{k+1}^{[1]} = dt f(t_{k+\beta}, H(t_{k+\beta})) + g(t_{k+\beta}, H(t_{k+\beta})) \circ dW_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

نعيد كتابة المنظومة (12) بصيغة المصفوفات، نحصل على الصيغة التكرارية الآتية:

$$A\bar{S}_{k+1} = B\bar{S}_k + h\bar{F}_k, \quad k=0, 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

حيث:  $dW_k = \sqrt{dt} rd$ ، و  $rd$  متغير عشوائي له التوزيع  $N(0, 1)$ ، و  $h = dt$  طول الخطوة.

$$A = \begin{bmatrix} 6(\alpha - \alpha^2) & 3\alpha^2 - 2\alpha \\ 6(\beta - \beta^2) & 3\beta^2 - 2\beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$B = \begin{bmatrix} 6(\alpha - \alpha^2) & -3\alpha^2 + 4\alpha - 1 \\ 6(\beta - \beta^2) & -3\beta^2 + 4\beta - 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{S}_k = \begin{bmatrix} S_k \\ S_k^{[1]} \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_{k+1} = \begin{bmatrix} S_{k+1} \\ S_{k+1}^{[1]} \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_k = \begin{bmatrix} f(t_{k+\alpha}, S(t_{k+\alpha})) + g(t_{k+\alpha}, S(t_{k+\alpha})) \circ dW_k \\ f(t_{k+\beta}, S(t_{k+\beta})) + g(t_{k+\beta}, S(t_{k+\beta})) \circ dW_k \end{bmatrix}$$

إن المنظومة (13) قابلة للحل دائما من أجل  $0 < \alpha < \beta = 1$  ويمكن تعيين متجه المجاهيل  $\bar{S}_{k+1}$  في كل مجال جزئي  $[t_k, t_{k+1}]$  لأن المصفوفة  $A$  المعطاة بالعلاقة (14) لها دائما مقلوب حيث نجد أن:

$$Det(A) = 6\alpha(1 - \alpha) \neq 0$$

### الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة: Mean-Square Stability of Method

قبل البدء نقدم أولا التعريف الآتي.

**تعريف (2) [4]:** يقال عن طريقة عددية إنها مستقرة بمتوسط المربعات، إذا وجد  $h^* > 0$ ، وبتطبيق الطريقة على

مسألة اختبار من الشكل (1) يولد الحل العددي متتالية من التقريبات  $X_k$  يجب أن تحقق النهاية:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E | X_k |^2 = 0$$

لأجل أي خطوة  $(h \in (0, h^*))$ ، حيث  $E$  يرمز للتوقع الرياضي.

لنأخذ مسألة الاختبار الخطية النموذجية العشوائية الآتية [12]:

$$dX(t) = \lambda X(t) dt + \mu X(t) \circ dW(t) \quad (16)$$

تخضع للشرط الابتدائي

$$X(0) = X_0$$

حيث أن  $\lambda, \mu$  ثابتان حقيقيان، وهذه المسألة تملك الحل التحليلي:

$$X(t) = X(0) \exp[(\lambda t + \mu W(t))] \quad \text{مع } X(0) = 1$$

نلاحظ بسهولة أنه إذا كان  $\text{Re}(\lambda) < 0$  فإن الحل التحليلي يحقق النهاية:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E | X(t) |^2 = 0$$

وهذا يعني أن الطريقة العددية حتى تكون مستقرة بمتوسط المربعات يجب تقلد الحل التحليلي في سلوكه.

الآن سنقوم بتطبيق التقريبات (5)-(7) مع نقاط التجميع (8)-(9) إلى مسألة الاختبار (16)، ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} H'(t_{k+\alpha}) &= \lambda H(t_{k+\alpha}) + \frac{1}{2} \mu^2 H(t_{k+\alpha}) + \mu H(t_{k+\alpha}) dW_k / dt, \\ H'(t_{k+\beta}) &= \lambda H(t_{k+\beta}) + \frac{1}{2} \mu^2 H(t_{k+\beta}) + \mu H(t_{k+\beta}) dW_k / dt \end{aligned} \quad (17)$$

$, k = 0, 1, \dots, n-1$

حيث إن الشرط الابتدائي:  $H(0) = S_0 = X_0$  و إن  $dW_k = \sqrt{dt} rd$ ، و  $rd$  متغير عشوائي له التوزيع  $N(0, 1)$ .

1. تؤول المنظومة (17) بعد التعويض بالتقريبات الشرائحية إلى الشكل الآتي:

$$M \begin{bmatrix} S_{k+1} \\ h S'_{k+1} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} S_k \\ h S'_k \end{bmatrix}, k=0, 1, \dots, n-1 \quad (18)$$

حيث:

$$M = \begin{bmatrix} 6(\alpha - \alpha^2) - (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)(3\alpha^2 - 2\alpha^3) & 3\alpha^2 - 2\alpha + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)(\alpha^2 - \alpha^3) \\ 6(\beta - \beta^2) - (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)(3\beta^2 - 2\beta^3) & 3\beta^2 - 2\beta + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)(\beta^2 - \beta^3) \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 6(\alpha - \alpha^2) + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)(1 - 3\alpha^2 + 2\alpha^3) & 4\alpha - 3\alpha^2 - 1 + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)\alpha(1 - \alpha)^2 \\ 6(\beta - \beta^2) + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)(1 - 3\beta^2 + 2\beta^3) & 4\beta - 3\beta^2 - 1 + (\lambda h + \frac{1}{2} \mu^2 h + \mu \sqrt{h} rd)\beta(1 - \beta)^2 \end{bmatrix}$$

يمكن إعادة كتابة العلاقة (18) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} S_{k+1} \\ h S'_{k+1} \end{bmatrix} = R(g, \alpha) \begin{bmatrix} S_k \\ dh S'_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

حيث

$$R(g, \alpha) = M^{-1}G = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{g(2\alpha^2 - \alpha - 1) - 6\alpha}{\alpha^2 g^2 + 2(\alpha + \alpha^2)g - 6\alpha} & \frac{1 - \alpha(3 - g) + g\alpha^2}{\alpha^2 g^2 + 2(\alpha + \alpha^2)g - 6\alpha} \\ \hline \frac{g^2(2\alpha^2 - \alpha - 1) - 6g\alpha}{\alpha^2 g^2 + 2(\alpha + \alpha^2)g - 6\alpha} & \frac{g(1 - 3\alpha - g\alpha + g\alpha^2)}{\alpha^2 g^2 + 2(\alpha + \alpha^2)g - 6\alpha} \end{array} \right]$$

و كذلك

$$g = (\lambda h + \frac{1}{2} h \mu^2 + \mu \sqrt{h} . rd)$$

حيث

$$E[dW_k] = 0, E[dW_k^2] = h, E[rd] = 1, E[g^2] = (\lambda^2 h^2 + \frac{1}{4} h^2 \mu^4 + \mu^2 h)$$

وباستخدام مفهوم التوقع بمتوسط المربعات نحصل من المنظومة (19) على العلاقة التكرارية:

$$\bar{Y}_{k+1} = E[R^2(g, \alpha)] \bar{Y}_k \quad (20)$$

حيث

$$\bar{Y}_{k+1} = \begin{bmatrix} E[S_{k+1}^2] \\ E[h S_{k+1}^2] \end{bmatrix}, \bar{Y}_k = \begin{bmatrix} E[S_k^2] \\ E[h S_k^2] \end{bmatrix}$$

تسمى الدالة  $\bar{R}(h, \lambda, \mu, \alpha) = E[R^2(g, \alpha)]$  بدالة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة العددية.

**تعريف (3) [11]:** يقال عن طريقة عددية لها صياغة تكرارية من النمط (20) إنها مستقرة بمتوسط المربعات إذا كان نصف القطر الطيفي لمصفوفة الاستقرار يحقق  $\rho(\bar{R}(h, \lambda, \mu, \alpha)) < 1$ ، حيث  $\rho$  يساوي أكبر القيم المميزة للمصفوفة  $\bar{R}(h, \lambda, \mu, \alpha)$  بالقيمة المطلقة.

**نتيجة (1):** تكون الطريقة العددية المعرفة بالعلاقة التكرارية (20) مستقرة بمتوسط المربعات إذا كان لأجل

$$\Re(\lambda) < 0 \text{ و } \alpha, h \in (0, 1), \text{ حيث يتحقق لدينا دائماً } \rho(\bar{R}(h, \lambda, \mu, \alpha)) < 1.$$

وإذا أخذنا القيم المعيارية  $h = 0.99, \lambda = -2, \mu = 2$  ولأجل قيم مختلفة لوسيط الاستقرار  $\alpha$  سنحصل على قيم نصف القطر الطيفي لمصفوفة الاستقرار موضحة في الجدول (2).

**الجدول (2):** قيم النصف القطر الطيفي لمصفوفة استقرار المنظومة التكرارية للطريقة  $\rho(\bar{R}(h, \lambda, \mu, \alpha))$

$\alpha = 0.55$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.999$
0.96	0.821605	0.596181	0.420405	0.279503	0.219039	0.165084

نستنتج بحسب التعريف (3) أن الطريقة المقترحة مستقرة .

**ملاحظة:**

تشير نتائج الجدول (2) إلى توقع الحصول على مساحات كبيرة من الاستقرار بمتوسط المربعات عندما تزداد قيم وسيط الاستقرار  $\alpha$  باتجاه الواحد.

### تحديد مناطق الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة:

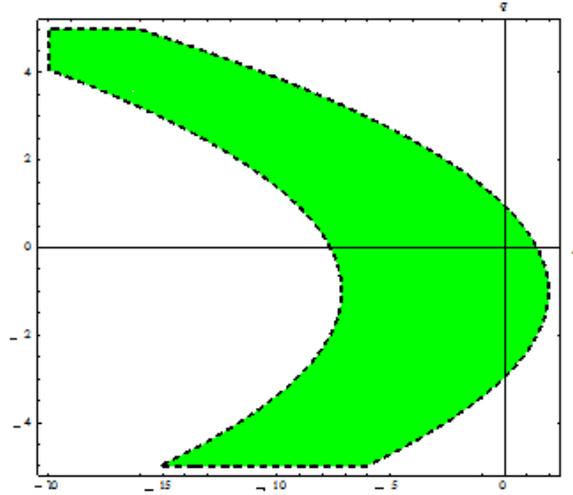
#### Mean-Square Stability Regions of Method

تستخدم دالة الاستقرار بمتوسط المربعات  $\bar{R}(h, \lambda, \mu, \alpha)$  في تحديد منطقة الاستقرار للطريقة الشرائحية وفق قيم المتحولين الحقيقيين  $p = h\lambda =, q = \mu\sqrt{h}$  وهي المنطقة من المستوي  $0pq$  التي ترسمها دالة الاستقرار بمتوسط المربعات التي تحقق المتراحة:

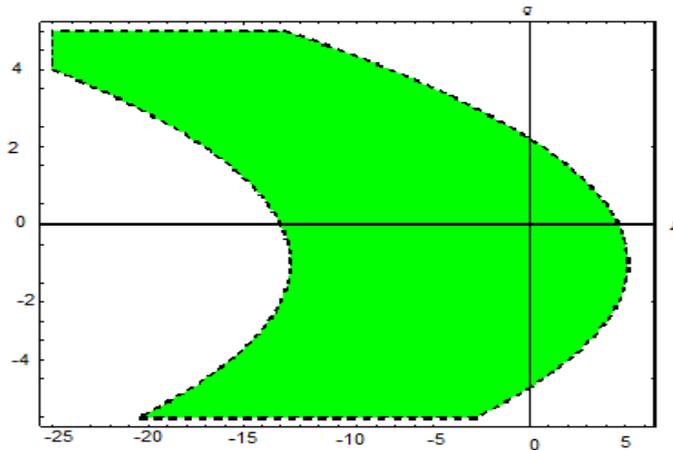
$$\Omega(p, q) = ||R(h, \lambda, \mu, \alpha)|| < 1$$

عندما تتحول  $-\infty < p < \infty, -\infty < q < \infty$ .

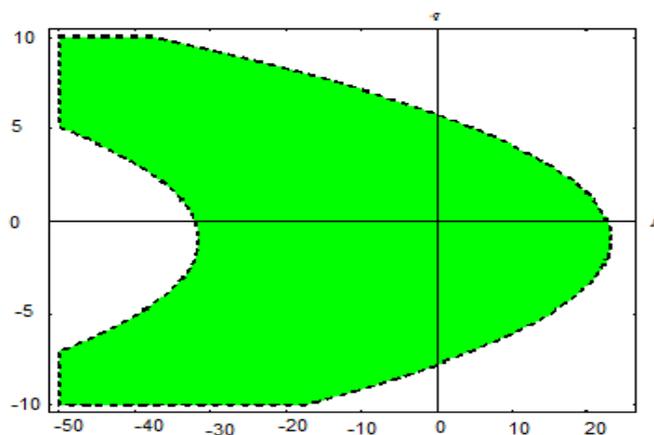
نحدد في الأشكال (2)-(5) مناطق الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة المقترحة وهي المناطق الهلالية المظلمة باللون الأخضر، وتستحوذ هذه المناطق على أجزاء كبيرة من الجزء الأيسر السالب من المستوي، وهذا ما يؤكد وجود الاستقرار واتساع مساحته عندما تزداد قيم وسيط الاستقرار  $\alpha$  باتجاه الواحد.



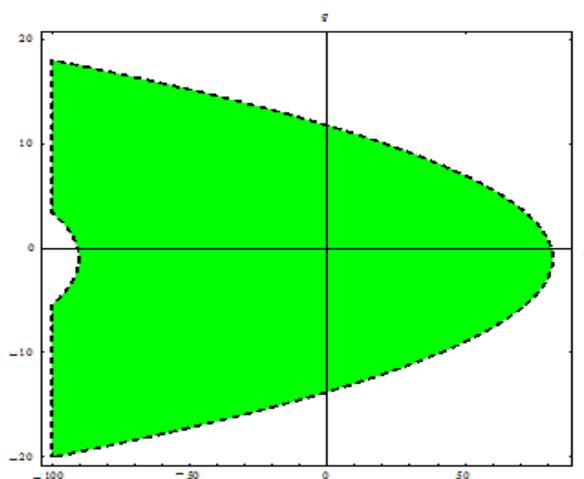
الشكل (2): منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة المقترحة لأجل  $\alpha = 0.55$  وهي المنطقة المظلمة.



الشكل (3): منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة المقترحة لأجل  $\alpha = 0.8$  وهي المنطقة المظلمة.



الشكل(4): منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة المقترحة لأجل  $\alpha = 0.9$  وهي المنطقة المظللة .



الشكل(5): منطقة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة المقترحة لأجل  $\alpha = 0.999$  وهي المنطقة المظللة .

### تقدير الخطأ للطريقة Error Estimation for Method

تعريف(4) [6]: يقال عن طريقة عددية إنها تملك تقارب قوي من مرتبة تساوي  $p$  إذا وجد ثابت  $C$  بحيث يتحقق لدينا:

$$E | X_n - X(\tau) | \leq C h^p$$

لأجل أي نقطة مثبتة  $\tau = nh \in [0, T]$  و  $h > 0$  طول الخطوة مقدار صغير كفاية

بفرض أن  $X(t) \in C^4[0, T]$  وأن  $H_k(t)$  هو تقريب هرميت المعطى بالعلاقة (5). وبفرض أن

$|H_k(t_n) - X(t_n)|$  يرمز إلى الخطأ الشامل الحاصل عند نهاية المجال  $[0, T]$ . نحصل على صيغة الخطأ

المقتطع الموضعي للطريقة المقترحة من المنظومة (13) كالآتي:

$$Er_k = \begin{bmatrix} X(t_{k+1}) \\ h X'(t_{k+1}) \end{bmatrix} - A^{-1} B \begin{bmatrix} X(t_k) \\ h X'(t_k) \end{bmatrix} - h A^{-1} \begin{bmatrix} X'(t_{k+\alpha}) \\ X'(t_{k+\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{72} h^4 (2\alpha - 1) f^{(4)}(t_k) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

حيث  $B, A$  هي المصفوفات (14)،(15) و  $\alpha \in (0,1)$  وسيط الاستقرار .

نلاحظ من العلاقة (21) أن الخطأ الموضعي عند الخطوة  $k$  من المرتبة الرابعة للطريقة المقترحة المطبقة لنموذج الاختبار، و يقدر الخطأ الشامل عند نهاية مجال الحل  $[0,T]$  بعد  $n$  خطوة كآآتي :

$$Error = n . O(h^4) = \frac{T}{h} O(h^4) \equiv O(h^3)$$

**نتيجة 2:** نستنتج بحسب التعريف(4) أن الطريقة المقترحة تكون متقاربة من المرتبة الثالثة.

### المحاكاة العددية: Numerical Simulation

يتم اختبار فعالية الطريقة المقترحة بتطبيقها لحل ثلاث نماذج اختبار في المعادلة التفاضلية العشوائية، لها حلول تحليلية ، بهدف توضيح الدقة العددية للطريقة من خلال مقارنتها مع بعض طرائق الأخرى المحلولة في مراجع مختلفة [3,4,7]، كما تم إعداد البرامج المطلوبة باستخدام لغة البرمجة Mathematica11.

**المسألة 1: [7]** لنأخذ في اختبارنا الأول المعادلة التفاضلية العشوائية غير الخطية الآتية:

$$dX(t) = -(a + b^2 X(t))(a + b^2 X(t))dt + \mu X(t) dW(t)$$

لأجل  $t \in [0,1]$  وتخضع للشرط الابتدائي

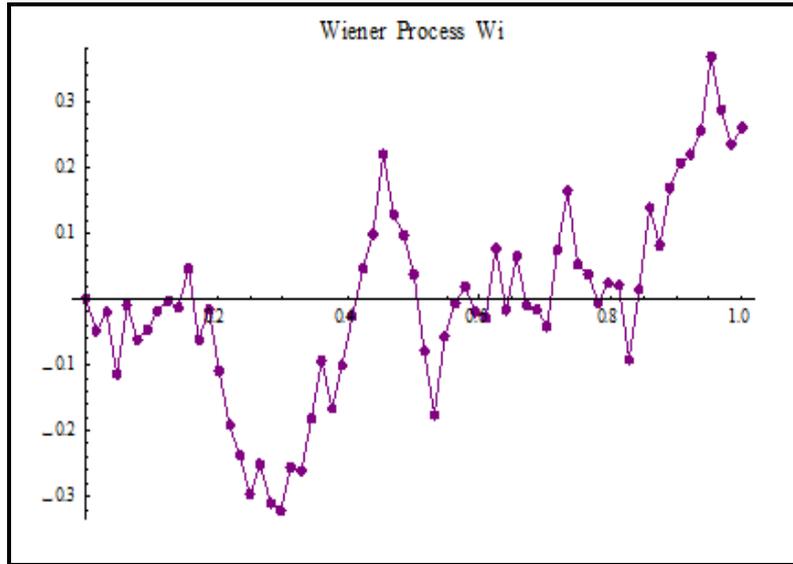
$$X_0 = -2$$

حيث أن  $a, b$  ثابتان حقيقيان، وتملك الحل التحليلي:

$$X(t) = \frac{(1 + X_0) \exp(-2at + 2b W(t)) + X_0 - 1}{(1 + X_0) \exp(-2at + 2b W(t)) - X_0 + 1}$$

نحل المسألة بوضع  $a = 0.0002, b = 0.0001$ ، ومحاكاة عملية وينر المنفصلة في المجال  $[0,1]$ ، من أجل  $n=2^6$ ، ونرسم المسار في الشكل(6). ندرج في الجداول(3) المتوسط والوسط والتباين لعملية وينر بخطوة زمنية  $dt=1/64$ . نضع في الجداول(4)-(6) نتائج الحل الشرائحي مع الحل التحليلي ومتوسطات الأخطاء المطلقة لطريقتنا والمقارنة مع نتائج طريقة الخطوة الواحدة المعدلة عن طريقة مليستين في المرجع [7].

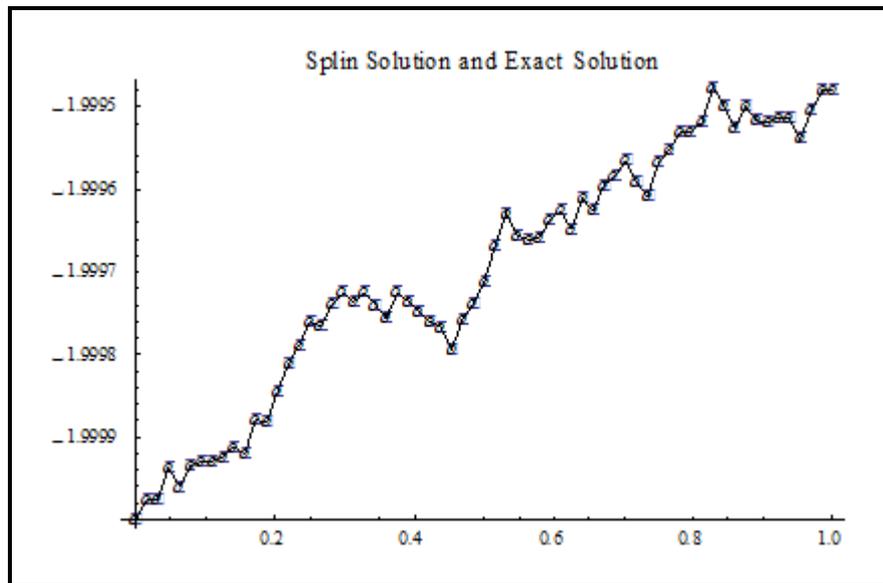
نرسم في الشكلين(7)-(8) الحل الشرائحي والحل الدقيق والأخطاء المطلقة في الحل الشرائحي لطريقتنا المقترحة.



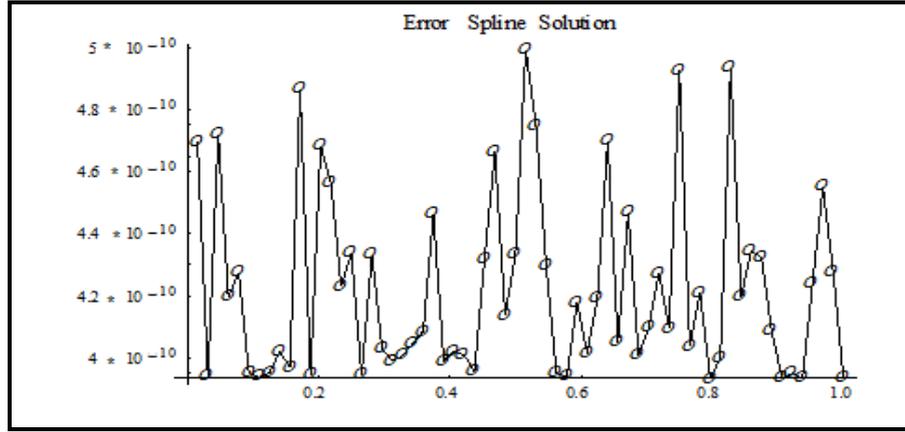
الشكل(6): محاكاة عملية وينر العشوائية في المجال الزمني [0,1] لأجل  $n=64$  نقطة.

الجدول(3): قيم وسطاء عملية وينر المولدة في الشكل(6) باستخدام  $n=64$ ، وخطوة زمنية  $dt=1/64$

متباين قيم وينر Variance[ $W_i$ ]	الانحراف المعياري Standard Deviation [ $W_i$ ]	الوسط لقيم وينر Median[ $W_i$ ]	متوسط قيم وينر Mean[ $W_i$ ]
0.0224684	0.149895	0.00904949	0.00466808



الشكل(7): الحل الشرائحي مع الحل التحليلي للمسألة 1 في المجال [0,1] لأجل  $n=64$  نقطة.



الشكل(8): الخطأ المطلق في الحل الشرائحي للمسألة 1 لأجل  $n=64$ .

الجدول 4: نعرض نتائج حل المسألة 1 بطريقتنا والمقارنة مع طريقة الخطوة الواحدة [7] بخطوة  $h=2^{-4}$

$t_i$	الحل الدقيق	الخطأ المطلق بطريقة [7]EMM	الحل بطريقتنا	الخطأ المطلق بطريقتنا
0.0625	-2.0000277443848202	3.12414317 E-9	-2.000027748117871	1.89988 E-9
0.125	-1.9999360890728353	2.08835040E-8	-1.999936093174005	1.78823 E-9
0.1875	-1.999836029094669	1.91806975E-8	-1.999836033372113	1.58081 E-9
0.25	-1.9997877038463776	1.61285976E-8	-1.999787707274145	1.63232 E-9
0.3125	-1.9998146998330404	3.61796346E-8	-1.999814703043492	1.75441 E-9
0.375	-1.9998373083295766	3.52270857E-8	-1.999837311519675	1.59069 E-9
0.4375	-1.999815684271836	3.27442917E-8	-1.999815687484390	1.5872 E-9
0.5	-1.9997567692409932	5.20227794E-8	-1.999756772796070	1.84285 E-9
0.5625	-1.9996748418929904	4.85903735E-8	-1.999674845807020	2.11307 E-9
0.625	-1.9996469660592429	4.50562045E-8	-1.999646969307648	2.13207 E-9

الجدول 5: نعرض نتائج حل المسألة 1 بطريقتنا والمقارنة مع طريقة الخطوة الواحدة [7] بخطوة  $h=2^{-6}$

$t_i$	الحل الدقيق	الخطأ المطلق بطريقة [7]EMM	الحل بطريقتنا	الخطأ المطلق بطريقتنا
0.0625	-1.999866404884171	3.12414317 E-9	-1.999866405789353	4.525909 E-10
0.125	-1.999875734439753	2.08835040E-8	-1.999875735227204	3.937254 E-10
0.1875	-1.999838385221519	1.91806975E-8	-1.999838386172683	4.7558201 E-10
0.25	-1.999870883003815	1.61285976E-8	-1.99987088383294	4.1456305 E-10
0.3125	-1.999903715690158	3.61796346E-8	-1.999903716518853	4.1434744 E-10
0.375	-1.999892596861987	3.52270857E-8	-1.999892597667925	4.0296899 E-10
0.4375	-1.999876778963509	3.27442917E-8	-1.999876779965255	5.0087312 E-10
0.5	-1.99984219454080	5.20227794E-8	-1.999842195387662	4.2342129 E-10
0.5625	-1.999680807225948	4.85903735E-8	-1.999680808180111	4.7708137 E-10
0.625	-1.999628108937668	4.50562045E-8	-1.99962810980079	4.3156145 E-10

الجدول 6: مقارنة متوسط الأخطاء المطلقة في حل المسألة 1 بين طريقتنا وطريقة الخطوة الواحدة [7]

H	متوسط الخطأ المطلق بطريقة الخطوة الواحدة [7]	متوسط الخطأ المطلق بطريقتنا
$2^{-4}$	2.27371783E-08	1.68767342897 E-09
$2^{-5}$	2.27371783E-08	9.43567657812 E-10
$2^{-6}$	1.68052428E-08	4.78960898798 E-10
$2^{-7}$	8.34318274E-09	1.32445367609 E-10
$2^{-8}$	2.84343511E-09	7.09878657451 E-11
$2^{-9}$	1.43084080E-09	4.65489221975 E-11

**المسألة 2:** لنأخذ مسألتنا الثانية غير الخطية مكتوبة وفق صيغة ايتو [3] كالآتي:

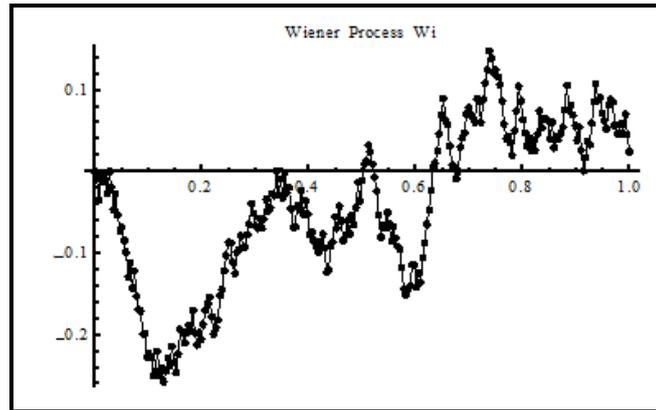
$$dX(t) = \left[ \frac{2}{5} X^{3/5}(t) + 5X^{4/5}(t) \right] dt + X^{4/5}(t) dW(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$X(0) = 1$$

تملك هذه المسألة الحل التحليلي:

$$X(t) = \left[ 1 + t + \frac{1}{5} W(t) \right]^5$$

نحل هذه المسألة باستخدام نقاط تجزئة مختلفة  $n = 2^7, 2^8, \dots, 2^{13}$  لأجل المقارنات وإظهار الدقة العددية، ونرسم في الشكل (9) مسار عملية وينر من أجل  $n=2^8$  المنفصلة في المجال  $[0,1]$ ، ونحسب في الجدول (7) المتوسط والوسيط والتباين والانحراف المعياري لهذه العملية العشوائية. ندرج في الجدول (8) مقارنات الأخطاء المطلقة بمتوسط المربعات للطريقة المقترحة ولطريقتي أولر مارياما، وميلستين المعدلتين [3]. نرسم في الشكل (10) الحل الشرائحي والحل الدقيق لأجل  $n=256$ ، ونرسم في الشكلين (11) محاكاة عددية بالطريقة المقترحة لعدد من الحلول التراكمية لأجل  $n=128$ . كما ونرسم في الشكل (12) حلول تحليلية متراكمة لأجل  $n=128$ .



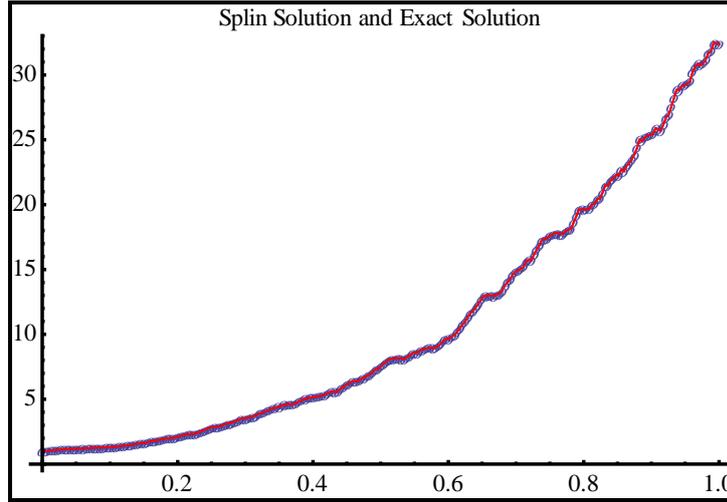
الشكل (9): حساب عملية وينر العشوائية في المجال الزمني  $[0,1]$  لأجل  $n=256$  نقطة.

الجدول (7): قيم وسطاء عملية وينر المرسومة في الشكل (9).

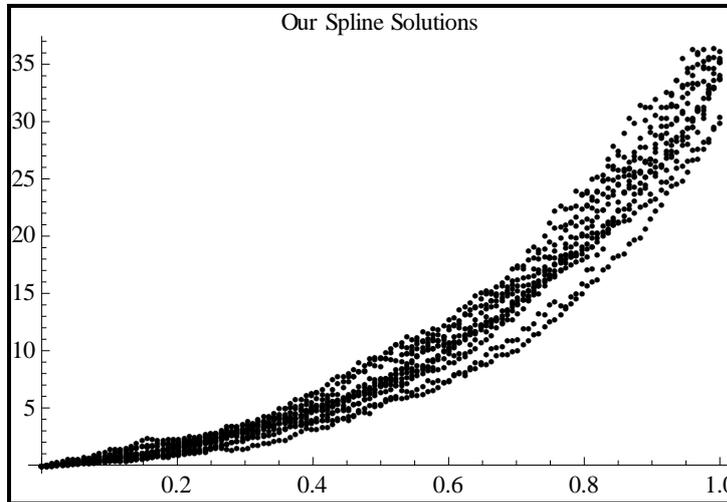
متوسط قيم وينر Mean[ $W_i$ ]	الوسيط لقيم وينر Median[ $W_i$ ]	الانحراف المعياري Standard Deviation [ $W_i$ ]	تباين قيم وينر Variance[ $W_i$ ]
0.00893186	0.0945085	0.0894742	0.0975849

الجدول 8: مقارنات الأخطاء المطلقة بمتوسط المربعات في المسألة 2 بين طريقتنا وطريقتي أولر مارياما ومليستين المعدلتين [3]

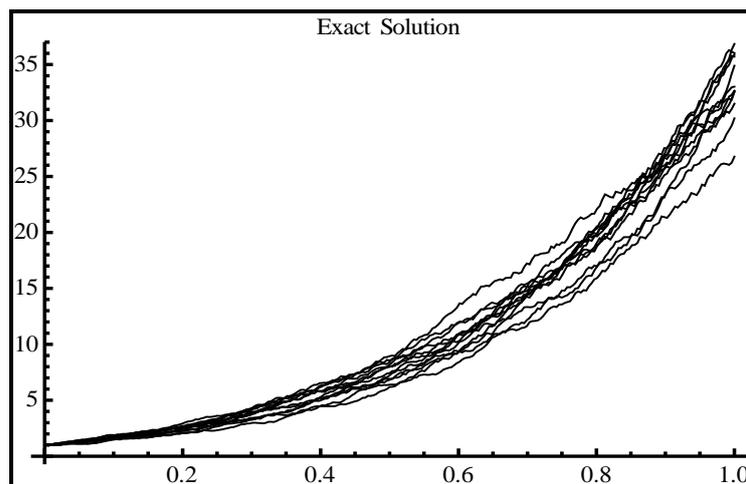
N	طريقة مليستين المعدلة [3]	طريقة أولر مارياما المعدلة [3]	طريقتنا المقترحة
$2^9$	8.26 E-02	1.80 E-01	2.243905 E-05
$2^{10}$	2.04 E-02	7.01 E-02	8.126849 E-06
$2^{11}$	5.30 E-03	2.98 E-02	4.984261 E-06
$2^{12}$	1.30 E-03	1.40 E-02	1.000234 E-06
$2^{13}$	3.34 E-04	6.80 E-03	6.124567 E-07



الشكل (10): الحل الشرائحي مع التحليلي للمسألة 2 في المجال الزمني [0,1] لأجل  $n=256$  نقطة.



الشكل (11): محاكاة حل المسألة 2 بحلول شرائحية متراكمة في المجال الزمني [0,1] لأجل  $n=128$  نقطة.



الشكل (12): حلول تحليلية متراكمة للمسألة 2 في المجال الزمني [0,1] لأجل n=128 نقطة.

**المسألة 3:** لنأخذ المسألة القياسية الخطية [4] كالآتي:

$$dX(t) = aX(t) dt + X(t) dW(t) , \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$X(0) = 1$$

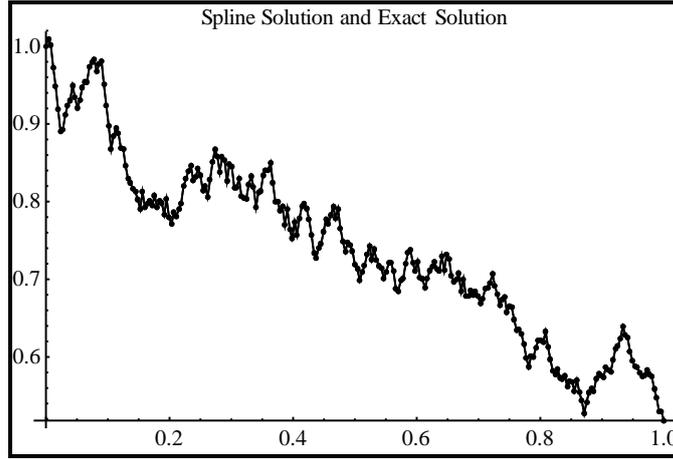
مع الحل التحليلي:

$$X(t) = X(0) \text{Exp}[(a - \frac{1}{2}b^2)t + bW(t)]$$

تم حل المسألة باستخدام نقاط تجزئة مختلفة  $n = 2^5, 2^6, \dots, 2^9$  لإظهار الدقة العددية. ندرج في الجدول (9) مقارنات الأخطاء المطلقة بمتوسط المربعات بين الطريقة الشرائحية المقترحة وطريقة SS  $\theta$  [4]، وطريقة SSAMM [4]، وطريقة DSS  $\theta$  M [4]، ونرسم في الشكل (13) الحل الشرائحي والحل الدقيق لأجل n=256.

الجدول 9: مقارنات الأخطاء المطلقة بمتوسط المربعات للمسألة 3 بين طريقتنا ومجموعة من الطرائق [4]

H	طريقة SS $\theta$ [4]	طريقة SSAMM [4]	طريقة DSS $\theta$ M [4]	طريقتنا المقترحة
$2^{-5}$	7.03 E-03	1.40 E-03	3.50 E-04	8.26396 E-05
$2^{-6}$	3.11 E-03	6.60 E-03	8.02 E-05	9.35684 E-06
$2^{-7}$	1.55 E-03	3.20 E-03	1.83 E-05	2.97258 E-06
$2^{-8}$	7.40 E-04	1.60 E-03	4.58 E-06	7.63351 E-07
$2^{-9}$	3.64 E-04	8.00 E-04	1.23 E-06	3.124567 E-07



الشكل(13): الحل الشرائحي مع الحل الدقيق للمسألة3 في المجال الزمني [0,1] لأجل  $n=256$  نقطة.

### الاستنتاجات والتوصيات:

قدمنا في هذا الدراسة محاكاة منفصل لعميلة وينر العشوائية وتم استخدامها مع الطريقة العددية المقترحة لمحاكاة الحلول لبعض النماذج من المعادلات التفاضلية العشوائية الخطية وغير الخطية. تم إنشاء الطريقة باستخدام تقريبات هرميت في الفضاء  $C^1$  (فضاء الدوال المستمرة هي ومشتقاتها من المرتبة الأولى) مع نقطتي تجميع، وقد أظهرت الرسومات والأشكال (6)-(13) نجاح الطريقة المقترحة في تقليد الحل التحليلي للنماذج المختبرة ومطابقتها إلى حد كبير، وكذلك تشير النتائج والمقارنات في الجداول (4)-(8) إلى أن الطريقة المقترحة كانت أكثر دقة من طريقة الخطوة الواحدة [7]، طريقتي أولر مارياما، وميلستين المعدلتين [3]، وطرائق  $DSS \theta M$ ،  $SSAMM$ ،  $SS \theta$  في [4].

البرنامج باستخدام لغة Mathematica11 للطريقة الشرائحية مطبقة لحل المسألة الأولى:

```
Clear[f, X, x, T, W, t, c1, c, r, n, Spl, z, a, b, cc, dW];
n = 2^8; T = 1.0; dt = (T)/(n); h = dt; W[0] = 0;
dW[1] = Sqrt[dt]*RandomReal[{-1, 1}];
W[1] = W[0] + dW[1];
For[i = 2, i <= n, dW[i] = Sqrt[dt]*RandomReal[{-1, 1}];
W[i] = W[i - 1] + dW[i]; i++]
T = 1.0; dt = (T)/(n); X0 = -2.0;
X[0] = X0; elfa = 0.0002; bet = 0.0001;
For[i = 1, i <= n, X[i] = ((1 + X0) Exp[-2 i *dt*elfa + 2 bet*W[i]] +
X0 - 1)/((1 + X0) Exp[-2 i *dt*elfa + 2 bet*W[i]] - X0 + 1);
i++]
ListPlot[Table[{i dt, W[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All,
PlotLabel -> "Wiener Process Wi", PlotStyle -> {Purple, PointSize[0.015]}]
c[1] = -0.1; c[2] = 0.3; s0 = X0;
s1 = -(elfa + bet^2 s0)*(1 - s0^2) + bet*(1 - s0^2)*(W[r] - W[r - 1])/dt;
s1 = dt*s1;
c1 = 0.49;
z[1] = c1; z[2] = 1; zz[1] = 1 - c1; zz[2] = 0;
Off[LinearSolve::luc];
For [r = 1, r <= n, itr = 1; c[1] = -0.1; c[2] = 0.3;
While[itr < 7,
```

```

For [i = 1, i <= 2, i++,
    x = z[i]*dt;
    t = x + dt*(r - 1);
    spX = zz[i]^2*(1 + 2*z[i])*s0 + z[i]*zz[i]^2*s1 + z[i]^2*(1 + 2*zz[i])*c[1] - z[i]^2*zz[i]*h*c[2];
    spX1 = (-6*zz[i] + 6*zz[i]*zz[i])*s0/h + (3*zz[i]^2 - 2*zz[i])*s1/h +
        (6*z[i] - 6*z[i]*z[i])*c[1]/h + (3*z[i]^2 - 2*z[i])*h*c[2]/h;
    f[i] = -(spX1 + (elfa + bet^2 spX) (1 - spX^2) - bet (1 - spX^2) (W[r] - W[r - 1])/dt);
    ja[i, 1] = (6*z[i] - 6*z[i]*z[i])/h - 2*spX (elfa + bet^2 spX) z[i]^2*(1 + 2*zz[i]) +
        bet^2 (1 - spX^2)*z[i]^2*(1 + 2*zz[i]) + 2*bet (z[i]^2*(1 + 2*zz[i])*spX) (W[r] - W[r - 1])/dt;
    ja[i, 2] = (3*z[i]^2 - 2*z[i])/h - 2*spX (elfa + bet^2 spX)*(-z[i]^2*zz[i]) +
        bet^2 (1 - spX^2)*(-z[i]^2*zz[i]) + 2*bet (-z[i]^2*zz[i])*spX (W[r] - W[r - 1])/dt;
];
cc = LinearSolve[{ {ja[1, 1], ja[1, 2]}, {ja[2, 1], ja[2, 2]} }, {f[1], f[2]}];
c[1] = c[1] + cc[[1]]; c[2] = c[2] + cc[[2]];
itr++;
x = z[2]*dt; i = 2;
pl[r] = zz[i]^2*(1 + 2*z[i])*s0 + z[i]*zz[i]^2*s1 + z[i]^2*(1 + 2*zz[i])*c[1] - z[i]^2*zz[i]*h*c[2];
spl1[r] = (-6*zz[i] + 6*zz[i]*zz[i])*s0/h + (3*zz[i]^2 - 2*zz[i])*
    s1/h + (6*z[i] - 6*z[i]*z[i])*c[1]/h + (3*z[i]^2 - 2*z[i])*h*c[2]/h;
t = x + dt*(r - 1); s0 = X[r];
s1 = -(elfa + bet^2 s0)*(1 - s0^2) + bet*(1 - s0^2)*(W[r] - W[r - 1])/dt; s1 = (X[r + 1] - X[r])/dt;
s1 = dt*s1;
r++;
spl[0] = X0;
AproxSp = ListPlot[Table[{i dt, spl[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True,
    Mesh -> All, PlotMarkers -> {"*"}, PlotLabel -> "Spline Solution "]
Exact = ListPlot[Table[{i dt, X[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All, PlotMarkers -> {"o"},
    PlotStyle -> {Black, PointSize[.01]}, PlotLabel -> "Exact Solution"]
Show[AproxSp, Exact, PlotLabel -> "Splin Solution and Exact Solution"]
For[r = 0, r < n, t = dt*r; Print["t", r, "=", t, " ***Error= ", err[r] = Abs[0.5 (spl[r] - X[r])],
    " Sp(", t, ")=", spl[r], " Exact Xt=", X[r]], r+++]
ListPlot[Table[{i dt, err[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All, PlotMarkers -> {"O"},
    PlotStyle -> {Black, PointSize[.02]}, PlotLabel -> "Error Spline Solution"]

```

## المراجع:

1. AZADFAR H., P. NABATI, New truncated Milstein approximation of solution of stochastic differential equations, Communications on Advanced Computational Science with Applications 2018 No.1 (2018) pp.15-25.
2. BASTANI A. F., HOSSEINI S. M. A new adaptive Runge–Kutta method for stochastic differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 206 (2007) 631 – 644.
3. BAYRAM M., T. PARTAL and G. O. BUYUKOZ (2018), Numerical methods for simulation of stochastic differential equations, Springer, Advances in Difference Equations 2018:17.
4. EISSA M. A., ZHANG H., and Y. XIAO, Mean-Square Stability of Split-Step Theta Milstein Methods for Stochastic Differential Equations, Hindawi, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2018, Article ID 1682513, 13 pages.
5. FAMELIS Th., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Additive Noise by Runge–Kutta Methods, Journal of Numerical Analysis, vol. 4, no. 3-4, 2009, pp. 171-180.

6. HAGHIGHI A. & A. RÖBLER, Split-Step Double Balanced Approximation Methods For Stiff Stochastic Differential Equations, International Journal of Computer Mathematics, **2018**, pp.1-19.
7. KHODABIN M. , K. MALEKNEJAD, M. ROSTAMI, M. NOURI, Numerical solution of stochastic differential equations by second order Runge–Kutta methods, Mathematical and Computer Modelling 53 (2011) 1910–1920.
8. MAHMOUD S. M. and AHMAD Al-Wassouf, Numerical Simulation Stochastic of Differential Equations by Using Spline Function Approximations, Tishreen University Journal Research-Basic Science Series Vol. (38), No (6), **2016**.
9. MAHMOUD S. M., Quintic  $C^2$ - Spline Collocation Methods for Solving Initial Value Problems in Higher Index Differential-Algebraic Equations. Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (32) No (2) **2010**.
10. MAHMOUD S. M., OSMAN, M. Sh., AL KABATH, A.,  $C^3$ -Seventh Spline Methods with Four Collocation Points for Solving Linear Third-Order Boundary Value Problems, Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series Vol. (30) No (1) 2008.
11. TOCINO A., SENOSIAIN M.J., Asymptotic mean-square stability of two-step Maruyama schemes for stochastic differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 260 (2014) 337–348.
12. WANG P., Three-stage stochastic Runge-Kutta methods for Stochastic Differential Equations, journal of computational and Applied Mathematics, 222 (2008), pp.324-332.
13. XIAO Y., L. ZHANG & Y. FANG, Numerical solution stability of general stochastic differential equation, Journal of Interdisciplinary Mathematics, Vol. 21 (2018), No. 6, pp. 1471–1479.
14. ZHU F., Z. HAN, J. ZHANG, Stability analysis of stochastic differential equations with Markovian switching, Systems & Control Letters 61 (2012) 1209–1214.
15. BURDEN, R. L. and J. D. FAIRES, Numerical Analysis, Ninth Edition, Brooks/Cole, Cengage Learning, Boston, USA (2011), 872 pages.