دراسة الاستقرار الديناميكي لقضيب رقيق

د. حسن محمد خليفة *

(تاريخ الإيداع 10 / 9 / 2019. قُبِل للنشر في 5 / 11 /2019)

ملخّص

ترتبط آلية فقد الاستقرار بإثارة موجات طولية دورية في القضيب، ناشئة عن التطبيق المفاجئ للحمل، الأمر الذي يؤدي بدوره إلى ظهور رنين بارامتري (صدى حدودي مستعرض).

ندرس التأثير الطولي على قضيب مرن رقيق، والذي يولد فيه نظامًا دوريًا للموجات الطولية. بالنسبة لقيم معينة لوسطاء المسألة في التقريب الخطي، تولد هذه الموجات رنيناً بارامترياً، مصحوباً بزيادة غير محدودة في سعة التذبذبات العرضية. للحصول على سعات محدودة، ندرس جملة شبه خطية تأخذ في الاعتبار تأثير التذبذبات العرضية على الطولية. تم في وقت سابق حل هذه الجملة عدديًا بواسطة طريقة Bubnov – Galerkin . هنا يتم بناء حل تحليلي تقريبي لهذه الجملة بالاعتماد على طريقة النشر بقياسين.

الكلمات المفتاحية: حمولة أويلر الحرجة، استقرار، مرن، اهتزاز ، توافقي.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

Hasan Khalifa60@yahoo.com

A study of thin rod dynamical stability

Dr. Hasan Mohammad Khalifeh*

(Received 10 / 9 / 2019. Accepted 5 / 11 /2019)

□ ABSTRACT □

The stability loss mechanism is associated with the excitation of periodic longitudinal waves in the rod, arising from the sudden application of a load, which, in turn, leads to transverse parametric resonances.
A longitudinal impact on a thin elastic rod, generating in it a periodic system of longitudinal waves, is considered. For certain values of the parameters of the problem in the linear approximation, these waves generate parametric resonances, accompanied by an unlimited increase in the amplitude of transverse oscillations. To obtain finite amplitudes, we consider a quasilinear system, which takes into account the influence of transverse oscillations on the longitudinal. Earlier, this system was numerically solved by the Bubnov – Galerkin method. Here an approximate analytical solution of this system, based on two-scale expansions, is constructed

Key Words: Euler critical load, stability, elastic, oscillation, resonance.

***Assistant Professor. Department of mathematics Faculty of science- University of Tishreen- Lattakia-Syria. Hasan Khalifa60@yahoo.com**

مقدمة:

عند الانضغاط التوازني لقضيب يمكن أن يفقد شكله المستقيم منتقلا إلى توازن مجاور، تعرف هذه المسألة بالمسألة الكلاسيكية لأويلر [1].

عند الإجهاد الديناميكي الطولاني تتعقد المسألة، وفي حالات متقدمة ينتشر في القضيب أمواج مرنة طولانية والتي بدورها يمكن أن تولد اهتزازات عرضانية قوية مرتبطة بالانحرافات الأولية في شكل القضيب المستقيم [2,3,4].

عند الإجهاد طويل الأمد أقل من إجهاد أويلر، وعند قيم معينة للوسطاء في التقريب الخطي يمكن أن يحدث الرنين البارامتري [5,6]. كما يمكن أن تزداد سعة الاهتزازات بشكل غير محدود. يؤدي إدخال القوى المرنة اللزجة إلى زيادة ملحوظة لسعة الاهتزازات. إن سبب زيادة السعة يتلخص في أنه من أجل تقريب خطي فإن الاهتزازات الطولية تولد اهتزازات عرضية، ولكن التأثير المعاكس للاهتزازات العرضية على الطولية لا يؤخذ بالحسبان. من أجل الحصول على قيم محدودة لسعة الاهتزازات العرضية في هذه المسائل ينبغي الانتقال إلى جملة معادلات شبه خطية تأخذ بالحسبان تأثير الاهتزازات العرضية على الطولية

أهمية البحث وأهدافه:

تملك القضبان الرقيقة أهمية كبيرة في المنشآت والهياكل الحديثة. يختلف سلوك هذه القضبان تحت تأثير قوة الضغط المحورية بحسب أطوال هذه القضبان. عندما تصل القوة إلى قيمة حرجة معينة يصبح الشكل المستقيم للقضيب غير مستقر ويبدأ القضيب بالانحناء (ما يعرف بظاهرة فقدان الاستقرار).

يتم دراسة الفقدان الديناميكي لاستقرار قضيب رقيق مع نهايات مدعومة بشكل محوري. تحت تأثير حمل طولي سلس في المرحلة الأولية من الحركة ، والتي تكون محدودة بطول المدى للموجة الطولية. يتم حل المشكلة في تقريب شبه خطي يبين مناطق عدم الاستقرار في مستوي الطول والجهد.

طرائق البحث ومواده:

يتم أولاً النظر في نموذج تقريبي يأخذ بعين الاعتبار تأثير الاهتزازات الطولية على الاهتزازات العرضية، دون إهمال تأثير الاهتزازات العرضية على الطولية (نموذج عارضة برنولي – اويلر) [7,8]. استخدمت طريقة النشر بقياسين [9,10] وطريقة تحليل فورييه وذلك لإيجاد طريقة لحل المسألة المدروسة.

1– جملة المعادلات شبه الخطية لحركة القضيب

ندرس في الحالة شبه الخطية ديناميكية قضيب رقيق مرن تحت تأثير قوة صدم طولية مطبقة على نهايته.

يتم عند إيجاد معادلات الحركة، بالإضافة إلى الحدود الخطية الاحتفاظ بالحدود غير الخطية الرئيسية والتي من خلالها يرتبط التشوه الطولي ε للضغط مع الإزاحات $u(x,t)$ ، $w(x,t)$ لمحور القضيب بالصيغة التقريبية:

$$-\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (1)$$

يمكن بالاستفادة من مبدأ Ostrograd- Hamilton (حيث يلعب حساب التغاير دور مهم في إيجاد معادلات الميكانيك وذلك اعتماداً على مفهوم الطاقة) مع فرضية المقاطع السطحية وإهمال قوى العطالة في الحركة الدورانية للمقطع [11]:

$$\delta A = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \qquad (2)$$

حيث Π, T الطاقتين الحركية والكامنة. δA العمل الجزئي للقوى الخارجية:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S (u^2 + w^2) dx$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left(ES\varepsilon^2 + EJw^2 \right) dx \qquad (3)$$

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \delta u(0,t) dt$$

الشكل(1) قضيب مضغوط طوله L

حيث $J.S, E, \rho$ كثافة مادة القضيب، معامل يونغ، مساحة وعزم المقطع العرضي، $P(t)$ قوة الضغط المحوري في النهاية $x = 0$. نفرض أنه في الاتجاه العرضي تثبت نهايتي القضيب مفصلياً، وفي الاتجاه الطولي يثبت الطرف الأيمن:

$$w = 0 \quad if \quad x = 0, L \ , \quad ES\, u(0,t) = -P(t), \quad u(L,t) = 0 \qquad (4)$$

بالانتقال إلى الوسطاء غير المقاسة (بدون أبعاد):

$$x = Lx_1 \ , \ t = \frac{L}{c} t_1 \quad , \quad \frac{E}{\rho} = c^2 \ ; u = Lu_1 \ , \ w = Lw_1 \ , P = ES\varepsilon \qquad (5)$$

هنا الدليل 1 يوافق طول القضيب وزمن انتقال الموجة الطولية في القضيب يساوي الواحد وc سرعة الصوت. سنهمل لاحقاً الدليل1.

نفاضل العلاقة (2) بـ u و w نحصل على جملة المعادلات المطلوبة والشروط الحدية في صيغة غير مقاسة:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(1 + \frac{\delta_u}{\omega_u} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0 \ \ ; \varepsilon = -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu^2 \left(1 + \frac{\delta_w}{\omega_w} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad (6)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\varepsilon_0(t) \ , u(l,t) = 0 \quad ; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \ x = 0,1$$

$$l = \frac{1}{\mu}, \quad \mu = \frac{r}{L} \quad , \quad J = Sr^2 \quad , \varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 f(t)$$

μ معامل سماكة القضيب، L طول القضيب، r نصف قطر عطالة المقطع العرضي. ونستخدم l وسيط كبير للطول (معامل الطول من أجل المسافات الكبيرة). إضافة إلى ذلك أدخل في المعادلات (6) الاحتكاك اللزج وفق نموذج Voigt–Sorokin [12]. $\delta w, \delta u$ معاملات ممانعة الاهتزازات الطولية والعرضية، ω_w, ω_u الترددات المميزة للاهتزازات. حيث نعتبر الشروط الابتدائية من أجل الإزاحات الطولية $u(x,t)$ صفرية. أما من أجل الإزاحات العرضية $w(x,t)$ فإن التلاشي صغير ولكن لا يساوي الصفر، لأنه في خلاف ذلك فإن إثارة الاهتزازات المستعرضة غير ممكن [13].

تعتبر المعادلات (6) الأساس في دراستنا، فيها: $\varepsilon_0(t)=\varepsilon_0 f(t)=\dfrac{P(t)}{ES}$ التشوه المعطى في الطرف الأيسر من القضيب. من أجل تأثير صدم قصير المدى لمدة τ يكون $f(t)=0$ من أجل $t>\tau$ وتأثير طويل المدى $f(t)=1$ تحت شرط $\varepsilon_0<\varepsilon_{ct}$ حيث $\varepsilon_{ct}=\mu^2\pi^2$ هو التشوه المقابل لقوة اويلر الحرجة للضغط الطولي. أما من أجل $\varepsilon_0>\varepsilon_{ct}$ فأن الانحرافات يمكن أن تكون كبيرة ودقة المعادلات (6) غير كافية [14].

الحل التقريبي لجملة المعادلات شبه الخطية:

أعطي الحل التقريبي لجملة المعادلات (6) في [15] بناءً على طريقة النشر ثنائي القياس المقترحة في [9] على الشكل:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{5}\varphi_k(t)\cos(v_k\pi x)\ ,\qquad w(x,t)=\sum_{m=1}^{5}T_m(t)\sin(m\pi x)\tag{7}$$

حيث الدوال $\varphi_k(t)\,,\,T_m(t)$ تحقق المعادلات:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2}+\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_k}=\varepsilon_0(t),\quad \frac{\partial^2T_m}{\partial t^2}+\frac{\partial\Pi}{\partial T_m}=0\ ;\ \ k,m=1,2,.....,5\\ \Pi(\varphi_k,T_m)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\varepsilon^2+\frac{1}{\ell^2}\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)^2\right)dx\end{gathered}\tag{8}$$

تم إيجاد الحل التقريبي للجملة (6) في العمل [16] من أجل حالات الطنين الرئيسية $2\omega_m\approx v_1$، لكن لم يؤخذ بعين الاعتبار التأثير المتبادل للاهتزازات العرضية وفي المجاميع الداخلة في المعادلة الثانية من (6) تم الاحتفاظ فقط بحد واحد من أجل n=m.

تأخذ جملة المعادلات (6) بعين الاعتبار ليس فقط تأثير الاهتزازات الطولية على العرضية ولكن أيضاً التأثير العكسي للاهتزازات العرضية على الطولية. نبحث عن حل الجملة (6) في شكل سلاسل فورييه.

$$u(x,t)=\varepsilon_0\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\cos(v_k\,x)\ ,\qquad w(x,t)=\varepsilon_0\sum_{m=1}^{\infty}T_m(t)\sin(m\pi x)\tag{9}$$

يبين العمل [12] أنه من أجل دراسة الصيغ الـ m للطنين في التقريب الصفري يكفي تقييد اختيار الدوال $\varphi_1(t)$ و $T_m(t)$. هذه الدوال تحقق جملة المعادلات التي نحصل عليها بضرب المعادلة الأولى من (6) بـ $\cos v_1 x$ والثانية بـ $\sin m\pi x$ ومن ثم المكاملة من أجل $0\le x\le 1$:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}+\left(1+\frac{\delta_u}{v_1}\frac{d}{dt}\right)\left(v_1^2\varphi_1-\varepsilon_0 D_m T_m^2\right)=2f(t)\quad ;\ D_m=\frac{m^2\pi^2\left(8m^2-1\right)}{16m^2-1}\\&\frac{d^2T_m}{dt^2}+\left(1+\frac{\delta_w}{\omega_m}\frac{d}{dt}\right)\omega_m^2T_m+\varepsilon_0^2\,\frac{3(m\pi)^4}{8}T_m^3-2\varepsilon_0T_mD_m\varphi_1=0\end{aligned}\tag{10}$$

من أجل $\varepsilon_0 <<1$ و $\delta_u,\delta_w <<1$ فإن الدوال المجهولة $\varphi_1(t)$ و $T_m(t)$ صغيرة وتصف الاهتزازات ذات السعات المتغيرة ببطء. لذلك وكما اقترح في العمل [16] ومن أجل بناء حل تقريبي للجملة (6) نستخدم طريقة النشر ثنائي القياس [5, 9]. وبالتالي نبحث عن هذه الدوال بالصيغة:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t)=\varphi_1^{(0)}(t,\theta)+\varepsilon_0\varphi_1^{(1)}(t,\theta)+..........\\&T_m=T_m^{(0)}(t,\theta)+\varepsilon_0T_1^{(1)}(t,\theta)+..........\end{aligned}\tag{11}$$

حيث نعبر عن الزمن البطيء بـ $\theta=\varepsilon_0 t$. يكون عندئذٍ في المعادلات (10) لدينا:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\theta}$$

نحل الجملة (10) بالمساواة بين المعاملات من أجل ε_0^n. عندئذٍ من أجل ε_0من الدرجة الأولى (التقريب الصفري) نحصل على المعادلات:

$$\frac{\partial^2\varphi_1^{(0)}}{\partial t^2}+v_1^2\varphi_1^{(0)}=0\quad ,\qquad \frac{\partial^2T_m^{(0)}}{\partial t^2}+\frac{v_1^2}{4}T_m^{(0)}=0\tag{12}$$

والتي نبحث عن حلها بالشكل:

$$\begin{aligned}&\varphi_1^{(0)}(t,\theta)=a_{1c}(\theta)\cos(v_1t)+a_{1s}(\theta)\sin(v_1t)\\&T_m^{(0)}(t,\theta)=b_{mc}(\theta)\cos(v_1t/2)+b_{ms}(\theta)\sin(v_1t/2)\end{aligned}\tag{12}$$

حيث الدوال $a_{1c}(\theta),\ a_{1s}(\theta),\ b_{mc}(\theta),b_{ms}(\theta)$ تحقق من أجل التقريب الأول (ε_0من الدرجة الثانية) جملة المعادلات:

$$\begin{aligned}&2v_1\frac{da_{1c}}{d\theta}+v_1^2\delta_{0u}a_{1c}+D_m\,b_{mc}b_{ms}=0\\&2v_1\frac{da_{1s}}{d\theta}+v_1^2\delta_{0u}a_{1s}-\frac{1}{2}D_m\left(b_{mc}^2-b_{ms}^2\right)=0\\&v_1\frac{db_{mc}}{d\theta}+\frac{v_1^2\delta_{0w}}{4}b_{mc}-db_{ms}+D_m\left(b_{mc}a_{1s}-b_{ms}a_{1c}\right)=0\\&v_1\frac{db_{ms}}{d\theta}+\frac{v_1^2\delta_{0w}}{4}b_{ms}+db_{mc}-D_m\left(b_{mc}a_{1c}+b_{ms}a_{1s}\right)=0\end{aligned}\tag{13}$$

حيث:

$$D_m=\frac{8m^4\pi^2}{16m^2-1}\ \text{،}\ \omega_m^2-\frac{v_1^2}{4}=\varepsilon_0 d\ \text{،}\ \delta_w=\varepsilon_0\delta_{0w}\ \text{،}\ \delta_u=\varepsilon_0\delta_{0u}$$

تبين جملة المعادلات (13) أنه في التقريب الصفري (والذي ستقتصر دراستنا عليه) فإن الدوال:

$$a_{kc}(\theta)=a_{kc}(0)e^{v_k\delta_{ou}\frac{\theta}{2}},\qquad a_{ks}(\theta)=a_{ks}(0)e^{v_k\delta_{ou}\frac{\theta}{2}}$$

حيث $k \ge 2$ لا تدخل في المعادلات الباقية. من أجل $\delta_u = 0$ فإن هذه الدوال ثابتة ومن أجل $\delta_u > 0$ تتخامد ببطء. وهكذا فإن المسألة تؤول إلى حل جملة المعادلات (13) بالنسبة لأربعة دوال مجهولة $a_{1c}(\theta),\ a_{1s}(\theta),\ b_{mc}(\theta), b_{ms}(\theta)$.

من أجل مكاملة المعادلات (13) يجب إعطاء شروط ابتدائية، نأخذها على النحو الآتي. نعتبر بدء الزمن في تلك اللحظة التي يتوقف فيها تأثير موجة الصدم، سنعتبر أنه في تلك اللحظة $\theta = 0$ والقيم الابتدائية $b_{mc}(0), b_{ms}(0)$ مهملة لصغرها. عندئذٍ يمكن حساب القيم الابتدائية $a_{1c}(0),\ a_{1s}(0)$ من المعادلات الخطية [6]. حيث إنه يمكن إهمال المقاومة بسبب صغر المجال $[0, \tau]$.

دون الإخلال بعمومية المسألة يمكن أن نفرض أن $a_{1s}(0) = 0$ عندئذٍ:

$$a_{1c} = a(\tau) \equiv \left[\varphi_1(\tau) + \left(\frac{\varphi_1'(\tau)}{v_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

حيث $\varphi_1(t)$ حل المعادلة الخطية و τ مدة الصدم [6].

من أجل التقريب الصفري فإننا نحصل من أول معادلتين في الجملة (13) على:

$$a_{1c}(\theta) = a e^{-\delta_{ou}\frac{\theta}{2}}, \quad a_{ks}(\theta) = 0$$

نحصل من المعادلتين الأخيرتين من أجل $\delta_{0u} = 0$ على:

$$b_{mc}(\theta) = b_{mc}^{o} e^{\lambda\theta}, \quad b_{ms}(\theta) = b_{ms}^{o} e^{\lambda\theta}$$

بالإضافة إلى أنه من أجل $\delta_{0w} = 0$ فإن λ تحقق المعادلة المميزة:

$$(v_1\lambda)^2 + d^2 - \left(\hat{C}_{1m} \frac{a}{2} \right)^2 = 0 \quad ; \quad \hat{C}_{1m} = \pi^2 m^2 \left(1 + \frac{1}{1 - 16m^2} \right)$$

يشير الجذر الموجب لهذه المعادلة إلى عدم الاستقرار ويحدد سرعة نمو الانحراف وفق الصيغة $w = w_0 \sin m\pi x$.

من أجل قيم صغيرة لـ ε_0 فإن منطقة عدم الاستقرار في المستوي (ℓ, ε_0) بالقرب من المحور ε_0 توصف بالمتراجحة:

$$|d| < \hat{C}_{1m} \frac{a}{2}$$

أو:

$$|\ell - \ell_m| < \ell_m k_1 \varepsilon_0 a, \quad k_1 = \frac{4\hat{C}_{1m}}{\pi} \cong 4m^2$$

بالأخذ بعين الاعتبار تخامد الاهتزازات العرضية $(\delta_{0w} > 0)$ تأخذ جذور المعادلة المميزة الشكل:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{2}{\pi} \sqrt{\left(C_{1m} \frac{a}{m} \right)^2 - d^2} - \frac{\pi \delta_{0w}}{8} \quad ; \quad C_{1m} = \frac{1}{1 - 16m^2} + 1$$

ومنطقة عدم الاستقرار لم تعد مجاورة للمحور ε_0 وتحدد من المتراجحة:

$$|\ell - \ell_m| < \ell_m \sqrt{(k_1 \varepsilon_0 a)^2 - \left(\frac{\delta_{0w}}{2} \right)^2}$$

بشرط أن ما تحت الجذر غير سالب.

الاستنتاجات والتوصيات:

في مسألة التأثير الطولي على قضيب في تقريب خطي ومن أجل بعض قيم وسطاء المسألة يمكن أن يتولد الطنين البارامتري، مرفقاً بزيادة غير محدودة في سعة الذبذبات العرضية. من أجل الحصول على سعات محدودة درسنا جملة شبه خطية تأخذ بعين الاعتبار تأثير الاهتزازات العرضية على الاهتزازات الطولية. تم بناء حل تحليلي تقريبي لهذه الجملة بالاعتماد على طريقة النشر بقياسين. تبين أنه في التقريب الصفري تؤول المسألة إلى حل جملة معادلات غير خطية من المرتبة الرابعة. من هذه الجملة حصلنا على عبارات واضحة من أجل مناطق عدم الاستقرار في مستوي (الطول والجهد) (ℓ, ε_0).

References:

1. Euler L A method of finding the curve lines with maximum or minimum properties. M .: Gostekhizdat, 1934.
2. Lavrentiev M.A., Ishlinsky A.Yu. Dynamic buckling forms for elastic systems // DAN SSSR, 1949. V. 5. No. 6
3. Bolotin V.V. Transverse vibrations and critical speeds. Ed. USSR Academy of Sciences. T. 1. 1951. T. 2. 1953.
4. Volmir A.S. Stability of compressed rods under dynamic loading // Builds. mechanics and calculation 1960. No. 1. S. 6–9
5. Morozov NF, Tovstik P. E Dynamic Loss of Stability of a Rod under Longitudinal Load Lower Than the Eulerian Load // Doklady AN. 2014.Vol. 453, No. 3. S. 282–285.
6. Loss of beam stability when applying a long-time load . Hasan khalifeh. Journal of Tishreen university, Vo (41). № (3) 2019
7. Volmir A.S. Stability of elastic systems. M .: GITTL, 1962.880 s.
8. Pankov Ya. G., Gubanova I.I. Stability and vibrations of elastic systems. M .: Nauka, 1987. 177 p.
9. Bogoliubov N.N., Mitropolsky Yu.A., Asymptotic Method in the Theory of Nonlinear Oscillations (Gordon and Breach, New York, 1961).
10. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. M .: Nauka, 1969.
11. Mkrtchyan K.Sh. on forced transverse vibrations of an elastic articulated rod considering rotational motion
// Izv. RAS. MTT. 2019.No 1. S. 141-153.
12. Palmov V.A. Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. M .: Nauka, 1976
13. Abrahamyan A.K., Indytsev D.A., Postnov V.A. fixity and flow of waves in Timoshenko beam. Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Solid mechanics. 2018. No 2. S. 101-109
14. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Again on the Ishlinskii-Lavrentyev Problem
// Dokl. AN 2014.V. 455. No. 4. P. 412–415
15. Morozov N.F., Tovstik P.E. The rod dynamics under longitudinal impact // Book of Abstract of the International Conference on Nonlinear Dynamics in Engineering: Modelling, Analysis and Applications / Eds. Ing J., Liu Y., Pavlovskaia E., Postnikov A., Wiercigroch M. 21–23 August 2013, Aberdeen, UK. p. 73.
16. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Bending in the longitudinal shock problems of a thin rod // Izv. RAS. MTT. 2015. No. 4. P. 112–125.