

خوارزمية شرائحية عددية لحل معادلة فوكنر - سكان

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور حسن خليفة**

مريم وسوف***

(تاريخ الإيداع 26 / 8 / 2019. قُبِلَ للنشر في 24 / 11 / 2019)

□ ملخص □

تقدم في هذه الدراسة خوارزمية شرائحية عددية لإيجاد حل لمعادلة فوكنر - سكان فوق مجال شبه لا نهائي، تقوم الخوارزمية على تغيير متحول المعادلة المذكورة من المجال شبه اللانهائي $[0, \infty[$ إلى المجال $[0, 1]$ ، ثم تحويل المسألة الحدية إلى مسألة قيم ابتدائية مع استخدام مسألة قيم ابتدائية أخرى لتحسين التقارب، ثم تطبيق كثيرات حدود شرائحية من الدرجة الثامنة مع أربع نقاط تجميع على المسألة مباشرة دون تخفيضها إلى جملة معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى.

تبين الدراسة أن الخوارزمية المقدمة تكون متناسقة ومتقاربة عندما يتم تطبيقها على المسألة بخطأ مقتطع شامل من المرتبة الثامنة. تم اختبار فعالية الخوارزمية الشرائحية المقترحة بحل مسائل بلاسيوس، هومان، هيمينز، بوهل هاوسن، وعدة مسائل اختبار لحالات خاصة أخرى فوق مجالات متنوعة، حيث تشير نتائج المقارنات العددية مع طرائق أخرى إلى فعالية و كفاءة الخوارزمية المقدمة وتمكنها من تقديم حلول ذات دقة عددية عالية.

الكلمات المفتاحية: معادلة فوكنر - سكان، كثيرات حدود شرائحية، مسائل قيم حدية غير خطية، مسألة بلاسيوس، الخطأ المقتطع الشامل، التناسق، التقارب.

* أستاذ - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية. E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com.

** أستاذ مساعد - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

E-mail: hasankhalifa@tishreen.edu.sy.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

E-mail: mariamwassoufms@gmail.com.

Numerical Spline Algorithm for Solving Falkner–Skan Equation

Dr. Suliman M Mahmoud*

Dr. Hasan Khalifa**

Mariam Wassouf***

(Received 26 / 8 / 2019. Accepted 24 / 11 / 2019)

□ ABSTRACT □

This paper presents a numerical spline algorithm for the Falkner–Skan equation (FSE) over a semi-infinite interval. This algorithm is based on change of variable from interval $[0, \infty[$ to $[0, 1]$, then the FSE is transformed into first initial value problem (IVP) and second IVP for improving convergence. Spline polynomials with four collocation points are applied directly to the IVPs without their reducing to a system of first-order differential equations. The study shows that purposed algorithm is consistent and convergent with a global truncation error from order eighth. The efficacy of our algorithm is tested by solving the problems of Blasius, Pohlhausen, Homann and Hiemenz flows, and other special cases over various intervals, where the results of comparisons with other methods indicate the efficiency of our algorithm and enable it to provide solutions with high numerical accuracy.

Keywords: Falkner–Skan Equation, Spline Polynomials, Nonlinear Boundary Value Problems, , Blasius Problem, Global Truncation Error, Consistence, Convergence.

* Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com.

** Professor, Department. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen University, Lattakia, Syria.

E-mail: hasankhalifa@tishreen.edu.sy

*** Postgraduate student, Department of Mathematics, Tishreen University, Lattakia, Syria.

E-mail: mariamwassoufms@gmail.com

مقدمة:

عندما تعقدت العلوم المختلفة و تطورت بشكل كبير و بدأ الباحثون بدراسة الظواهر الطبيعية كان للمعادلات التفاضلية الدور البارز في تفسير هذه الظواهر و تحويلها لنماذج رياضية و استخدامها في حقول علمية مختلفة كالميكانيك والهيدروليك، والفيزياء، والكيمياء، وهندسة الطيران، والهندسة البحرية، وهندسة البترول الخ. إن مسألة إيجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية غير الخطية من المسائل الرئيسية في الرياضيات النظرية والتطبيقية، وتلك المسائل تحتاج إلى خوارزميات عددية وتنفيذ حساباتها على الكمبيوتر، ويمكننا القول: لولا الكمبيوتر لبقى الكثير من المسائل دون حل. في الفيزياء وميكانيك الموائع تظهر مسائل الطبقة الجدارية التي سميت بمسألة بلاسيوس Blasius نسبة إلى عالم الفيزياء (Paul Richard Heinrich Blasius, 1908)، وهي تصف الطبقة الجدارية اللوحية الثابتة ثنائية الأبعاد والتي تتشكل على لوحة شبه لانهاية مع الاحتفاظ بتدفق ثابت أحادي الاتجاه. قام بعد ذلك كل من فوكنر و سكان في عام 1931 بتعميم مسألة Blasius إلى التدفق الوتدي والتي تكون فيها اللويحات الجدارية غير متوازية التدفق. وتعد مسألة فوكنر - سكان إحدى أهم وأشهر مسائل القيم الحدية غير الخطية، وهي تصنف من المسائل الصعبة والمعقدة بسبب عدم وجود حلول تحليلية معروفة لها، بالإضافة إلى أنها معرفة على نطاقات طويلة جداً (شبه لانهاية). ولقد اهتم العديد من الباحثين في مجال التحليل العددي بتطوير طرائق عددية لحلها بسبب كثرة تطبيقاتها الواقعية في العلوم الصناعية. وتعد مسائل الضغط الجداري الناتجة عن تدفق الموائع غير القابلة للانضغاط (ميكانيك السوائل) إحدى أهم أنماط هذه المسائل التي تصفها معادلة فوكنر - سكان المعطاة بالشكل الآتي [1-20]:

$$f'''(\eta) + \alpha f(\eta) \cdot f''(\eta) + \beta [1 - (f'(\eta))^2] = 0, \quad 0 < \eta < \infty \quad (1.1)$$

خاضعة للشروط الحدية :

$$f(\eta) = 0, \quad \eta = 0, \quad (1.2a)$$

$$f'(\eta) = 0, \quad \eta = 0, \quad (1.2b)$$

$$f'(\eta) \rightarrow 1, \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (1.2c)$$

و هي معادلة تفاضلية عادية غير خطية من المرتبة الثالثة معرفة على مجال شبه لانهاية ، حيث α ، β ثوابت حقيقية و لها دلالات فيزيائية و أيضاً قيمة β تعبر عن زاوية التدفق (الميل أو درجة الانحدار التي يتم وفقها التدفق) ، وفي اللانهاية وبعيداً عن الجدار يعطى الشرط الحدي [10]:

$$f''(\eta) \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

نتجت معادلة فوكنر - سكان من معادلات نافيه- ستوكس (Navier-Stokes) [11] ثنائية البعد وهي تصف تدفق الطبقة الحدية للسوائل النيوتونية وغير القابلة للانضغاط أيضاً، وعلى الرغم من البساطة الظاهرة التي تبديها معادلة فوكنر - سكان إلا أنه لا يمكن حلها بسهولة و يعد حلها من المسائل المعقدة والصعبة حيث تعود صعوبة إيجاد الحل التحليلي لأسباب كثيرة نذكر منها: لا خطيتها و ظهور التموجات المفاجئة والمتداخلة و التذبذبات الكبيرة الحاصلة نتيجة التدفق و لكثرة الخواص الميكانيكية للسوائل (كثافة، لزوجة ، سرعة ، درجة حرارة، ضغط،)، ومن الصعوبات أيضاً سيكون مطلوب إيجاد الحل على مسارات طويلة جداً (شبه لانهاية) و هذا ما يزيد من تعقيده.

صيغ خاصة لمعادلة فوكنر - سكان:

Special Formulas for Falkner-Skan Equation

درس الباحثون مسألة فوكنر - سكان ببعض الحالات الخاصة نذكر منها [16]:

- **الحالة الأولى:** عندما $\alpha = 1$ or $\alpha = \frac{1}{2}$ & $\beta = 0$ في هذه الحالة تدعى معادلة فوكنر - سكان بمعادلة تدفق بلاسيوس (Blasius flow) و هي الأكثر شهرة، يحصل هذا التدفق عند دراسة الطبقة الحدية على طول لوحة (صفحة) مسطحة رقيقة.
 - **الحالة الثانية:** عندما $\alpha = 0$ & $\beta = 1$ في هذه الحالة تدعى معادلة فوكنر - سكان بمعادلة تدفق بوهل هاوسن (Pohlhausen flow).
 - **الحالة الثالثة:** عندما $\alpha = 1$ & $\beta = \frac{1}{2}$ أو $\alpha = 2$ & $\beta = 1$ في هذه الحالة تدعى معادلة فوكنر - سكان بمعادلة تدفق هومان (Homann flow).
 - **الحالة الرابعة:** عندما $\alpha = 1$ & $\beta = 1$ في هذه الحالة تدعى معادلة فوكنر - سكان بمعادلة تدفق هيمنز (Hiemenz flow).
 - يوجد أيضاً عدد غير منته من الحالات الخاصة والتي لها تطبيقات هامة، نحصل عليها عندما:
 $\alpha = 1$ & $\beta \in [-0.1988, \infty]$
 - إذا كان $\beta > 0$ تسمى الحلول الحاصلة بالتدفقات المتسارعة، وإذا كان $\beta < 0$ تسمى الحلول الحاصلة بالتدفقات المتباطئة، وإذا كان $\beta = 0$ تسمى الحلول الحاصلة بالتدفقات الثابتة.
- كرست العديد من الدراسات الحديثة التي اقترحت طرائق عديدة لحل مسألة فوكنر - سكان، نذكر منها:
- قدم Asithambii في عام 2004 [1] خوارزمية الفروق المنتهية لتقريب الحل لبعض الحالات الخاصة وكانت الطريقة من المرتبة الثانية، وقدم أيضاً في [2] عام 2005 طريقة سلسلة منشور تايلور مع طريقة القذيفة التي حولت المسألة الأساسية إلى مسألة قيمة ابتدائية. درس Cortell عام 2005 [4] تحويلاً تفاضلياً للمسألة الأساسية إلى مسألة قيمة ابتدائية واستخدام طريقة رانج - كوتا من مراتب عالية وتم حل مسألة Blasius لأجل الحالات $\alpha = 1, 1.2, 1.5, 1.8$. أوجد Elgazery عام 2008 [5] حلاً عددياً لبعض الحالات الخاصة للمسألة باستخدام طريقة تحليل أوميان، واستخدام برنامج Mathematica لحساب كثيرات حدود أوميان وتقريبات بادي التي اعتمدت عليهم الطريقة.
- استخدم Parand & Taghavi عام 2009 [13] طريقة تجميع دالة لاغير المعممة لإيجاد الحل العددي لمسألة Blasius، تستخدم الطريقة N نقطة تجميع مرتبطة بدرجة كثيرة حدود لاغير وتتحول المسألة إلى جملة معادلات غير خطية. قدم Mahmoud عام 2010 [11] مناقشة عديدة باستخدام كثيرات حدود شرائحية من الدرجة السابعة مع ثلاث نقاط تجميع، وتمت دراسة الاستقرار والتقارب وحل المسألة في بعض الحالات الخاصة. أوجد Lakestani عام 2011 [10] الحل العددي بالاعتماد على كثيرات حدود تشيبيتشيف مع نقاط تجميع غاوص - تشيبيتشيف واستخدم برنامج Maple للحصول على نتائج في بعض الحالات الخاصة.
- استخدم Saini وآخرون عام 2013 [17] خوارزمية جينية مع طريقة القذيفة لتحويل المسألة الحدية إلى مسألة قيم ابتدائية وحل المسألة في بعض الحالات الخاصة. اقترح Bougoffa & Wazwaz عام 2015 [3] طريقة تقريبية لإيجاد حلول تحليلية تقريبية لمسألة Blasius. أنشأ Calvert & Razzaghi عام 2017 [6] تقريبات تجميعية تعتمد على دوال برنولي الكسرية لإيجاد حلول تحليلية تقريبية لمسألة Blasius.

طبق Temimi & Ben-Ramdane عام 2018 [19] طريقة الفروق المنتهية وفق صيغة تكرارية من المرتبة الثانية مع استخدام تكرارية نيوتن رافسون لإيجاد حلول تحليلية تقريبية لمسألة Blasius. طور Khandelwa وآخرون عام 2019 [8] طريقة عددية باستخدام تحويل كمال التكاملي وطريقة تحليل أدوميان مع تقريبات بادي الكسرية للحصول على حلول عددية لمسألة Blasius لأجل $\alpha = \frac{1}{2}$ & $\beta = 0$. قدم Rahman عام 2019 [15] مقارنات بين حلول تحليلية وحلول عددية لمسألة Blasius باستخدام تقريبات الفروق المنتهية لصيغ المشتقات واستخدم برنامج Matlab للحصول على النتائج. عدل Rahmanzadeh وآخرون عام 2019 [16] طريقة RCW بأخذ مجموع سلسلة تايلور مع كثرة حدود من الدرجة الرابعة واستخدمت لحل مسألة Blasius لأجل $\alpha = \frac{1}{2}$ & $\beta = 0$ ، حولت طريقتهم المسألة إلى جملة معادلات جبرية غير خطية، يمكن حلها بطريقة تكرارية نيوتن.

أهمية البحث وأهدافه:

تعد مسألة فوكنر - سكان ذات أهمية كبيرة في علم الهيدروليك والميكانيك (نظرية الموائع) والهندسة لما تقدمه من معلومات ثمرة حول تدفق الموائع غير القابلة للانضغاط (السوائل) و حركتها و القوى المطبقة عليها و خواصها من لزوجة وكثافة وضغط الخ. و لقد اهتم باحثوا التحليل العددي في حل مثل هذا النوع من المسائل و لكن المشكلة التي تواجه هؤلاء الباحثين أن المسألة غنية بالتحديات الفيزيائية و الرياضية و خصائصها الصعبة والكثيرة و على الرغم من كل الأعمال البحثية المنشورة حتى الآن فإنها لا زالت تفتقر إلى أي تصور عن حلها إلا في بعض الحالات الخاصة البسيطة، لهذا نهدف هنا إلى تطوير طريقة عددية مستقرة ومقاربة بتكلفة حسابية منخفضة لتقدم حلول عالية الدقة بالإضافة إلى تنفيذ خوارزمية الطريقة باستخدام لغة البرمجة Mathematica11 وهي من لغات البرمجة عالية المستوى. و يتجلى هدفنا بشكل أساسي في دعم و تطوير البحث العلمي و تزويد الباحثين و طلاب الدراسات العليا بمعلومات إضافية من الناحيتين النظرية و العملية و الاستفادة من النتائج المقدمة في هذا العمل. تم إجراء هذا البحث في قسم الرياضيات- كلية العلوم- جامعة تشرين في الفترة الواقعة بين شهري كانون الثاني 2019 و آب 2019.

طرائق البحث ومواده:

نناقش في هذا البحث طريقة عددية تكرارية تعتمد على كثيرات حدود من الدرجة الثامنة مع أربع نقاط تجميع حيث سيتم تحويل مسألة فوكنر - سكان الحدية المعرفة على المجال $[0, \infty[$ إلى مسألتين من مسائل القيم الابتدائية حل كل منهما في المجال $[0, 1]$ بدلاً من المجال $[0, \infty[$ وذلك بهدف تسهيل الدراسة والتغلب على قساوة المسألة، سيتم أيضاً تطبيق الطريقة الشرائحية المقترحة في هذه الدراسة على المسألة مباشرة دون تخفيضها إلى جملة معادلات تفاضلية من المرتبة الأولى و هذا سيقبل من الكلفة الحسابية لخوارزمية الطريقة كما سيتم إثبات أن الحل موجود و وحيد و تقديم دراسة تحليلية للتقارب و من ثم توصيف خوارزمية لحل المسألة وتنفيذها باستخدام لغة البرمجة Mathematica11 عالية المستوى لإيجاد النتائج العددية و من ثم مقارنة هذه النتائج لمختلف الحالات التي سيتم حل المسألة وفقها مع نتائج طرائق عددية أخرى حصل عليها باحثون آخرون و أيضاً سيحدد مرتبة الخطأ الناتج عند كل تكرار و الخطأ الشامل على طول مجال الحل.

النتائج و المناقشة:

سنبدأ فيما يلي أولاً بنقل مجال حل مسألة فوكنر- سكان من المجال شبه اللانهائي $[0, \infty[$ إلى المجال $[0, 1]$ ، ثم تحويل مسألة فوكنر- سكان من مسألة ذات شروط حدية إلى مسألة مكافئة ذات شروط ابتدائية، ثم إنشاء تقريبات من نمط كثيرات حدود شرائحية من الدرجة الثامنة مع أربع نقاط تجميع وتطبيقها على مسألة القيم الابتدائية المكافئة، وتقدير صيغة الخطأ المقتطع.

• تغيير المتحول: Change of Variable

في كثير من الأحيان تسبب الشروط الحدية عوائق في الحل و لإيجاد حل تقريبي لمعادلة فوكنر- سكان فإننا نحتاج لمعرفة القيمة الصحيحة لإجهاد القص على الجدار $f''(0)$ (وهي غير معروفة) بأسلوب يضمن تقارب قيمة السرعة f' عند اللانهاية إلى الواحد، تسمى هذه التقنية بطريقة القذيفة (Shooting). و لكن بما أن الحل مطلوب إيجاده على مسارات طويلة جداً (شبه لا نهائية) سنجري بداية تبديل للمتحويلات بالشكل الآتي:

نضع $x = \frac{\eta}{\eta_\infty}$, $y = \frac{f}{\eta_\infty}$ و بالتالي تحويل المجال شبه اللانهائي $[0, \eta_\infty[$ إلى المجال $[0, 1]$ و ذلك بهدف تسهيل إيجاد الحل العددي، وبتطبيق ذلك على المسألة ينتج لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\eta_\infty} \frac{df}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} = \frac{df}{d\eta}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{d\eta^2} \frac{d\eta}{dx} = \eta_\infty \frac{d^2f}{d\eta^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3f}{d\eta^3} \frac{d\eta}{dx} = \eta_\infty^2 \frac{d^3f}{d\eta^3}, \quad \text{where } \frac{d\eta}{dx} = \eta_\infty$$

وبالتعويض في مسألة فوكنر- سكان (1.1) تأخذ الشكل الآتي:

$$y''''(x) + \alpha \eta_\infty y(x) \cdot y''(x) + \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x))^2] = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (2.1)$$

و الشروط الحدية (1.2) تصبح كالآتي:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad \& \quad y'(1) = 1 \quad (2.2)$$

ويعطى كذلك الشرط الحدي المقارب (1.3) كالآتي:

$$y''(x \rightarrow 1) \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

• تحويل مسألة القيم الحدية إلى مسألة قيم ابتدائية:

Transforming Boundary Value Problem to Initial Value Problem

تقنية القذيفة (Shooting) لحل مسألة القيمة الحدية غير الخطية من المرتبة الثالثة مشابهة للحالة الخطية باستثناء أن الحل للمسألة غير الخطية لا يمكن التعبير عنه تركيب خطي لحلين من مسائل القيم الابتدائية، عوضاً عن ذلك نحتاج لحل مسألة القيم الابتدائية الآتية:

$$y''''(x, t) + \eta_\infty \alpha y(x, t) \cdot y''(x, t) + \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x, t))^2] = 0 \quad (2.4)$$

التي تخضع للشروط الابتدائية:

$$y(0, t) = 0, y'(0, t) = 0 \quad \& \quad y''(0, t) = t \quad (2.5)$$

حيث إن مسألة القيمة الابتدائية (2.4)-(2.5) لا تختلف عن مسألة القيمة الحدية (2.1)-(2.2) سوى بالشرط الحدي $y'(1) = 1$ ، الذي استبدل بالشرط الابتدائي $y''(0, t) = t$ ، وبالتالي فإن حلها مختلف يتعلق بالمتغير x والوسيط الجديد t . والسؤال الآن كيف يمكن لنا تقريب حل مسألة القيمة الحدية الهدف (2.1)-(2.2) بالاستفادة من حل مسألة القيمة الابتدائية الجديدة (2.4)-(2.5)؟. الجواب فيما يأتي:

لتقريب الحل للمسألة الهدف (2.1)-(2.2) نقوم بأخذ قيم متتالية للوسيط $t = t_k$ ($k=0,1,2,\dots$) بأسلوب يضمن أن:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y'(1, t_k) = y'(1) = 1 \quad (2.6)$$

حيث يرمز $y(x, t_k)$ لحل مسألة القيمة الابتدائية (2.4)-(2.5) من أجل $t = t_k$ و يرمز $y(x)$ لحل مسألة القيمة الحدية (2.1)-(2.2).

يبدأ الحل بأخذ قيمة للوسيط t_0 تدعى قذيفة، تحدد قيمة ابتدائية باتجاه الهدف الذي ينطلق من النقطة $(0,0)$ و على طول المنحني الذي يمثل حل مسألة القيمة الابتدائية (2.4)-(2.5) مع الشروط الابتدائية:

$$y(0, t) = 0, y'(0, t) = 0 \quad \& \quad y''(0, t) = t_0$$

إذا كان $y'(1, t_0)$ غير قريب من 1 كفاية، نصح التقريب بقذف قيمة أخرى t_1 لتكون أقرب إلى الهدف من الرمية الأولى وهكذا باستمرار الرمي بالأسلوب نفسه حتى نصل إلى قيمة لـ $y'(1, t_k)$ قريبة كفاية من 1.

ويبقى السؤال كيف نحدد قيم الوسيط t_k ؟

لتعيين قيم متتالية ومقاربة للوسيط t_k نفرض أن مسألة القيمة الحدية (2.1)-(2.2) تملك حلاً وحيداً $y(x)$ و بفرض أن $y(x, t)$ حل مسألة القيمة الابتدائية (2.4)-(2.5) و المسألة أصبحت تعيين t جذر للمعادلة:

$$y'(1, t) - 1 = 0 \quad (2.7)$$

و من الواضح أن هذه المعادلة غير خطية في t ، يمكننا تعيين الجذر التقريبي t_k بطرق عديدة كثيرة أهمها وأكثرها فعالية هي طريقة نيوتن-رافسون التي تولد متتالية $\{t_k\}$ ، وتحتاج فقط لتقدير قيمة ابتدائية t_0 ، وتكتب تكرارية نيوتن رافسون لحل (2.7) بالصيغة التكرارية الآتية:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y'(1, t_k) - 1}{\frac{d}{dt} y'(1, t_k)} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

للحصول على قيم تكرارية نيوتن-رافسون (2.8)، نحتاج لمعرفة قيم $\frac{d}{dt} y'(1, t_k)$ المجهولة وهذا غير متاح لعدم وجود صيغة تحليلية صريحة لـ $y'(1, t)$ ، ونعلم فقط $y'(1, t_0), y'(1, t_1), \dots, y'(1, t_k)$.

لحل هذه المشكلة سنأخذ المشتقات الجزئية للمسألة (2.4) بالنسبة لـ t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y'''(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \{-\eta_\infty \alpha y(x, t) \cdot y''(x, t) - \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x, t))^2]\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \{-\eta_\infty \alpha y(x, t) \cdot y''(x, t) - \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x, t))^2]\} \frac{\partial x}{\partial t} \\ &+ \frac{d}{dy} \{-\eta_\infty \alpha y(x, t) \cdot y''(x, t) - \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x, t))^2]\} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y'} \{-\eta_\infty \alpha y(x, t) \cdot y''(x, t) - \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x, t))^2]\} \frac{\partial y'}{\partial t} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y''} \{-\eta_\infty \alpha y(x, t) \cdot y''(x, t) - \eta_\infty^2 \beta [1 - (y'(x, t))^2]\} \frac{\partial y''}{\partial t} \end{aligned}$$

وبما أن x, t مستقلان، ينتج لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y'''(x, t) &= -\eta_\infty \alpha y''(x, t) \frac{dy}{dt}(x, t) + 2 \eta_\infty^2 \beta y'(x, t) \frac{dy'}{dt}(x, t) \\ &- \eta_\infty \alpha y(x, t) \frac{dy''}{dt}(x, t), x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.9)$$

وتعطى الشروط الابتدائية (2.5) بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(0, t) = 0, \frac{\partial}{\partial t} y'(0, t) = 0 \quad \& \quad \frac{\partial}{\partial t} y''(0, t) = 1 \quad (2.10)$$

لتبسيط الصيغة نأخذ الترميز $U(x, t)$ بدلا من $\frac{d}{dt} y(x, t)$ عندئذ تصبح المسألة (2.9)-(2.10) كالآتي:

$$U''''(x, t) = -\eta_{\infty} \alpha y''(x, t) U(x, t) + 2 \eta_{\infty}^2 \beta y'(x, t) U'(x, t) - \alpha \eta_{\infty} y(x, t) U''(x, t) \quad (2.11)$$

$$U(0, t) = 0, U'(0, t) = 0 \quad \& \quad U''(0, t) = 1$$

الآن بحل المسألتين الابتدائيتين (2.4)-(2.5) و (2.11) سنحصل على قيم متتالية للفديفة باستخدام علاقة

نيوتن التكرارية (2.8) التي تصبح بالشكل:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y'(1, t_k) - 1}{U'(1, t_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

تدعى (2.11) بالمسألة المساعدة لأننا نحتاج إليها للحصول على تقريب الحل لمسألة فوكنر- سكان الأساسية.

• طريقة الحل: Method for the Solution

نأخذ تجزئة منتظمة Δ للمجال $[0, 1]$ كالآتي:

$$\Delta: \equiv \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} < \dots < x_N = 1\}$$

حيث $x_k = k h, k = 0, 1, \dots, N$ و $h = 1/N$ طول الخطوة.

من أجل إيجاد حل تقريبي لمسألة القيمة الابتدائية (2.4)-(2.5) نعرف كثيرة حدود من الدرجة الثامنة $S(x)$ ، في كل

مجال جزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, N - 1$ كالآتي:

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^4 \frac{(x - x_k)^i}{i!} S_k^{(i)} + \sum_{i=5}^8 \frac{(x - x_k)^i}{i!} C_{k,i-4} \quad (2.13)$$

حيث: $S^{(i)}(0) = S_0^{(i)}, i = 0, \dots, 4$ قيم ابتدائية لدالة الحل $y(x)$ و هي معلومة من شروط البدء للمسألة، و

$S_k^{(i)}$ ترمز لقيم مشتق كثيرة الحدود الشرائحية من المرتبة i عند x_k و $C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,3}, C_{k,4}$ هي أربعة مجاهيل

يطلب تعيينها في كل مجال جزئي I_k .

وبشكل عام فإن التجزئة تحدد N شريحة $S_k(x), k = 0, 1, \dots, N - 1$ ، نسميها كثيرة حدود شرائحية تعطى

بالشكل:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & \text{if } x \in [x_0, x_1], \\ S_k(x), & \text{if } x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 1, \dots, N - 2 \\ S_{N-1}(x), & \text{if } x \in [x_{N-1}, x_N], \end{cases} \quad (2.14)$$

ولحساب المجاهيل الأربعة $C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,3}, C_{k,4}$ نستخدم أربع نقاط تجميع تعرف كالآتي:

$$x_{k+z_j} = x_k + z_j h, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.15)$$

في كل مجال جزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}], k = 0, 1, \dots, N - 1$ ، مع الوسطاء الأربعة:

$$0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 = 1 \quad (2.16)$$

بتطبيق كثيرة الحدود التقريبية (2.13) ومشتقاتها $S'_k(x), S''_k(x), S'''_k(x)$ مع نقاط التجميع (2.15)-(2.16)

على مسألة فوكنر- سكان الابتدائية (2.4)-(2.5) في كل مجال جزئي I_k ينتج لدينا:

$$S_k'''(x_{k+z_j}) + \eta_\infty \alpha S_k(x_{k+z_j}) \cdot S_k''(x_{k+z_j}) + \eta_\infty^2 \beta \left[1 - (S_k'(x_{k+z_j}))^2 \right] = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.17)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$S_0(0) = S_0'(0) = 0, \quad S_0''(0) = t \equiv t_k \quad (2.17')$$

حيث:

$$S_0(0) = y(0, t) = S_0'(0) = y'(0, t) = 0, \quad S_0''(0) = y''(0, t) = t$$

أما باقي المعاملات $S_0^m(0) = y^m(0, t)$; $m \geq 3$ وعند تطبيق نقاط التجميع على كثيرة الحدود التقريبية نجد أن :

$$S_k(x_{k+z_j}) = \sum_{i=0}^4 \frac{(h z_j)^i}{i!} S_k^{(i)} + \sum_{i=5}^8 \frac{(h z_j)^i}{i!} C_{k,i-4}, \quad x_{k+z_j} \in [x_k, x_{k+1}] \quad (2.18)$$

$$(j=1, 2, 3, 4, \quad k=0, 1, \dots, N-1)$$

إذا كانت $k=0$ ، نحسب المجاهيل الأربعة $C_{k,1}, C_{k,2}, C_{k,3}, C_{k,4}$ بحل جملة المعادلات (2.17) المؤلفة من أربع معادلات لاخطية باستخدام الشروط الابتدائية (2.17')، ولأجل $k \geq 1$ نحسب المجاهيل المذكورة بالاستفادة من القيم التي أصبحت معلومة في الخطوة السابقة.

بشكل مشابه لإيجاد الحل الشرائحي لمسألة القيمة الابتدائية (2.11) نعرف كثيرة الحدود من الدرجة نفسها، في كل مجال جزئي I_k كالآتي:

$$S_{u,k}(x) = \sum_{i=0}^4 \frac{(x - x_k)^i}{i!} S_{u,k}^{(i)} + \sum_{i=5}^8 \frac{(x - x_k)^i}{i!} \tilde{C}_{k,i-4}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \quad (2.19)$$

بتطبيق كثيرات الحدود التقريبات (2.19) ومشتقاتها بالنسبة لـ $S_{u,k}'(x), S_{u,k}''(x), S_{u,k}'''(x)$ مع نقاط

التجميع (2.15)–(2.16) على المسألة المساعدة (2.11) في كل مجال جزئي I_k ينتج لدينا :

$$S_{u,k}'''(x_{k+z_j}) + \eta_\infty \alpha S_k''(x_{k+z_j}) \cdot S_{u,k}(x_{k+z_j}) + \eta_\infty \alpha S_k(x_{k+z_j}) \cdot S_{u,k}''(x_{k+z_j}) - 2\eta_\infty^2 \beta S_k'(x_{k+z_j}) \cdot S_{u,k}'(x_{k+z_j}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.20)$$

مع الشروط الابتدائية:

$$S_{u,0}(0) = S_{u,0}'(0) = 0, \quad S_{u,0}''(0) = 1 \quad (2.20')$$

حيث لدينا:

$$S_{u,k}(x_{k+z_j}) = \sum_{i=0}^4 \frac{(h z_j)^i}{i!} S_{u,k}^{(i)} + \sum_{i=5}^8 \frac{(h z_j)^i}{i!} \tilde{C}_{k,i-4}, \quad x_{k+z_j} \in [x_k, x_{k+1}] \quad (2.21)$$

$$(j=1, 2, 3, 4, \quad k=0, 1, \dots, N-1)$$

لأجل $k=0$ ، نحل جملة المعادلات اللاخطية (2.20) في المجاهيل $\tilde{C}_{k,1}, \tilde{C}_{k,2}, \tilde{C}_{k,3}, \tilde{C}_{k,4}$ باستخدام الشروط الابتدائية (2.20') أو بالاستفادة من قيم الحل في المجال الجزئي السابق لأجل $k \geq 1$.

الآن بعد تطبيق التقنية الشرائحية على مسألة القيم الابتدائية الأولى (2.4)–(2.5) سنحصل على الحل العددي بسهولة بحل جملة المعادلات غير الخطية (2.17)–(2.17') وكذلك بعد تطبيق التقنية الشرائحية سنحصل على الحل العددي للمسألة المساعدة (2.11) بحل جملة المعادلات غير الخطية (2.20)–(2.20') وبالتالي سنحصل على القيم التقريبية $S'_{U,N-1}(x_N, t_{k-1}), S'_{N-1}(x_N, t_{k-1})$ ويتعويضهما في علاقة نيوتن التكرارية (2.12) ينتج لدينا:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{S'_{N-1}(x_N, t_k) - 1}{S'_{U,N-1}(x_N, t_k)}; k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

وجود الحل العددي : Existence of Numerical Solution •

يمكن كتابة مسألة فوكنر - سكان بالنموذج غير الخطي كالتالي:

$$f'''(x) = F(x, f(x), f'(x), f''(x)) \quad , \quad x \in [0, b] \quad (2.23)$$

$$f(0) = a_0 \quad , \quad f'(0) = a_1 \quad , \quad f''(0) = a_2 \quad (2.23')$$

و بافتراض أن:

$$F: [0, b] \times C[0, b] \times C^1[0, b] \times C^2[0, b] \rightarrow R$$

دالة ملساء بما فيه الكفاية وتحقق شرط ليبنتشيز:

$$|F(x, v_1, v_2, v_3) - F(x, u_1, u_2, u_3)| \leq L(|v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + |v_3 - u_3|)$$

$$\forall (x, v_1, v_2, v_3), (x, u_1, u_2, u_3) \in [0, b] \times R^3$$

حيث L ثابت ليبنتشيز، ويتطبيق التقريبات الشرائحية (2.13) و مشتقاتها مع نقاط التجميع على المسألة (2.23)،

نحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$S_k^{(3)} + hz_j S_k^{(4)} + \frac{(hz_j)^2}{2!} C_{k,1} + \frac{(hz_j)^3}{3!} C_{k,2} + \frac{(hz_j)^4}{4!} C_{k,3} + \frac{(hz_j)^5}{5!} C_{k,4} = F(x_{k+z_j}, S(x_{k+z_j}), S'(x_{k+z_j}), S''(x_{k+z_j})) \quad (2.24)$$

$$j = 1, 2, 3, 4 \quad , \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$S_0(0) = a_0, \quad S'_0(0) = a_1, \quad S''_0(0) = a_2 \quad (2.24')$$

والتي يمكن إعادة كتابتها بالشكل المصفوفي:

$$A \bar{C}_k = \bar{S}_k + \bar{F}_k \quad (2.25)$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{z_1^2 h^2}{2!} & \frac{z_1^3 h^3}{3!} & \frac{z_1^4 h^4}{4!} & \frac{z_1^5 h^5}{5!} \\ \frac{z_2^2 h^2}{2!} & \frac{z_2^3 h^3}{3!} & \frac{z_2^4 h^4}{4!} & \frac{z_2^5 h^5}{5!} \\ \frac{z_3^2 h^2}{2!} & \frac{z_3^3 h^3}{3!} & \frac{z_3^4 h^4}{4!} & \frac{z_3^5 h^5}{5!} \\ \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} \end{bmatrix}, \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ C_{k,3} \\ C_{k,4} \end{bmatrix}, \bar{S}_k = \begin{bmatrix} -S_k^{(3)} - hz_1 S_k^{(4)} \\ -S_k^{(3)} - hz_2 S_k^{(4)} \\ -S_k^{(3)} - hz_3 S_k^{(4)} \\ -S_k^{(3)} - h S_k^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_k = \begin{bmatrix} F_{k+z_1} \\ F_{k+z_2} \\ F_{k+z_3} \\ F_{k+1} \end{bmatrix}; F_{k+z_j} = F(x_{k+z_j}, S(x_{k+z_j}), S'(x_{k+z_j}), S''(x_{k+z_j})), j = 1, 2, 3, 4$$

إن المنظومة (2.25) قابلة للحل دائما لأجل $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 = 1$ ويمكن تعيين المجاهيل الأربعة \bar{C}_k

في كل مجال جزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ لأن المصفوفة A غير شاذة حيث نجد أن:

$$\text{Det}[A] = \frac{(1-z_1)(1-z_2)(1-z_3)(z_3-z_2)(z_3-z_1)(z_2-z_1)(z_1 z_2 z_3)^2 h^{14}}{34560} \neq 0$$

نحسب المجاهيل \bar{C}_k من العلاقة التكرارية (2.25) ونعوضها في كثيرة الحدود الشرائحية التي تعطينا قيمة تقريبية

للحل العددي فوق كل مجال جزئي.

• تقدير الخطأ المقتطع الشامل: Estimation of Global Truncation Error

بفرض أن $y(x) \in C^9[0,1]$ حل وحيد لمعادلة فوكنر - سكان و $S(x)$ الحل الشرائحي العددي و بفرض أن $T = (\bar{\tau}_k)$ هو شعاع ذو أربع مركبات حيث $\bar{\tau}_k$ يرمز للخطأ المتقطع الموضوعي. بتطبيق التقريب الشرائحي $S(x)$ في نقاط التجميع (2.15) ونضع بشكل تقريبي $S(x_{k+z_j}) \cong y(x_{k+z_j})$ و $S^m(x_k) \cong y^m(x_k) = y_k^m$, $(m = 0, \dots, 4)$, $(k = 0, 1, \dots, N)$, $(j = 1, 2, 3, 4)$ و بإعطاء وسطاء التجميع القيم $z_1 = 7/10, z_2 = 8/10, z_3 = 9/10, z_4 = 1$ نحصل على صيغة الخطأ المقتطع الموضوعي كفرق بين الحل العددي والحل الدقيق كالاتي:

$$\bar{\tau}_k = M \bar{C}_k + \bar{\Psi}_k \quad (2.26)$$

حيث:

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} y_k + \frac{7}{10} h y'_k + \frac{49h^2}{200} y''_k + \frac{(7h)^3}{3! * 10^3} y'''_k + \frac{(7h)^4}{4! * 10^4} y^{(4)}_k - y\left(x_k + \frac{7}{10} h\right) \\ y_k + \frac{8}{10} h y'_k + \frac{64h^2}{200} y''_k + \frac{(8h)^3}{3! * 10^3} y'''_k + \frac{(8h)^4}{4! * 10^4} y^{(4)}_k - y\left(x_k + \frac{8}{10} h\right) \\ y_k + \frac{9}{10} h y'_k + \frac{81h^2}{200} y''_k + \frac{(9h)^3}{3! * 10^3} y'''_k + \frac{(9h)^4}{4! * 10^4} y^{(4)}_k - y\left(x_k + \frac{9}{10} h\right) \\ y_k + h y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}_k - y(x_k + h) \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{7^5 h^5}{5! * 10^5} & \frac{7^6 h^6}{6! * 10^6} & \frac{7^7 h^7}{7! * 10^7} & \frac{7^8 h^8}{8! * 10^8} \\ \frac{8^5 h^5}{5! * 10^5} & \frac{8^6 h^6}{6! * 10^6} & \frac{8^7 h^7}{7! * 10^7} & \frac{8^8 h^8}{8! * 10^8} \\ \frac{9^5 h^5}{5! * 10^5} & \frac{9^6 h^6}{6! * 10^6} & \frac{9^7 h^7}{7! * 10^7} & \frac{9^8 h^8}{8! * 10^8} \\ \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_k = \begin{bmatrix} C_{k,1} \\ C_{k,2} \\ C_{k,3} \\ C_{k,4} \end{bmatrix}$$

نحسب متجهة المجاهيل من الجملة (2.25):

$$\bar{C}_k = A^{-1} \hat{Y}_k + A^{-1} \hat{F}_k \quad (2.27)$$

حيث:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{24000}{49h^2} & -\frac{7875}{8h^2} & \frac{56000}{81h^2} & -\frac{168}{h^2} \\ \frac{242000}{49h^3} & \frac{83625}{8h^3} & -\frac{206000}{27h^3} & \frac{1910}{h^3} \\ \frac{1080000}{49h^4} & -\frac{48750}{h^4} & \frac{1000000}{27h^4} & -\frac{9600}{h^4} \\ -\frac{2000000}{49h^5} & \frac{93750}{h^5} & -\frac{2000000}{27h^5} & \frac{20000}{h^5} \end{bmatrix}, \quad \text{Det}[A] = \frac{441h^{14}}{5000000000000} \neq 0$$

$$\bar{Y}_k = \begin{bmatrix} -Y_k^{(3)} - \frac{7}{10} h Y_k^{(4)} \\ -Y_k^{(3)} - \frac{8}{10} h Y_k^{(4)} \\ -Y_k^{(3)} - \frac{9}{10} h Y_k^{(4)} \\ -Y_k^{(3)} - h Y_k^{(4)} \end{bmatrix}, \quad \hat{F}_k = \begin{bmatrix} y_{k+z_1}''' \\ y_{k+z_2}''' \\ y_{k+z_3}''' \\ y_{k+1}''' \end{bmatrix}$$

ثم بتعويض العلاقة (2.27) بـ (2.26) بعد تطبيق منشور تايلور على الدوال $y^m(x)$, $m = 0,1,2,3,4$ حول x_k نحصل على:

$$\bar{\tau}_k = M (A^{-1} \hat{Y}_k + A^{-1} \hat{F}_k) + \bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} \frac{8353079 y^9(x_k)}{25920000000000} \\ \frac{13528 y^9(x_k)}{27685546875} \\ \frac{3877551 y^9(x_k)}{560000000000} \\ \frac{121 y^9(x_k)}{129600000} \end{bmatrix} h^9 = O(h^9) \quad (2.28)$$

حيث: $y(x) = \sum_{i=0}^9 \frac{(x-x_k)^i}{i!} y^i(x_k) + O(h^{10}), x \in [x_k, x_{k+1}]$ نجد من الصيغة (2.28) أن الخطأ المقطع الموضوعي من المرتبة التاسعة عند الحصول على الحل العددي في المجال الجزئي $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ وأما الخطأ المقطع الشامل فينتج عن الخطأ في جميع المجالات الجزئية، يعني:

$$\|T\|_{\infty} = \max_{0 \leq k \leq N} |\bar{\tau}_k| = N \frac{121 C}{129600000} h^9 = \frac{121 C}{129600000} h^8 \equiv O(h^8)$$

حيث $C = \max_{0 \leq k \leq N} |y^9(x_k)|$ ، وبالتالي الخطأ الشامل على طول مجال الحل من المرتبة الثامنة. وإذا أخذنا $y \in C^9[0,1]$ يحقق شرط ليبشيز و الحل الشرائحي $S(x)$ يتقارب من الحل $y(x)$ عندما $h \rightarrow 0$ من أجل $0 < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 = 1$ تكون مرتبة التقارب هي الثامنة و يكون لدينا:

$$|y(x) - S(x)| < k h^8$$

• خوارزمية الطريقة العددية المقترحة: Algorithm of Numerical Method

الخطوة (0)- المدخلات: α (قيمة) elfa ، β (قيمة) beta ، \inf (قيمة) η_{∞} ، t_0 (قيمة قذيفة ابتدائية) ، L (حجم التجزئة) ، M (حد أعلى للتكرارات) ، tol (التفاوت المسموح 10^{-8}) ، $k_i=0$ (عداد القذائف) ، $k=0$ (عداد الخطوات) ، $z[1]=0.7$; $z[2]=0.8$; $z[3]=0.9$; $z[4]=1$ (وسطاء التجميع) **الخطوة (1)**: نضع $x[0]=0$ ، $x[L]=\inf$ ، نحسب $h=(x[L]-x[0])/L$

الخطوة (2): نحل مسألة فوكنر-سكان الابتدائية (2.4)-(2.5) والذي بتطبيق الطريقة الشرائحية يؤول إلى حل جملة المعادلات غير الخطية (2.17)-(2.17') الآتية (يحل بسهولة باستخدام برنامج Math):

$$S_k'''(x_{k+z_j}) + \eta_{\infty} \alpha S_k''(x_{k+z_j}) \cdot S_k''(x_{k+z_j}) + \eta_{\infty}^2 \beta [1 - (S_k'(x_{k+z_j}))^2] = 0,$$

$$j = 1,2,3,4$$

مع الشروط الابتدائية: $S_0(0) = S_0'(0) = 0$ ، $S_0''(0) = t_k$

الخطوة (3): نحل المسألة المساعدة (2.11) والذي بتطبيق الطريقة الشرائحية يؤول بسهولة إلى حل جملة المعادلات غير الخطية (2.20)-(2.20') الآتية:

$$S_{u,k}'''(x_{k+z_j}) + \eta_{\infty} \alpha S_{u,k}''(x_{k+z_j}) \cdot S_{u,k}(x_{k+z_j}) + \eta_{\infty} \alpha S_{u,k}(x_{k+z_j}) \cdot S_{u,k}''(x_{k+z_j}) - 2\eta_{\infty}^2 \beta S_{u,k}'(x_{k+z_j}) \cdot S_{u,k}'(x_{k+z_j}) = 0, \quad j = 1,2,3,4$$

مع الشروط الابتدائية: $S_{u,0}(0) = S_{u,0}'(0) = 0$ ، $S_{u,0}''(0) = 1$

الخطوة (4): نختبر الشرط $Abs[S_{L-1}'(x_L) - 1] < tol$ إذا كان محقق ننتقل إلى خطوة الطباعة (4)

وإلا ننتقل إلى الخطوة التالية.

الخطوة(5): نحسب قيمة قذيفة جديدة لتصويب الرمي بتطبيق العلاقة (2.22) كالاتي:

$$t_{ki+1} = t_{ki} - \frac{S'_{L-1}(x_L) - 1}{S'_{U,L-1}(x_L)}$$

الخطوة(6): نزيد العداد $ki=ki+1$ ، فإذا كان $ki > M$ نتوقف الخوارزمية لتجاوز عدد التكرارات المسموح به ونفشل الطريقة وإلا نعود إلى الخطوة (2).

الخطوة(7): نطبع نتائج الحل العددي ومشتقاته $S_{k-1}(x_k)$ ، $S'_{k-1}(x_k)$ ، $S''_{k-1}(x_k)$ ، $k=1,2,\dots,L$.

الخطوة(8): النهاية .

ملاحظة هامة: قد تفشل الطريقة في الوصول إلى الحل العددي عند تطبيقها لحل مسألة فوكنر - سكان لأجل مدخلات غير مناسبة، أو خاطئة، أو سوء تقدير المدخلات، وفي هذه الحالة يجب إعادة النظر في المدخلات.

نوضح فيما يلي خوارزمية الطريقة بتطبيقها لحل مسألة بلاسيوس [Blasius 8,12, 15,16, 2019]:

• برنامج بلغة **Math** لحل مسألة فوكنر- سكان حالة مسألة بلاسيوس:

```
Clear[ss,ss1,ss2,ss3,zs,zs1,zs2,zs3,f,f1,cc,c,z,x,c1,c2,c3,c4,cc1,cc2,cc3,cc4,ja,jo];
Clear[s0,s1,s2,s3,z0,z1,z2,z3];
inf=7.30;
elfa=1; beta=0; tk=0.4; L=73; M=20; tol=0.00000001;
z[1]=0.7; z[2]=0.8; z[3]=0.9; z[4]=1;
x[0]=0; x[L]=inf; h=(x[L]-x[0])/L;
c[1]=0.1; c[2]=-0.1; c[3]=0.01; c[4]=0.01;
cc[1]=0.001; cc[2]=0.2;cc[3]=-0.2;cc[4]=0.01;
ss[c1_,c2_,c3_,c4_]=s0+x*s1+x^2/2*s2+x^3/6*s3+x^4/24*s4+x^5/120*c1+x^6/720*c2+
x^7/5040*c3+x^8/8!*c4;
ss1[c1_,c2_,c3_,c4_]=s1+x*s2+x^2/2*s3+x^3/6*s4+x^4/24*c1+x^5/120*c2+x^6/720*c3+
x^7/7!*c4;
ss2[c1_,c2_,c3_,c4_]=s2+x*s3+x^2/2*s4+x^3/6*c1+x^4/24*c2+x^5/120*c3+x^6/720*c4;
ss3[c1_,c2_,c3_,c4_]=s3+x*s4+x^2/2*c1+x^3/6*c2+x^4/24*c3+x^5/120*c4;
zs[cc1_,cc2_,cc3_,cc4_]=z0+x*z1+x^2/2*z2+x^3/6*z3+x^4/24*z4+x^5/120*cc1+
x^6/720*cc2+x^7/5040*cc3+x^8/8!*cc4;
zs1[cc1_,cc2_,cc3_,cc4_]=z1+x*z2+x^2/2*z3+x^3/6*z4+x^4/24*cc1+x^5/120*cc2+
x^6/720*cc3+x^7/7!*cc4;
zs2[cc1_,cc2_,cc3_,cc4_]=z2+x*z3+x^2/2*z4+x^3/6*cc1+x^4/24*cc2+x^5/120*cc3+
x^6/720*cc4;
zs3[cc1_,cc2_,cc3_,cc4_]=z3+x*z4+x^2/2*cc1+x^3/6*cc2+x^4/24*cc3+x^5/120*cc4;
ki=1;
While[ki<=M,
  s0=0.; s1=0.; s2=tk;
  s3=-elfa*s0*s2-beta*(1-s1*s1);
  s4=-elfa*(s1*s2+s0*s3)+2*beta*s1*s2;
  z0=0.; z1=0.; z2=1.;
  z3=-elfa*(z0*s2+s0*z2)+2*beta*z1*s1;
  z4=-elfa*(s3*z0+s2*z1+s1*z2+s0*z3)+2*beta*(s2*z1+s1*z2);
  For[r=1,r<=L,
    c[1]=0.1;c[2]=-0.1;c[3]=0.01;c[4]=0.01; k=1;
    While[k<=M,
      For[i=1,i<=4, x=z[i]*h;
        f[i]=-(ss3[c[1],c[2],c[3],c[4]]+elfa*ss[c[1],c[2],c[3],c[4]]*ss2[c[1],c[2],c[3],c[4]]+
          beta*(1-ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]]*ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]]));
```

```

ja[i,1]=x^2/2+elfa*ss2[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^5/120+elfa*ss[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^3/6-
2beta*ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^4/24;
ja[i,2]=x^3/6+elfa*ss2[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^6/720+elfa*ss[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^4/24-
2beta*ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^5/120;
ja[i,3]=x^4/24+elfa*ss2[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^7/5040+elfa*ss[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^5/120-
2beta*ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^6/720;
ja[i,4]=x^5/120+elfa*ss2[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^8/8!+elfa*ss[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^6/6!-
2beta*ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]]*x^7/7!; i++;
q1=LinearSolve[Table[ja[i, j], {i, 4}, {j, 4}], {f[1],f[2],f[3],f[4]}];
c[1]=c[1]+q1[[1]];
c[2]=c[2]+q1[[2]];
c[3]=c[3]+q1[[3]];
c[4]=c[4]+q1[[4]]; k++;
x=z[4]*h;
spl[r]=ss[c[1],c[2],c[3],c[4]];
spl1[r]=ss1[c[1],c[2],c[3],c[4]];
spl2[r]=ss2[c[1],c[2],c[3],c[4]];
k=1; cc[1]=0.001;cc[2]=0.2;cc[3]=-0.2;cc[4]=0.01;
While[k<=M,
  For[i=1,i<=4, x=z[i]*h;
f1[i]=-(zs3[cc[1],cc[2],cc[3],cc[4]]+elfa*spl[r]*spl2[r]+
elfa*zs2[cc[1],cc[2],cc[3],cc[4]]*spl[r]-2beta*spl1[r]*zs1[cc[1],cc[2],cc[3],cc[4]]));
jo[i,1]=x^2/2+elfa*spl2[r]*x^5/120+elfa*spl[r]*x^3/6-2beta*spl1[r]*x^4/24;
jo[i,2]=x^3/6+elfa*spl2[r]*x^6/720+elfa*spl[r]*x^4/24-2beta*spl1[r]*x^5/120;
jo[i,3]=x^4/24+elfa*spl2[r]*x^7/5040+elfa*spl[r]*x^5/120-2beta*spl1[r]*x^6/720;
jo[i,4]=x^5/120+elfa*spl2[r]*x^8/8!+elfa*spl[r]*x^6/6!-2beta*spl1[r]*x^7/7!; i++;
q2=LinearSolve[ Table[jo[i, j], {i, 4}, {j, 4}], {f1[1],f1[2],f1[3],f1[4]}];
cc[1]=cc[1]+q2[[1]];cc[2]=cc[2]+q2[[2]];cc[3]=cc[3]+q2[[3]];cc[4]=cc[4]+q2[[4]]; k++;
su[r]=zs[cc[1],cc[2],cc[3],cc[4]];
su1[r]=zs1[cc[1],cc[2],cc[3],cc[4]];
su2[r]=zs2[cc[1],cc[2],cc[3],cc[4]];
s0=spl[r]; s1=spl1[r]; s2=spl2[r];
s3=-elfa*spl[r]*spl2[r]-2beta*(1-s1*s1);
s4=-elfa*(s1*s2+s0*s3)+2beta*-s1*s2;
z0=su[r]; z1=su1[r]; z2=su2[r];
z3=-elfa*(z0*s2+s0*z2)+2beta*-s1*z1;
z4=-elfa*(s3*z0+s2*z1+s1*z2+s0*z3)+2beta*(s2*z1+s1*z2);r++;
Print["Abs[spl1[L]-1]=",Abs[spl1[L]-1]];
tk=tk-(spl1[L]-1)/su1[L];
Print["tk=",tk," iterations ki=",ki]; ki++;
For[r=1,r<=L, t=z[4]*h+(r-1)*h; t=t*1;spl[r]=spl[r]*1; spl2[r]=spl2[r]/1;
Print[" x",r,"=",t," spl["",r,"]=",spl[r]," spl["",r,"]=",spl1[r]," spl["",r,"]=",spl2[r]];
r++; Print[" tk=",tk]

```

3-نتائج عددية: Numerical Results

نطبق الخوارزمية المقترحة لحل عدة مسائل خاصة لمعادلة فوكنر - سكان حيث تم تنفيذ الخوارزمية باستخدام برنامج Mathematica.11 واختصرنا التسمية لـ Math. لقد تم عرض النتائج العددية التي حصلنا عليها مع نتائج عددية لبعض الطرائق الأخرى للمقارنة وتوضيح الفعالية العددية.

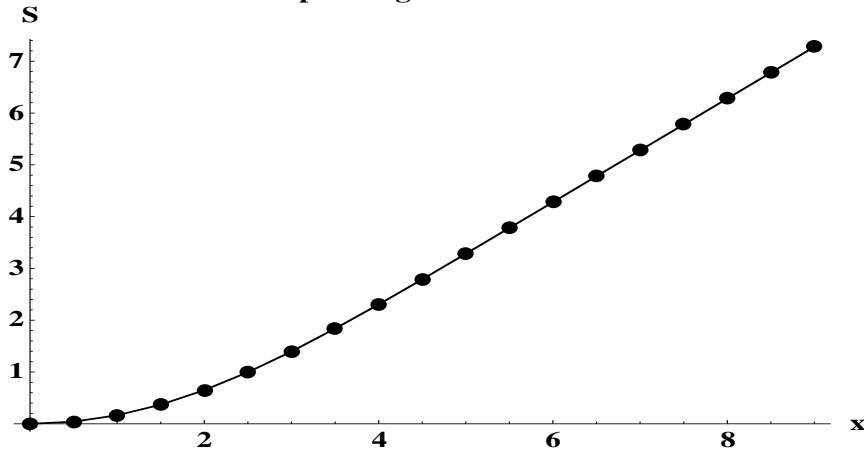
مسألة 1: مسألة تدفق بلاسيوس **Blasius** لأجل $\alpha = 0.5$, $\beta = 0$ [3,6,12,19]

نحل المسألة 1 بتطبيق خوارزمتنا المقترحة في المجال $[0, 9]$ بخطوه $h=0.5$ وندرج في الجدول (1) مقارنات لنتائجنا مع طرائق أخرى، وندرج أيضاً في الجدول (2) حل آخر للمسألة في المجال $[0, 2]$ بخطوة $h=0.2$.
نرسم في الأشكال (1)-(3) مسارات الحل العددي لقيم دالة الحل ومشتقيها الأول والثاني بتجزئة $N=18$.

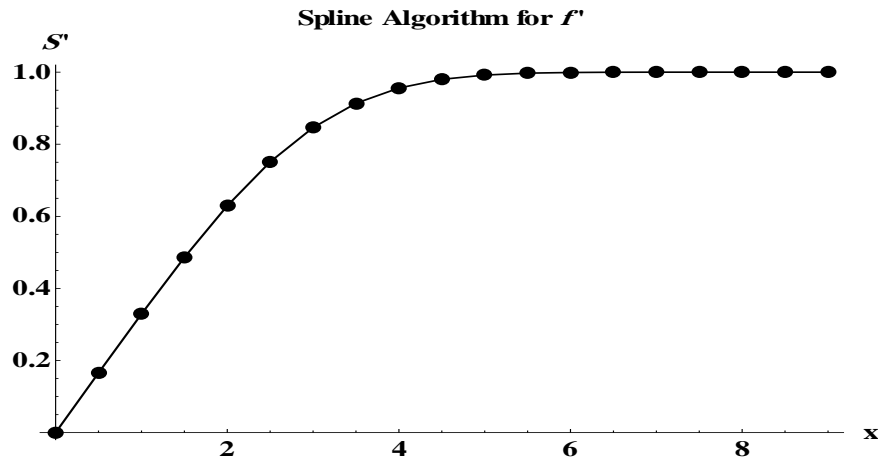
جدول (1): مقارنة الحل العددي لمسألة **Blasius** بالخوارزمية المقترحة مع طرائق أخرى [12,19].

η	الطريقة شبه الخطية 2018 [12]			طريقة الفروق المنتهية 2018 [19]			خوارزمية الطريقة الشرائحية المقترحة		
	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0	0.0000000	0.0000000	0.3320573	0.000000	0.000000	0.33206	0.0000000	0.000000	0.33206
1	0.1655734	0.3297851	0.3230071	0.16557	0.32978	0.32301	0.165572	0.32978	0.323007
2	0.6500308	0.6297758	0.2667516	0.65003	0.62977	0.26675	0.650024	0.629766	0.266752
3	1.3968230	0.8460622	0.1613603	1.39681	0.84605	0.16136	1.39681	0.846045	0.16136
4	2.3057710	0.9555380	0.0642341	2.30575	0.95552	0.06423	2.30575	0.955518	0.0642339
5	3.2833090	0.9915627	0.0159068	3.28333	0.99154	0.01591	3.28327	0.991542	0.0153831
6	4.2796670	0.9989942	0.0024020	4.27967	0.99897	0.00240	4.27962	0.998973	0.0020473
7	5.2792950	0.9999430	0.0002202	5.27925	0.99992	0.00022	5.27924	0.999922	0.0001373
8	6.2792810	0.9999994	0.0000124	6.27929	0.99999	0.00001	6.27921	0.999999	3.6356 E -6
9	7.2792900	1.0000000	4E -7	7.27922	1.00000	0.00000	7.27921	1.000000	7.451 E -9

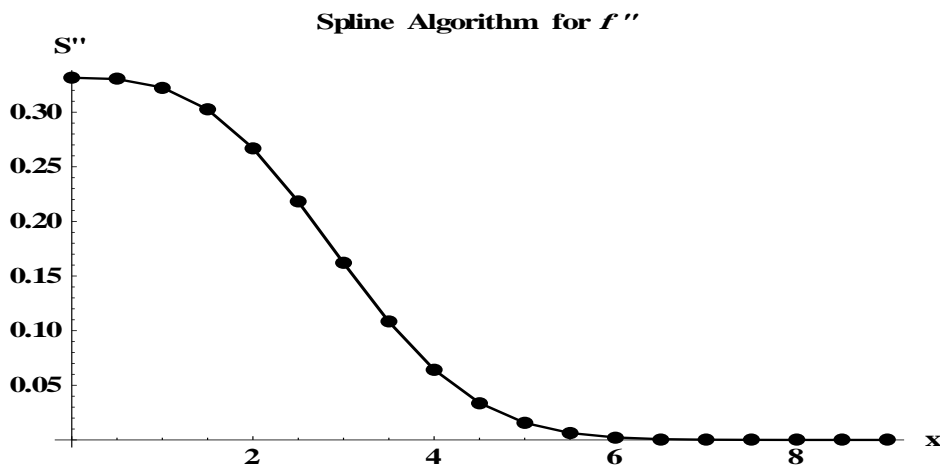
Spline Algorithm for f



الشكل (1): مسار الحل العددي لـ f الذي يمثل التدفق بالخوارزمية المقترحة في المجال $[0,9]$ بخطوة $h=0.5$.



الشكل(2): مسار الحل العددي لـ f' الذي يمثل سرعة التدفق بالخوارزمية المقترحة في المجال $[0,9]$ بخطوة $h=0.5$.



الشكل(3): مسار الحل العددي لـ f'' الذي يمثل اجهاد القص بالخوارزمية المقترحة في المجال $[0,9]$ بخطوة $h=0.5$.

جدول(2): مقارنة الحل العددي بالخوارزمية المقترحة لمسألة Blasius مع طرائق أخرى [6,3].

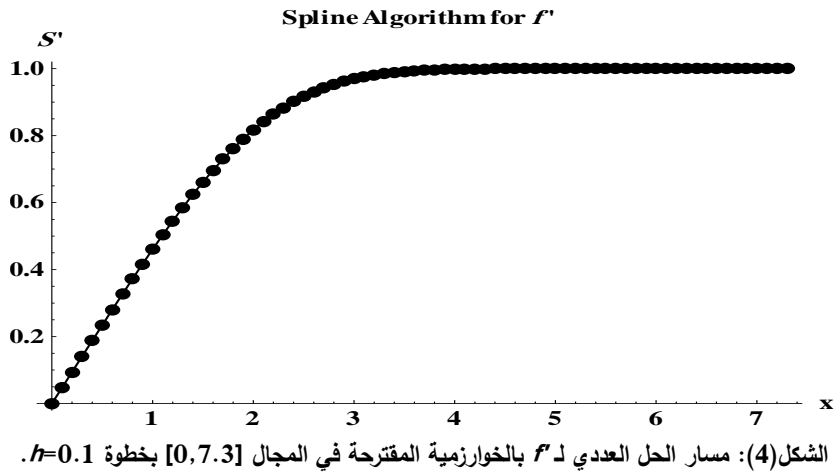
η	توابع برنولي المعدلة [6,2017]		خوارزمية الخطوة الثانية [3,2015]		خوارزمية الطريقة الشرائحية المقترحة		
	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0000000	0.0000000	0.331857
0.2	0.006644	0.066432	0.006451	0.063475	0.00663705	0.0663685	0.331789
0.4	0.026568	0.132802	0.025000	0.121094	0.0265444	0.132689	0.331294
0.6	0.059752	0.198989	0.054545	0.173554	0.0597009	0.198831	0.329936
0.8	0.106136	0.26473	0.094117	0.221453	0.106051	0.264581	0.327293
1.0	0.16557	0.329342	0.142857	0.265306	0.165488	0.329641	0.322970
1.2	0.237727	0.931765	0.200000	0.305556	0.237837	0.39364	0.316621
1.4	0.322059	0.450948	0.264865	0.342586	0.322844	0.456143	0.307973
1.6	0.322059	0.506112	0.336842	0.376731	0.420162	0.516671	0.296849
1.8	0.524207	0.556823	0.415385	0.408284	0.529347	0.574721	0.283191
2.0	0.64026	0.602947	0.500000	0.437500	0.649852	0.62979	0.267076

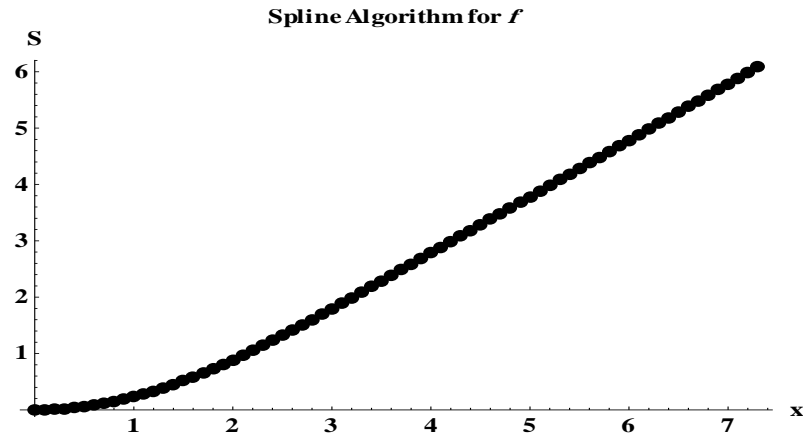
مسألة 2: مسألة تدفق بلاسيوس *Blasius* لأجل $\alpha = 1, \beta = 0$ [11,7]

نحل المسألة 2 بتطبيق خوارزمية الطريقة المقترحة في المجال $[0, 7.3]$ بخطوه $h=0.1$ ونسجل في الجدول (3) مقارنات لنتائجنا مع طرائق أخرى. نرسم في الأشكال (4)-(6) مسارات الحل العددي لقيم دالة الحل ومشتقها الأول والثاني بتجزئة $N=73$.

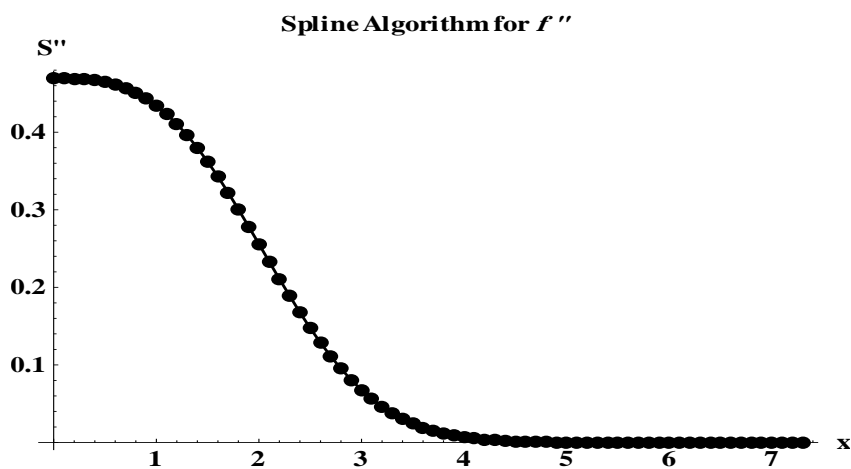
جدول (3): مقارنة الحل العددي بالخوارزمية المقترحة لمسألة 2 *Blasius* مع طرائق أخرى [11, 7].

η	الطريقة الشرائحية [11, 2010]			طريقة تحويل تفاضلي [7, 2005]			الطريقة الشرائحية المقترحة		
	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$	$f(\eta)$	$f'(\eta)$	$f''(\eta)$
0.00	0.00000000	0.00000000	0.4695999	0.0000000	0.0000000	0.4696000	0.00000000	0.00000000	0.469599988
0.10	0.00234798	0.0469590	0.4695632	0.002348	0.046959	0.469563	0.00234798	0.0469591	0.469563
0.20	0.00939141	0.0939052	0.4693060	0.009391	0.093905	0.469306	0.00939141	0.0939053	0.469306
0.30	0.02112753	0.1408056	0.4686087	0.021128	0.140806	0.468609	0.0211275	0.140806	0.468609
0.40	0.03754920	0.1876051	0.4672541	0.037549	0.187605	0.467254	0.0375492	0.187605	0.467254
0.50	0.05864268	0.2342274	0.4650303	0.058643	0.234228	0.465030	0.0586427	0.234227	0.46503
0.60	0.08438557	0.2805754	0.4617344	0.084386	0.280575	0.461734	0.0843856	0.280575	0.461734
0.70	0.11474475	0.3265323	0.4571774	0.114745	0.326532	0.457178	0.114745	0.326532	0.457177
0.80	0.14967451	0.3719632	0.4511900	0.149674	0.371963	0.451190	0.149675	0.371963	0.45119
0.90	0.18911487	0.4167177	0.4436280	0.189115	0.416718	0.443628	0.189115	0.416718	0.443628
1.00	0.23299009	0.4606325	0.4343791	0.232990	0.460633	0.434379	0.23299	0.460633	0.434379
1.50	0.51503153	0.6614738	0.3618045	0.515031	0.661474	0.361804	0.515032	0.661474	0.361805
2.00	0.88679682	0.8166946	0.2556691	0.886797	0.816695	0.255669	0.886797	0.816695	0.255669
2.40	1.23152762	0.9010654	0.1675603	1.231528	0.901065	0.167560	1.23153	0.901065	0.16756
3.00	1.79556791	0.9690546	0.0677103	1.795568	0.969055	0.067710	1.79557	0.969055	0.0677103
3.40	2.18746725	0.9879704	0.0305352	2.18746	0.987970	0.030535	2.18747	0.98797	0.0305353
3.80	2.58449878	0.9959442	0.0117587	2.584499	0.995944	0.011759	2.5845	0.995944	0.011758
4.00	2.78388646	0.9977700	0.0068741	2.783886	0.997770	0.006874	2.78389	0.99777	0.006874
4.40	3.18338270	0.9993966	0.0020840	3.183383	0.999397	0.002084	3.18338	0.999397	0.002084
4.80	3.58325406	0.9998594	0.0005384	3.583254	0.999859	0.000538	3.58325	0.999859	0.000538
5.00	3.78323452	0.9999358	0.0002577	3.783235	0.999936	0.000258	3.78323	0.999936	0.0002577
7.30	6.08321937	1.0000000	0.0000003	-----	-----	-----	6.08322	1.	3.04488 E-9





الشكل (5): مسار الحل العددي لـ f بالخوارزمية المقترحة في المجال $[0, 7.3]$ بخطوة $h=0.1$.

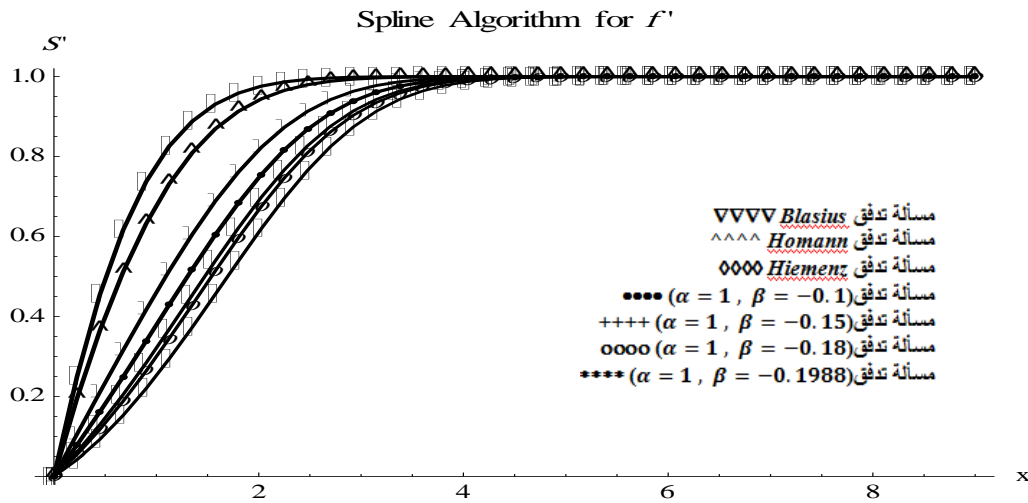
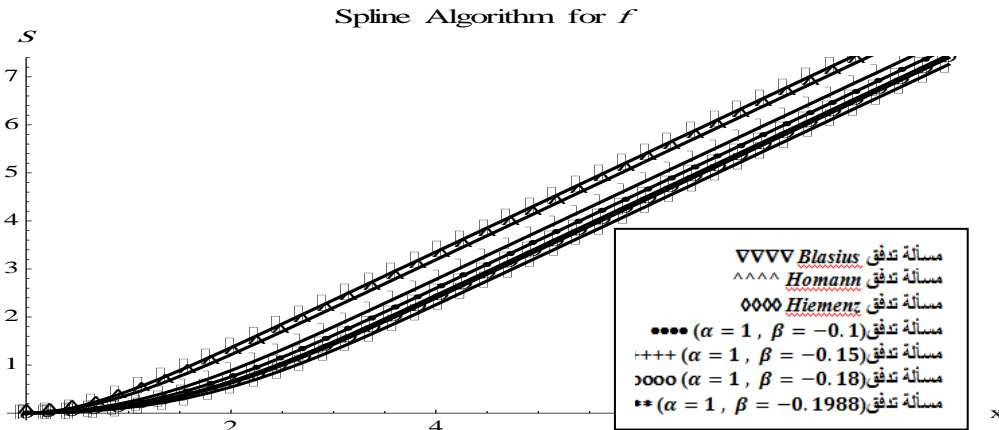


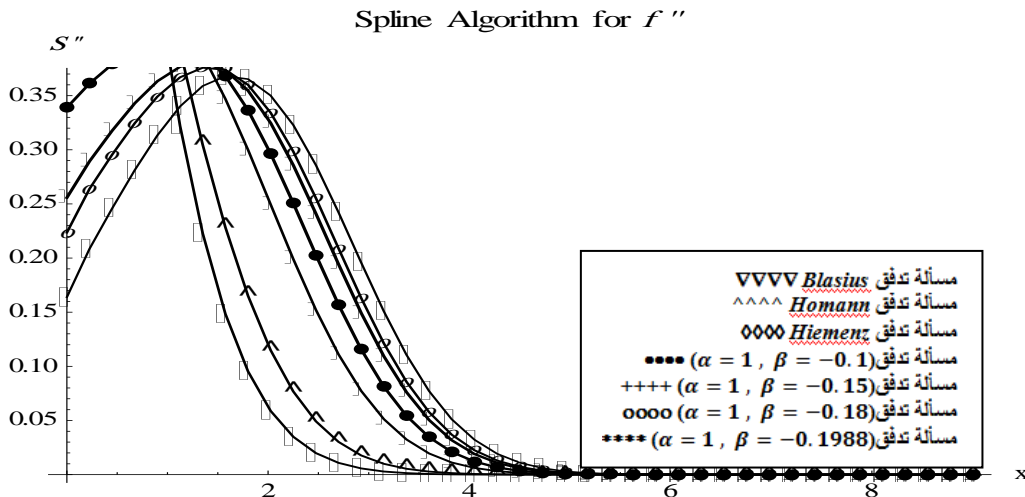
الشكل (6): مسار الحل العددي لـ f'' بالخوارزمية المقترحة في المجال $[0, 7.3]$ بخطوة $h=0.1$.

مسألة 3: مسائل تدفق مختلفة و حلول خاصة لأجل $\alpha = 1$, $\beta \in [-0.1988, 2]$ [20,17,14,10,9,5] نحل المسألة 3 بالخوارزمية المقترحة وهي مركبة من عدة مسائل خاصة منها مسألة تدفق Pohlhausen، Blasius، Hiemenz و Homann بتجزئة $N=40$ وندرج في الجدول (4) مقارنات لنتائجنا مع طرائق أخرى. نرسم في الأشكال (7)–(9) مسارات الحل الشرائحي العددي لقيم دالة الحل ومشتقها الأول والثاني لسبع مسائل. **ملاحظة:** تبين نتائج الجدول (4) والشكل (9) قيم اجهاد القص و مسارها.

جدول (4): مقارنة الحل العددي بالخوارزمية المقترحة للمسألة 3 مع طرائق أخرى مختلفة.

β	2014 Shooting[14]	2013 جينية[17]	2011 تشبيثشيف[10]	2009 شبه خطية[20]	2008 أدوميان[5]	طريقة تجميع تشبيثشيف[9,2014]	الطريقة الشرائحية المقترحة
2	1.687218	1.687014	1.687218	1.687218	1.683050	1.687218	1.687218
1	0.332059	1.232465	1.232588	1.232588	1.196315	-----	1.225980
0.5	0.927680	0.927570	0.927680	0.927680	0.807826	0.927680	0.925174
0.0	0.46900	0.469593	0.469601	0.469600	0.491960	-----	0.4690000
-0.1	0.31927	0.319572	0.319272	0.319270	0.320189	0.319270	0.3192712
-0.15	0.21631	0.217352	0.216376	0.216362	0.224771	0.216361	0.215469
-0.18	0.128637	0.129087	0.128682	0.128637	0.129001	-----	0.1286372
-0.1988	0.008416	0.006019	0.005270	0.005229	0.005227	0.005219	0.008416
1.15470			حل مسألة Pohlhausen بالطريقة الشرائحية المقترحة $\alpha = 0, \beta = 1$				

الشكل (7): مسار الحل العددي لـ f' بالخوارزمية المقترحة في المجال [0,9] بخطوة $h=0.225$ لمجموعة من المسائل.الشكل (8): مسار الحل العددي لـ f بالخوارزمية المقترحة في المجال [0,9] بخطوة $h=0.225$ لمجموعة من المسائل.



الشكل (9): مسار الحل العددي لـ f'' بالخوارزمية المقترحة في المجال $[0,9]$ بخطوة $h=0.225$ لمجموعة من المسائل.

الاستنتاجات والتوصيات :

تم تقديم خوارزمية عددية شرائحية لحل بعض المسائل الخاصة من نمط معادلة فوكنر-سكان، تم تحديد صيغة الحد الأعلى للخطأ وإثبات التقارب من المرتبة الثامنة. تم إجراء عدة اختبارات عددية لمسائل تدفقات مختلفة مشهورة وذات تطبيقات واقعية مثل مسألة تدفق بلاسيوس، وتدفق هومان، وتدفق هيمينز، وتدفق بوهل هاوسن وحالات خاصة متعددة. قمنا بمقارنات النتائج التي تم التوصل إليها بالخوارزمية المقترحة مع نتائج لطرائق أخرى في مراجع مختلفة [3,5-12,19,20] نذكر منها، طريقة شبه المنحرف الخطية [12,2018]، طريقة الفروق المنتهية [19,2018]، طريقة برنولي المعدلة [6,2017]، خوارزمية الخطوة الثانية [3,2015]، طريقة تجميع تشيبيشيف [9,2014]، طريقة شوتينغ [14,2014] ويوجد مقارنات مع طرائق أخرى، حيث أشارت المقارنات والنتائج المدرجة في الجداول (1)-(4) والأشكال (1)-(9) إلى أن خوارزمتنا المقترحة قدمت حلول ذات دقة عالية وجديرة بالاهتمام وهي قادرة على تقديم حلول عددية لأجل أي حالة خاصة من مسائل فوكنر-سكان. نظراً للفعالية والدقة العالية التي قدمتها الخوارزمية الشرائحية في إيجاد الحل العددي للمسألة المطروحة، نوصي باستخدامها لحل هذا النمط من المسائل، والاستمرار في هذا العمل لتطوير تقنيات شرائحية لإيجاد الحلول العددية لمعادلات نافيه-ستوكس (Navier-Stokes).

REFERENCES

1. ASAITHAMBI, A. A second-order finite-difference method for the Falkner-Skan equation. Appl. Math. and Comput. 156, 2004, 779-786.
2. ASAITHAMBI A., Solution of the Falkner-Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients, J.Comput. Appl. Math. 176, 2005, 203-214.
3. BOUGOFFA, B.; WAZWAZ, A.M. New approximate solutions of the Blasius equation, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, Vol. 25, No. 7, 2015, pp. 2590-1599.
4. CORTELL R., Numerical solutions of the classical Blasius flat-plate problem, Appl. Math. Compute., 170, 2005, 706-710.
5. ELGAZERY N.S., Numerical solution for the Falkner-Skan equation, Chaos Solit, Fract. Vol. 35, 2008, p. 738-746.

6. CALVERT, V.; RAZZAGHI, M. *Solutions of the Blasius and MHD Falkner-Skan boundary-layer equations by modified rational Bernoulli functions*, International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, **2017**, pp.1-27.
7. KUO, B. L. *Heat transfer analysis for the Falkner-Skan wedge flow by the differential transformation method*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 48, **2005**, 5036-5046.
8. KHANDELWA R. ; P. Kumawat; Y. Khandelwa. *Solution of the Blasius Equation by Using Adomian Kamal Transform*, Int. J. Appl. Comput. Math Vol. 5, No. 20, **2019**, 1-8.
9. KAJANI M. T., M. Maleki and M. Allame, *A Numerical Solution of Falkner-Skan Equation via a Shifted Chebyshev Collocation Method*, Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences. 1629, **2014**, pp.381-386.
10. LAKESTANI, M. *Numerical solution of the Falkner-Skan equation using Chebyshev cardinal functions*. Acta University Apulensis. 27, **2011**, 229-238.
11. MAHMOUD, S. M., *Numerical treatment of the Falkner-Skan equation using spline function approximations*. Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research-Basic Science Series, Vol. 32, No. 3, **2010**, 87-104.
12. NAJAFI, E. *Numerical quasilinearization scheme for the integral equation form of the Blasius equation*. Computational Methods for Differential Equations, Vol. 6, No. 2, **2018**, 141-156
13. PARAND, K.; TAGHAVI, A. *Rational scaled generalized Laguerre function collocation method for solving the Blasius equation*, J. Comput. Appl. Math., 233, **2009**, 980-989.
14. PARVEEN, S. *Numerical solution of the Falkner-Skan equation using shooting techniques*. IOSR Journal of Mathematics. Vol. 10, **2014**, 78-83.
15. RAHMAN M, *The Comparison between Analytical and Numerical Solutions of Blasius Equation on Boundary Layer Parallel Flow over a Flat Plate*, Journal of Scientific and Engineering Research, Vol.6, No. 2 , **2019**, pp.1-12.
16. RAHMANZADEH M., T. Asadi, M. Atashafrooz. *The Development and Application of the RCW Method for the Solution of the Blasius Problem*, J. Appl. Comput. Mech., Vol.6, No.1, **2019**, pp.105-111.
17. SAINI, I.; SINGH, PH.; MALIK, V. *Genetic Algorithm approach for solving the Falkner-Skan equation*. International Journal of Computer and Information Engineering. Vol. 7, No. 3, **2013**.
18. SAIBANNA B., *Two dimensional non Newtonian boundary layer flow over a flat plate with power law fluid with suction/injection through porous media*, International Journal of Engineering, Science and Mathematics, Vol. 7, No. 4, April **2018**, pp.407-420.
19. TEMIMI, H. ;Ben-Ramdhane, M. *Numerical solution of Falkner-Skan equation by iterative transformation method*. Mathematical Modelling and Analysis . Vol. 23, No. 1, **2018**, 139-151.
20. S. ZHU, Q.; WU; CHENG, X. *Numerical solution of the Falkner-Skan equation based on quasilinearization*, Appl. Math. and Comput, vol. 210, **2009**, p. 2472-2485.