

محاكاة عددية لحل جمل من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة

الدكتور سليمان محمد محمود*

الدكتور أحمد الوسوف**

أمينة أسعد***

(تاريخ الإيداع 3 / 11 / 2019. قُبل للنشر في 24 / 2 / 2020)

□ ملخص □

نقدم في هذا البحث تقنية عددية لمحاكاة حلول بعض المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة، تستخدم التقنية المقترحة كثيرات حدود من الدرجة الرابعة وأربع نقاط تجميع. قُدمت دراسة للاستقرار العددي بمتوسط المربعات بتطبيق التقنية على نموذج اختبار من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة باستخدام محاكاة عددية لعملية وينر العشوائية المستمرة مع الزمن. تبين الدراسة أن التقنية العددية المقترحة مستقرة ومتقاربة من المرتبة 3.5 عندما يتم تطبيقها لحل مسألة اختبار. كما تم اختبار التقنية المقترحة على مسائل اختبار خطية وغير خطية، وتشير نتائج العددي والمقارنات مع طرائق أخرى إلى فعالية وكفاءة الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية: معادلات تفاضلية عشوائية متأخرة، عملية وينر، حلول عددية، الاستقرار بمتوسط المربعات.

* أستاذ في قسم الرياضيات - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

E-mail: Suliman_mmn@yahoo.com

** أستاذ مساعد - قسم الاحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الاحصاء الرياضي - كلية العلوم - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Numerical Simulation to Solve Systems of Stochastic Delay Differential Equations

Dr. Suliman M. Mahmood*
Dr. Ahmad Al-Wassouf **
Amina Asaad ***

(Received 3 / 11 / 2019. Accepted 24 / 2 /2020)

□ ABSTRACT □

In this paper, we propose a numerical technique to simulate the solutions of some stochastic delay differential equations (SDDEs). The proposed technique uses polynomials of fourth degree with five collocation points. A mean-square stability of numerical technique is studied when was applied to a test model of SDDE with modeling continuous-time discrete wiener process. The study shows that the proposed numerical technique is stable and convergent from order third and half when applied to a test model.

The numerical accuracy of the proposed technique was tested by simulating the solution for three nonlinear linear test problems. Numerical results and comparisons with other methods indicated the effectiveness and efficiency of the proposed method.

Key Words: Stochastic Delay Differential Equations, Wiener Process, Numerical Solutions, Mean-Square Stability.

* Professor, Depart. of Mathematics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

E-mail: Suliman_mmm@yahoo.com.

** Assistant Prof, Depart. of Mathematical Statistics, Faculty of Science, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

*** Postgraduate student, Depart. of Mathematical Statistics, Tishreen Universty, Lattakia, Syria.

مقدمة:

تعد المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة (stochastic delay differential equations) إحدى الوسائل الأساسية لنمذجة عمليات الضجيج في الطبيعة (Noise Processes). في كثير من الأحيان لا تحدث في توقيت واحد التداخلات بين مكونات نظام أو شبكة، ومن الطبيعي أن هذا التأخير (Delay) يؤثر على توافق النماذج العشوائية. مثلاً: تباطؤ انتشار التفاعلات للمواد الكيماوية، انتقال موجة في الأوساط المختلفة.

إن التأخير سمة هامة موجودة في العديد من العمليات والظواهر، فمثلاً في الكيمياء الحيوية، يلعب التأخير دوراً بارزاً في ديناميكا الشبكات المنظمة وراثياً (Genetic regulatory networks) كالتي تنشأ بين المجموعة الأساسية لأول RNA m والبروتين. فالمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة يمكن استخدامها كتقريب لمحاكاة عمليات الولادة والموت مع التأخير.

كما ونجد لها أيضاً استعمالات وتطبيقات واسعة، في الاقتصاد المالي ومحاكاة أسعار البورصة وفي البيولوجيا لمحاكاة (حركة السكان، معدل النمو، معدل الوفيات، انتشار الأمراض والأوبئة، الخ)، في الفيزياء والكيمياء لمحاكاة (الضجيج الحراري - حركة جزيئات السوائل، انتشار الغازات، حركة الإلكترونات، حركة التفاعلات، الخ).

تعطى مسألة المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة كالتالي: [1]

$$\begin{cases} dX(t) = F(t, X(t), X(t - \tau))dt + G(t, X(t), X(t - \tau))dW(t); t \geq 0 \\ X(t) = \Psi(t); t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

حيث τ : ثابت تأخير وهو مقدار حقيقي موجب، $\Psi(t)$ دالة المعطيات الابتدائية، وتسمى الدالة $F: [0, T] \times R^n \times R^n \rightarrow R^n$ بدالة معامل الإزاحة للمعادلة التفاضلية العشوائية المتأخرة. وتدعى الدالة $G: [0, T] \times R^n \times R^n \rightarrow R^{n \times m}$ بدالة معامل الانتشار. ويرمز بالدالة $W(t)$ لعملية وينر Wiener Process القياسية من البعد m .

ويعبر $X(t)$ عن عملية عشوائية أو متغير عشوائي (Stochastic Process):

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T \in R^n$$

قدم الباحثون تقنيات عددية متنوعة وحديثة لمحاكاة حلول المسألة المطروحة نذكر منها:

قدم Cao وآخرون في [1] عام 2004 دراسة للاستقرار لطريقة اولر مارياما مطبقة لنموذج اختبار خطي من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة وتم تقديم الشروط المناسبة لضمان الاستقرار بمتوسط المربعات لطريقتهم المقترحة. قدم Zhao وآخرون في [11] عام 2014 تقنية استيفاء خطي لمحاكاة الحلول في الأزمنة المتأخرة كما تم تقدير الأخطاء المقطعة بمتوسط المربعات لتقنيات اولر مارياما. قدم Wang وآخرون في [7] عام 2015 طرائق θ مارياما لمحاكاة الحل لنموذج غير خطي من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة وتم في الدراسة إثبات أنه لأجل $\theta = 1$ يمكن الحفاظ على الاستقرار بمتوسط المربعات أيًا كان حجم الخطوة. قدم Cao وآخرون في [2] في العام ذاته دراسة مقارنة لتقارب ثلاث تقنيات عددية هي طريقة التنبؤ والتصحيح وطريقة النقطة الوسطى وطريقة مشابهة لطريقة ميلستين وتبين الدراسة أن الطريقة شبيهة ميلستين من المرتبة الأولى في حين أن الطريقتين الأخريين هما من المرتبة نصف.

درس Hu و Huang في [4] عام 2018 الاستقرار المقارب بمتوسط المربعات لطرائق θ ذات الخطوة المجزأة،

وتم تحديد شروط الاستقرار الكلي عندما تقع جذور المعادلة المميزة تقع جميعها داخل قرص الوحدة ورسم بعض مناطق الاستقرار. طبق Ali و Khan في [5] عام 2018 طريقة تجميع ليجندر الطيفية لمحاكاة الحل العددي لنموذج خطي من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة (نموذج نمو مجتمع الخلية)، استخدم الباحثان حدوديات ليجندر المتعامدة و عدد من النقاط التجميعية وتحولت المسألة إلى حل جملة معادلات جبرية بمعاملات ليجندر مجهولة. قدم Xiao و Dai في [3] عام 2019 طريقة Galerkin مع قاعدة فوربييه متعامدة وتم تقديم اختبار عددي لإثبات مرتبة التقارب القوي بمتوسط المربعات لطريقتهم المقترحة.

تكمن إشكالية البحث تكمن بنقطتين أساسيتين، المشكلة الأولى هي أن عملية وينر $W(t)$ كدالة عشوائية تدخل في صياغة المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة ومن المعلوم أن هذه الدالة غير قابلة للاشتقاق أو المكاملة، وبالتالي فإنه قد يكون من غير الممكن إيجاد حلول تحليلية أو عددية لمثل هذه المعادلات بالطرق التقليدية، وتعد هذه المشكلة إحدى أهم الصعوبات التي تواجه الباحثين في هذا المجال، أما المشكلة الثانية فتتمثل بوجود دالة تأخير في المسألة المطروحة وبالتالي سيجعل حلها أيضاً بالطرق التقليدية غير مألوف.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث بأن مسألة المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة المطروحة تعد نموذجاً مثالياً للكثير من الظواهر الطبيعية الحقيقية المختلفة، وبالتالي فإن محاكاة الحل لمثل هذا النموذج يؤدي إلى تفسير الحل للكثير من المسائل التي نجدها في الفيزياء، والكيمياء، وعلم الإحياء، والاقتصاد، الخ. ولكن الإشكالية التي تواجه الباحثين هي بعدم إمكانية وجود حلول تحليلية أو عددية بالطرق التقليدية المعروفة وذلك بسبب وجود الضجيج العشوائي الممثل بعملية وينر في هذه النماذج، ولهذا نهدف إلى تقديم تقنية عددية لمحاكاة الحل للمسألة المطروحة عددياً وتقديم الشروط الضرورية التي تضمن الاستقرار القوي بمتوسط المربعات للتقنية المقترحة.

طرائق البحث ومواده:

إن طرائق البحث هي خوارزميات عددية تعتمد على بعض تقنيات التحليل العددي، وعلى بعض المفاهيم الأساسية في علوم الاحتمالات والإحصاء، وفي الجبر الخطي لأن المسألة في إحدى مراحلها تتحول إلى منظومات جبرية، كما وتحتاج طرائق البحث إلى لغة برمجة متطورة لتنفيذ الخوارزميات للتقنية المقترحة، لهذا سنستخدم لغة البرمجة Mathematica.11 للحصول على النتائج العددية والرسوم البيانية.

النتائج والمناقشة:

1 تعريفات ومفاهيم أساسية

قبل البدء بعرض الموضوع نقدم بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية المتعلقة بمسألة المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة:

تعريف 1: عملية وينر (Wiener Process): [6]

إن عملية وينر القياسية هي متغير عشوائي $W(t)$ مستمرة مع الزمن معرفة على المجال الحقيقي $[0, T]$ ، تحقق الخصائص الخمس الآتية:

خاصة 1: من أجل كل t ، يكون توزيع المتغير العشوائي $W(t)$ توزيعاً طبيعياً بمتوسط Mean يساوي الصفر وتباين Variance يساوي t .

خاصة 2: إن $W(0) = 0$ باحتمال يساوي 1 .

خاصة 3: من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < T$ ، يكون الفرق $W(t_2) - W(t_1)$ متغير عشوائي موزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين $t_2 - t_1$ ، وهذا يكافئ العبارة الآتية:

$$W(t_2) - W(t_1) \sim \sqrt{t_2 - t_1} N(0,1)$$

حيث $N(0,1)$ يرمز لمتغير عشوائي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري.

خاصة 4: من أجل كل $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < T$ ، فإن الفرقين $W(t_2) - W(t_1)$ و $W(t_4) - W(t_3)$ يكونان متغيرين عشوائيين مستقلين.

خاصة 5: يمكن تمثيل عملية وينر $W(t)$ بمسارات مستمرة.

لقد أخذت عملية وينر هذا الاسم نسبة لـ نوربيرت وينر Norbert Wiener ، إذ قدمها في عام 1923 و تعد الصيغة الرياضية الدقيقة التي تمثل السلوك العشوائي لحركة براون التي كان قد وصفها عالم النبات روبرت براون Robert Brown عام 1827 ، والتي يطلق عليها اسم حركة براون ، أو عملية وينر نسبة إليهما . إن عملية وينر تكون حاسمة في نمذجة العمليات العشوائية لأنها تمثل التكامل للضجيج المثالي المستقل عن التكرار والمسمى بالضجة البيضاء .

2 محاكاة حاسوبياً لمسار عملية وينر المتقطعة:**Simulation of Discrete Wiener Process Path by Computer**

نجد أنه من المفيد جداً في التطبيقات الحاسوبية التعبير عن عملية وينر كعملية متقطعة، حيث تكون $W(t)$ محددة عند قيم منفصلة لـ t . لهذا نأخذ تجزئة منتظمة للمجال $[0, T]$ باستخدام خطوة $dt = \frac{T}{N}$ ، لأجل عدد صحيح موجب N ، حيث سنرمز بـ W_j لتشير إلى قيمة $W(t_j)$ عند $t_j = j dt$ ، $j = 0, 1, \dots, N$. وهكذا يتحقق لدينا من خصائص عملية وينر الآتية:

نجد أولاً أن $W_0 = 0$ باحتمال 1 . كذلك نجد أن:

$$W_j = W_{j-1} + dW_j, \quad j = 1, \dots, N$$

إذ إن كل dW_j هو متغير عشوائي مستقل له التوزيع $dW_j \sim \sqrt{dt} N(0,1)$ ، وبالتالي فإن $dW_j = \sqrt{dt} \text{ran}$ ،

حيث ran متغير عشوائي له التوزيع $N(0, 1)$. عندئذ يحسب التكامل العشوائي المشابه لتكامل ريمان كالتالي: [10]

$$\int_0^t f(s) dW(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

$$\lambda \in [0,1], \tau_k = (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1}, h = t_{k+1} - t_k,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

3 المحاكاة العددية للمعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة:

نستخدم تجزئة منتظمة لـ $[0, T]$ ، مجال حل المسألة (1) كآتي:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$$

حيث $dt = h = T/n$ و $i = 0, 1, \dots, n$ ، $t_i = i dt$ طول الخطوة، و n عدد صحيح موجب، ينتج لدينا متتالية من المجالات الجزئية:

$$[t_0 = 0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_k, t_{k+1}], \dots, [t_{n-1}, t_n = T] \quad (2)$$

نعرف كثيرة حدود من الدرجة الرابعة في كل مجال جزئي $I_k = [t_k, t_{k+1}]$ كآتي:

$$S_k(t) = S_k + (t-t_k)C_{k,1} + \frac{(t-t_k)^2}{2}C_{k,2} + \frac{(t-t_k)^3}{3!}C_{k,3} + \frac{(t-t_k)^4}{4!}C_{k,4} \quad (3)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

حيث $S_0 = X_0$ قيمة ابتدائية لدالة الحل $X(t)$ وهي معلومة من شروط البدء والمجاهيل $C_{k,j}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) يطلب تعيينها عند كل تكرار.

ويتفاضل كثيرة الحدود (3) بالنسبة لـ t نحصل على:

$$dS_k(t) = dt C_{k,1} + dt(t-t_k)C_{k,2} + dt \frac{(t-t_k)^2}{2}C_{k,3} + dt \frac{(t-t_k)^3}{3!}C_{k,4}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad (4)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

نعرف أربع نقاط تجميع بالشكل الآتي:

$$t_{k+h_j} = t_k + h_j dt, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

في كل مجال جزئي $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، مع وسطاء التجميع:

$$0 < h_1 < h_2 < h_3 < 1 \text{ and } h_4 = 1 \quad (6)$$

نقوم الآن بتطبيق كثيرات الحدود (3)-(4) مع نقاط التجميع (5)-(6) على مسألة الاختبار النموذجية من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة [Cao, 2004] المعطاة بالشكل:

$$\begin{cases} dX(t) = [aX(t) + bX(t-\tau)]dt + cX(t-\tau)dW(t), & t \geq 0 \\ X(t) = \Psi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (7)$$

حيث: $a, b, c \in R$ ، ينتج لدينا المنظومة التكرارية:

$$S'(t_{k+h_j})dt = [haS(t_{k+h_j}) + hbS(t_{k-m+h_j})] + cS(t_{k-m+z_j})dW(\tau_k), \quad (8)$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad m \leq k$$

مع الشروط الابتدائية:

$$X(t_{k-m+h_j}) = \Psi(t_{k-m+h_j}), \quad t_{k-m+h_j} \in [-t_m, 0] \quad (9)$$

حيث:

$$t_{k-m+h_j} \in [t_{k-m}, t_{k-m}], t_{k+z_j} \in [t_k, t_{k+1}], S(t_{k-m+h_j}) = S(t_{k+h_j} - mh), \quad \tau = mh; (j = 1, 2, 3, 4)$$

وبالتعويض عن قيم كثيرات الحدود في نقاط التجميع نكتب المنظومة (8) بالشكل:

$$\begin{aligned}
 & h(C_{k,1} + hh_j C_{k,2} + \frac{(hh_j)^2}{2} C_{k,3} + \frac{(hh_j)^3}{3!} C_{k,4}) = \\
 & ah[S_k + hh_j C_{k,1} + \frac{(hh_j)^2}{2} C_{k,2} + \frac{(hh_j)^3}{3!} C_{k,3} + \frac{(hh_j)^4}{4!} C_{k,4}] \\
 & + bh[S_{k-m} + hh_j C_{k,1} + \frac{(hh_j)^2}{2} C_{k,2} + \frac{(hh_j)^3}{3!} C_{k,3} + \frac{(hh_j)^4}{4!} C_{k,4}] + \\
 & c[S_{k-m} + hh_j C_{k,1} + \frac{(hh_j)^2}{2} C_{k,2} + \frac{(hh_j)^3}{3!} C_{k,3} + \frac{(hh_j)^4}{4!} C_{k,4}] dW_k; \quad j=1,2,3,4 \\
 & k=0,1,\dots,n-1
 \end{aligned} \tag{10}$$

نعيد كتابة المنظومة (10) بصيغة المصفوفات، فنحصل على الصيغة التكرارية الآتية:

$$(A - uB)\bar{C}_k = u\bar{S}_k + (v + c dW_k)B\bar{C}_{k-m} + (v + c dW_k)\bar{S}_{k-m}, \quad k=0,1,\dots,n-1 \tag{11}$$

حيث: $dW_k = \sqrt{dt} \text{ran}$ ، و ran متغير له التوزيع الطبيعي المعياري $N(0, 1)$ ، و $dt = h$ في التجزئة المستخدمة، وأن $u = ha, v = hb$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & h_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_1^3}{6} \\ 1 & h_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{h_2^3}{6} \\ 1 & h_3 & \frac{h_3^2}{2} & \frac{h_3^3}{6} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} h_1 & \frac{h_1^2}{2} & \frac{h_1^2}{6} & \frac{h_1^3}{24} \\ h_2 & \frac{h_2^2}{2} & \frac{h_2^2}{6} & \frac{h_2^3}{24} \\ h_3 & \frac{h_3^2}{2} & \frac{h_3^2}{6} & \frac{h_3^3}{24} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\bar{C}_k = \begin{bmatrix} h C_{k,1} \\ h^2 C_{k,2} \\ h^3 C_{k,3} \\ h^4 C_{k,4} \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_{k-m} = \begin{bmatrix} h C_{k-m,1} \\ h^2 C_{k-m,2} \\ h^3 C_{k-m,3} \\ h^4 C_{k-m,4} \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_k = \begin{bmatrix} S_k \\ S_k \\ S_k \\ S_k \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_{k-m} = \begin{bmatrix} S_{k-m} \\ S_{k-m} \\ S_{k-m} \\ S_{k-m} \end{bmatrix}$$

$$S_{k-m} = \Psi(t_{k-m}), \text{ for } t_{k-m} \in [-\tau, 0]$$

إن المنظومة (11) قابلة للحل من أجل $0 < h_1 < h_2 < h_3 < 1$ and $h_4 = 1$ ولتوضيح ذلك نأخذ على سبيل المثال القيم المعيارية $c=0.5, b=1, a=-1$ ويمكن تعيين متجه المجاهيل \bar{C}_k في كل مجال جزئي $[t_k, t_{k+1}]$ ، لأن المصفوفة $A - uB$ في المنظومة (11) غير شاذة حيث نجد:

$$Det(A - uB) = \frac{11520 + 57216h + 30612h^2 + 7421h^3 + 921h^4}{983040000} \neq 0, \quad \forall h \in]0,1]$$

4 الاستقرار بمتوسط المربعات: Mean-Square Stability

قبل البدء نقدم أولاً التعريف الآتي.

تعريف (2)[1]: يقال عن طريقة عددية إنها مستقرة بمتوسط المربعات، إذا وجد $h^* > 0$ ، وكان الحل العددي الناتج عن تطبيق الطريقة على مسألة اختبار يولد متتالية من التقريبات S_k تحقق:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E |S_k|^2 = 0$$

لأجل أي خطوة $h \in (0, h^*)$.

يتم حساب متجهة المجاهيل في المنظومة (11) بإعادة كتابتها بالشكل:

$$\begin{bmatrix} G & O \\ O & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \bar{C}_{k-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uI & O \\ O & (v + cdw_k)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_k \\ \bar{S}_{k-m} \end{bmatrix} \quad (13)$$

ومنه ينتج لدينا:

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \bar{C}_{k-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} uG^{-1} & O \\ O & (v + cdw_k)M^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_k \\ \bar{S}_{k-m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ومن جهة أخرى، باستخدام التقريب (3) في نقاط التجميع (5)-(6) ينتج لدينا المنظومة الآتية:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{k+1} \\ \bar{S}_{k+1-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_k \\ \bar{S}_{k-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \bar{C}_{k-m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

وبتعويض متجهة المجاهيل المحسوبة في العلاقة (14) في (15) نحصل على المنظومة التكرارية:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}_{k+1} \\ \bar{S}_{k+1-m} \end{bmatrix} = R(u, v, c, ran) \begin{bmatrix} \bar{S}_k \\ \bar{S}_{k-m} \end{bmatrix} \quad (16)$$

حيث $u = ha, v = hb, G = (A - uB), M = (v + c dw_k)B$ مصفوفة صفرية و I مصفوفة الوحدة وكلاهما من القياس 4×4 ، وكذلك المصفوفة $R(u, v, c, ran)$ من القياس 8×8 تعطى بالشكل:

$$R(u, v, c, ran) = \begin{bmatrix} I + uBG^{-1} & O \\ O & I + (v + cdw_k)BM^{-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ولدينا أيضاً:

$$E[dW_k] = 0, E[dW_k^2] = h, E[ran] = 1, dW_k = ran\sqrt{h}$$

وباستخدام مفهوم التوقع بمتوسط المربعات نحصل من المنظومة (16) على العلاقة التكرارية:

$$\bar{Y}_{k+1} = E[R^2(u, v, c, ran)] \bar{Y}_k \quad (18)$$

حيث

$$\bar{Y}_{k+1} = \begin{bmatrix} E[\bar{S}_{k+1}^2] \\ E[\bar{S}_{k+1-m}^2] \end{bmatrix}, \bar{Y}_k = \begin{bmatrix} E[\bar{S}_k^2] \\ E[\bar{S}_{k-m}^2] \end{bmatrix}$$

تسمى الدالة $\bar{R}(u, v) = E[R^2(u, v, c, ran)]$ بدالة الاستقرار بمتوسط المربعات للطريقة العددية.

تعريف (3) [12]: يقال عن طريقة عددية لها صيغة تكرارية من النمط (18) إنها مستقرة بمتوسط المربعات إذا كان نصف القطر الطيفي لمصفوفة الاستقرار يحقق $\rho(\bar{R}(u, v)) < 1$ ، حيث ρ يساوي إلى أكبر القيم المميزة للمصفوفة $\bar{R}(u, v)$ بالقيمة المطلقة.

واختيار القيم المعيارية $h=0.99, c=0.5, b=1, a=-1$ ، ولوسطاء التجميع $h_1=0.75, h_2=0.85, h_3=0.95$ والتي لا تؤثر على العمومية، نجد باستخدام لغة البرمجة Mathematica11 أن القيم المميزة بالقيمة المطلقة للمصفوفة $\bar{R}(u, v)$ تعطى كالاتي:

$$\{0.980495, 0.888388, 0.79922, 0.79922\}$$

$$\{0.544651, 0.544651, 0.39277, 0.000228577\}$$

و تقع جميعها داخل قرص الوحدة وبالتالي فإن نصف القطر الطيفي لمصفوفة الاستقرار يحقق المتراجحة

$$\rho(\bar{R}(u, v)) = \max_{j=1,2,\dots,8} |\lambda_j| < 1$$

وهكذا مما تقدم ينتج لدينا أن:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y_k\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{R}^k(u, v)\| \cdot \|Y_0\| = 0 \cdot \|Y_0\| = 0$$

نستنتج بحسب التعريفين (3) و (4) أن الطريقة المقترحة مستقرة .

كما وتستخدم دالة الاستقرار $\bar{R}(u, v)$ في تحديد منطقة الاستقرار للطريقة العددية وفق المتحولين الحقيقيين

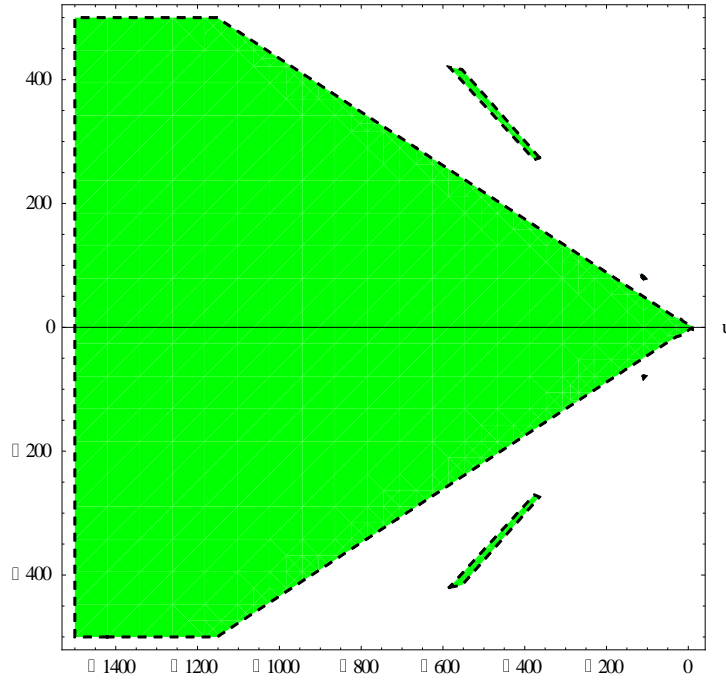
$u = ha =, v = hb$ وهي المنطقة من المستوي Opq التي ترسمها دالة الاستقرار التي تحقق المتراجحة:

$$\Omega(u, v) = \|\bar{R}(u, v)\| < 1$$

عندما تتحول $-\infty < v < \infty, -\infty < u < \infty$.

نرسم في الشكل (1) منطقة الاستقرار للطريقة العددية وهي المنطقة المظللة، وتشمل هذه المنطقة وتغطي معظم الجزء

الأيسر من المستوي، وهذا يدل على أن منطقة الاستقرار للطريقة واسعة جداً.



الشكل(1): منطقة الاستقرار العددية بمتوسط المربعات للطريقة العددية وهي المنطقة المظللة .

ملاحظة: تم اختيار القيم الآتية $h_1=0.75, h_2=0.85, h_3=0.95$ لوسطاء التجميع لأنها حددت أوسع منطقة من الاستقرار للتقنية العددية وسينعكس هذا إيجاباً على دقة النتائج العددية.

5 تقدير الخطأ بمتوسط المربعات Estimation of Mean-Square Error

تعريف(4)[10]: يقال عن متتالية الحل التقريبي $\{S_k\}$ ، $k=1,2,\dots,n$ المحسوبة بطريقة عددية وبطول خطوة h إنها متقاربة من المرتبة p بمتوسط المربعات إذا وجد ثابت موجب C مستقل عن طول الخطوة h بحيث يتحقق لدينا:

$$\max_{1 \leq k \leq n} (E(|X(t_k) - S_k|^2))^{1/2} \leq C h^p, \text{ as } h \rightarrow 0$$

حيث S_k هو الحل التقريبي عند $t_k=kh$.

بفرض أن $X(t) \in C^5[0, T]$ وأن $S_k(t)$ هي دالة التقريب المقترحة. وبتطبيق التقريب الشرائحي (3) في نقاط التجميع (5)-(6)، بحيث أن $S_k(t_{k+z_j}) \cong X(t_{k+z_j})$ و $S_0 \cong X_0$ ، نحصل على صيغة الخطأ المقطع الموضوعي للطريقة مطبقة لنموذج الاختبار (1) كالآتي:

$$\bar{\delta}_k = \begin{bmatrix} B & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_k \\ \bar{C}_{k-m} \end{bmatrix} + \bar{\Psi}_k, \quad k=0,1,\dots,n-1 \quad (19)$$

حيث

$$\bar{\Psi}_k = \begin{bmatrix} S_k - X(t_k + h_1h) \\ S_k - X(t_k + h_2h) \\ S_k - X(t_k + h_3h) \\ S_k - X(t_k + h) \\ S_{k-m} - X(t_{k-m} + h_1h) \\ S_{k-m} - X(t_{k-m} + h_2h) \\ S_{k-m} - X(t_{k-m} + h_3h) \\ S_{k-m} - X(t_{k-m} + h) \end{bmatrix},$$

وبتعويض متجهة المجاهيل المعطاة بالعلاقة (14) في (19)، نحصل على متجهة الخطأ الموضوعي:

$$\bar{\delta}_k = \begin{bmatrix} uBG^{-1} & O \\ O & (v + cdw_k)BM^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_k \\ \bar{S}_{k-m} \end{bmatrix} + \bar{\Psi}_k \quad (20)$$

وباستخدام منشور تايلور للدالة $X(t)$ حول t_k والتعويض في (20) ينتج لدينا:

$$\max_{1 \leq k \leq n} (E(\bar{\delta}_k^2))^{1/2} \leq \xi \frac{h^4}{24}, \quad \text{for } h \rightarrow 0$$

حيث ξ ثابت موجب يعطى بالشكل:

$$\xi = \text{Max}_{t \in [0, T]} |X^{(5)}(t)|$$

وبالتالي:

$$\|E_k\|_{\infty} = \frac{|X^{(5)}(t_k)|}{120} h^4 \equiv O_k(h^4) \quad (21)$$

حيث

$$X(t) = \sum_{i=0}^4 \frac{(t-t_k)^i}{i!} X^{(i)}(t_k) + X^{(5)}((t-t_k)^5); \quad x \in [t_k, t_{k+1}],$$

تم استخدام القيم المعيارية لوسطاء التجميع كالآتي $h_3=0.95$ ، $h_2=0.85$ ، $h_1=0.75$.

نلاحظ من العلاقة (21) أن الخطأ الموضوعي بمتوسط المربعات عند t_k من المرتبة الرابعة للطريقة العددية المطبقة لنموذج الاختبار، وأما الخطأ الشامل عند نهاية مجال الحل $[0, T]$ يقدر من أجل n خطوة وبالتالي فان:

$$\text{Error} = \left(\sum_{k=1}^n |O_k(h^4)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(n |O(h^4)|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} O(h^4) = \sqrt{\frac{T}{h}} \cdot O(h^4) \equiv O(h^{3.5})$$

حيث $O(h^4) = \text{Max}\{|O_k(h^4)|, k=1,2,\dots,n\}$

في النتيجة نجد بحسب التعريف (4) أن الطريقة العددية المقترحة تكون متقاربة بمتوسط المربعات من مرتبة $7/2$.

نتائج المحاكاة العددية: Numerical Simulation Results

نختبر فعالية التقنية العددية المقترحة بتطبيقها لمحاكاة الحل لبعض مسائل الاختبار القياسية المحلولة في مراجع مختلفة [2,5,9]، المسألة الأولى خطية والثانية والثالثة غير خطيتين. ولتوضيح الدقة والاستقرار العددي للطريقة المقترحة تمت مقارنة النتائج التي توصلنا إليها مع نتائج لطرائق أخرى تأتي على ذكرها لاحقاً. بحسب الخطأ القوي في الحل العددي بمتوسط المربعات عند نهاية مجال الحل باستخدام القانون: [2].

$$\rho_{h,T} = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |X_h(T, W_k^{(i)}) - X_{h/2}(T, W_k^{(i)})|^2 \right)^{1/2}$$

حيث ترمز $W_k^{(i)}$ لعملية وينر رقم i وترمز m لعدد المسارات.

المسألة 1: لنأخذ المسألة الأولى خطية مع ضجيج إضافي [5] كالآتي:

$$dX(t) = [aX(t) + bX(t-1)]dt + [\beta_1 + \beta_2 X(t) + \beta_3 X(t-1)]dW(t)$$

مع دالة التأخير الابتدائية:

$$X(t) = 1+t, \quad t \in [-1, 0]$$

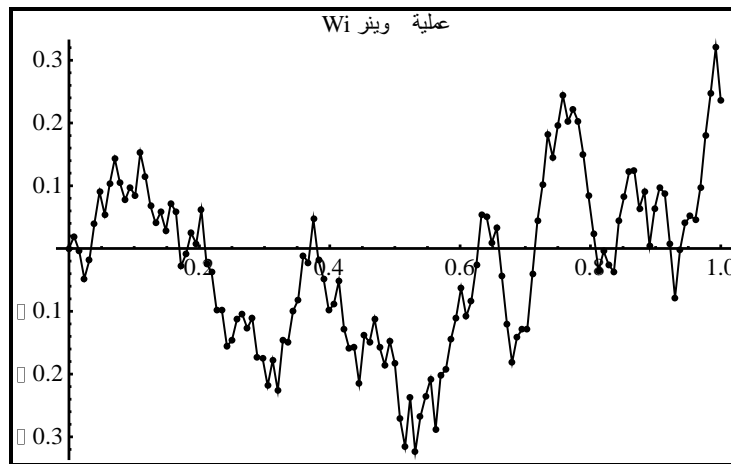
حيث $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ضجيج إضافي، ويعطى الحل التحليلي العشوائي كالآتي:

$$X(t) = \exp(at) \left(1 + \frac{b}{a^2} \right) - \frac{b}{a} t - \frac{b}{a^2} + \beta_1 \exp(at) \int_0^t \exp(-as) dW(s)$$

نحل المسألة وفق حالتين من الوسطاء الحالة الأولى: $a = -2, b = 0.1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ والحالة الثانية

$$dt = 2^{-k}, k = 5, 6, \dots, 9 \text{ و } \beta_1 = 0.1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, b = 0.1, a = -0.9$$

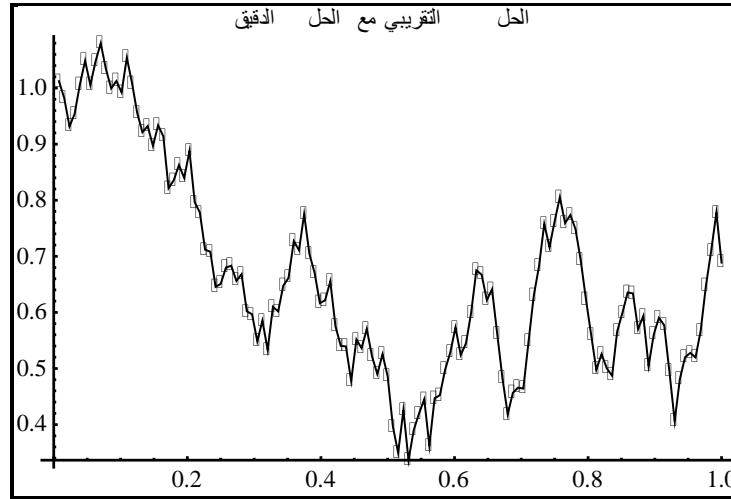
وتمت محاكاة مسار عملية وينر المنفصلة في المجال $[0, 1]$ ، من أجل $n=10^7$ ، موضحاً في الشكل (2). ونرسم في الشكل (3) محاكاة الحل العددي بالطريقة المقترحة للمطابقة مع الحل التحليلي. ندرج في الجدول (1) الأخطاء بمتوسط المربعات في الحل العددي للطريقة المقترحة والمقارنة مع طريقة ليجندر الطيفية وطريقة وتشبيتشيف الطيفية في المرجع [5].



الشكل(2): توليد عملية وينر العشوائية في المجال الزمني $[0, 1]$ لأجل $n=120$ نقطة.

الجدول 1: مقارنة الأخطاء بمتوسط المربعات في الحل العددي باستخدام الطريقة المقترحة مع طرائق أخرى

نقاط غاوص	طريقة ليجندر الطيفية [5]		طريقة تشبثشيف الطيفية [5]		طريقتنا المقترحة	
	الحالة الثانية	الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الأولى
3	0.0014	1.0983 E-04	4.38 E-02	3.1 E-03	0.000187856	486009 E-5
4	0.9635 E-03	2.1393 E-05	3.24 E-02	1.7349 E-05	5.63504 E-05	1.45803 E-5
5	3.9558 E-04	3.3902 E-06	5.7 E-03	5.5209 E-06	1.69051 E-05	2.37408 E -6
6	1.0095 E-04	4.5807 E-07	5.5 E-03	5.600 E-03	1.52146 E-06	3.93667 E-7
7	1.9067 E-05	6.1999 E-08	9.1 E-03	2.2626 E-05	4.56438 E-07	1.31222 E-8



الشكل (3): محاكاة الحل التقريبي مع الحل الدقيق في المجال الزمني [0,1] لأجل n=120 نقطة.

المسألة 2: لنأخذ في اختبارنا الثاني المعادلة التفاضلية العشوائية غير الخطية الآتية: [9]

$$dX(t) = [-2X(t) - X^3(t) + X(t-1)]dt + X^2(t) dW(t), \quad t \in [0,2]$$

مع الشرط الابتدائي

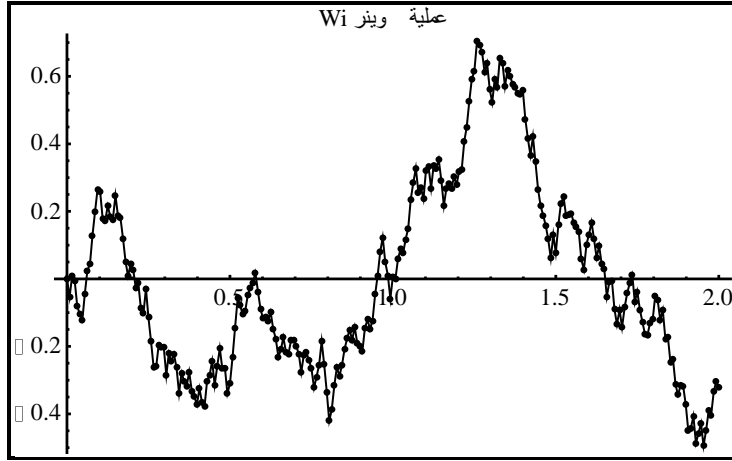
$$X(t) = 1, \quad t \in [-1, 0]$$

نرسم في الشكل (4) محاكاة مسار عملية وينر في المجال الزمني [0,2] لأجل n=256 نقطة. ونرسم في الشكل (5)

محاكاة عددية لحل المسألة 2 بالطريقة المقترحة في المجال الزمني [0,2] بخطوة $h = 2^{-8}$. ندرج في الجدول (2)

نتائج مقارنات معدلات أكبر الأخطاء في الحل العددي بالطريقة المقترحة والمقارنات مع طريقة Theta في [9]

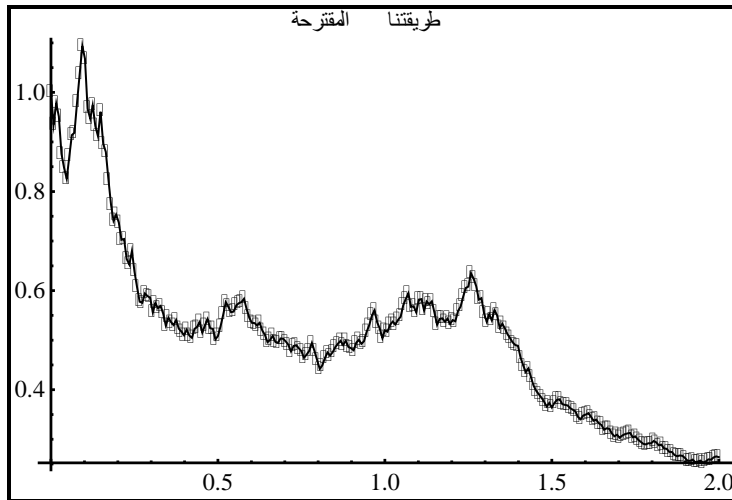
باستخدام الخطوات $dt = 2^{-k}, k = 6,7,\dots,10$.



الشكل(4): محاكاة عملية وينر العشوائية في المجال الزمني [0,2] لأجل $n=2^8$ نقطة.

الجدول 2: مقارنة معدلات الأخطاء باستخدام الطريقة المقترحة مع طرائق أخرى .

اسم الطريقة	$h = 2^{-6}$	$h = 2^{-7}$	$h = 2^{-8}$	$h = 2^{-9}$	$h = 2^{-10}$
الطريقة المقترحة	0.00407889	0.0021781	0.0011631	0.0006211	0.0003316
طريقة Theta [9]	0.0056293	0.0037120	0.0024775	0.0017213	0.0011661



الشكل(5): محاكاة عددية لحل المسألة 2 بالطريقة المقترحة في المجال الزمني [0,2] بخطوة $h = 2^{-8}$.

المسألة 3: لنأخذ أخيراً المعادلة التفاضلية العشوائية غير الخطية وفق صيغة Stratonovich الآتية: [2]

$$dX(t) = [-2X(t) + 2X(t - \tau)]dt + [\sin(X(t)) + X(t - \tau)] \circ dW(t), \quad t \in (0, T],$$

مع دالة التأخير الابتدائية:

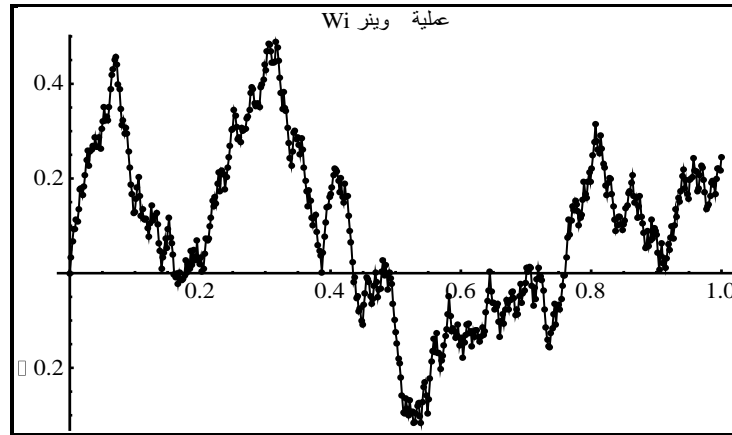
$$X(t) = t + \tau, \quad t \in [-\tau, 0]$$

نرسم في الشكل (6) محاكاة مسار عملية وينر في المجال الزمني [0,1] لأجل $n=512$. ونرسم في الشكل (7) محاكاة عددية لحل المسألة 3 بطريقتنا في المجال الزمني [0,1] بخطوة $h = 2^{-9}$ ، ونرسم في الشكلين (8)-(9) نتائج محاكاة

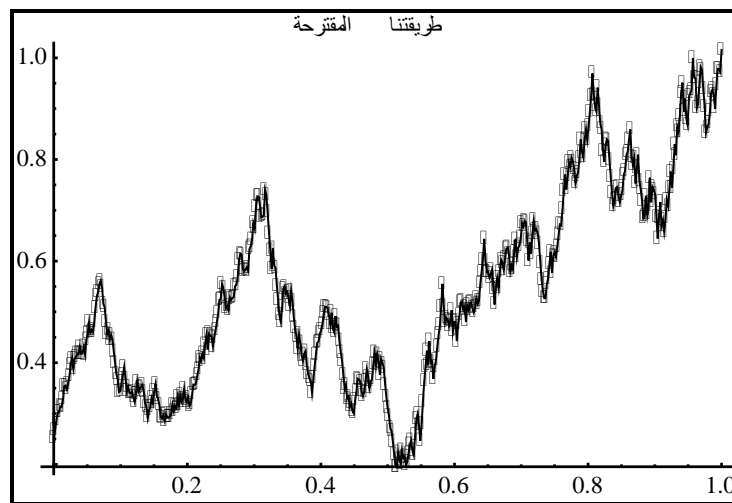
الأخطاء القوية في الحل العددي. نلخص في الجدول (3) نتائج مقارنات الأخطاء القوية ومرتببة التقارب للطريقة باستخدام الخطوات $dt = 2^{-k}, k=6,7,\dots,10$ والمقارنات مع طريقة النقطة الوسطى وطريقة التنبؤ والتصحيح في [2]. نستخدم صيغة الخطأ القوي في الحل التقريبي باستخدام تجزئة $2^7, 2^8, 2^9$ بالشكل:

$$Es^n = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^m |S_h^n(t_k) - S_{h/2}^{2n}(t_{2k})|^2 \right)^{1/2}$$

كما يعطى معدل التقارب القوي بالعلاقة: $Rate = \log_2 \left(\frac{Es^n}{Es^{2n}} \right)$



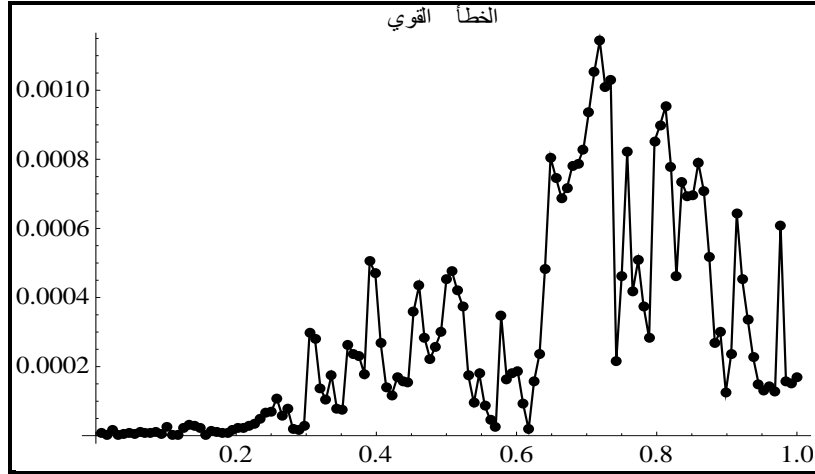
الشكل (6): محاكاة عملية وينر العشوائية لأجل $n=2^9$ نقطة.



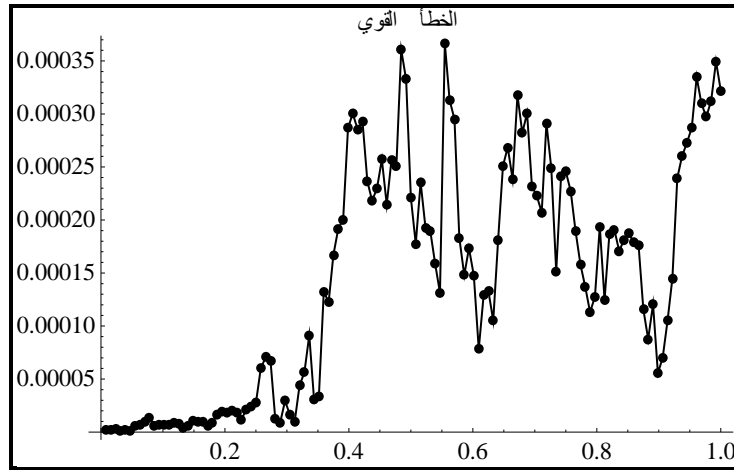
الشكل (7): محاكاة عددية لحل المسألة 3 بالطريقة المقترحة بخطوة $h = 2^{-9}$.

الجدول 3: مقارنة الأخطاء القوية ومرتببة الطريقة في الحل العددي باستخدام الطريقة المقترحة وطرائق أخرى

h	طريقة التنبؤ والتصحيح [2]		طريقة النقطة الوسطى [2]		طريقتنا المقترحة	
	مرتببة التقارب	الخطأ القوي $\rho_{h,T}$	مرتببة التقارب	الخطأ القوي $\rho_{h,T}$	مرتببة التقارب	الخطأ القوي $\rho_{h,T}$
2^{-7}	0.44	1.252E-02	0.45	1.263E-02	1.0878	1.65409 E-3
2^{-8}	0.51	9.219E-03	0.51	9.246E-03	1.1635	7.45803 E-4
2^{-9}	0.49	6.462E-03	0.48	6.471E-03	1.0690	2.30861 E-4
2^{-10}	Non	4.617E-03	Non	4.627E-03	1.3521	1.08623 E-4



الشكل(8): محاكاة للخطأ القوي E_S^n في الحل العددي للمسألة 3 بالطريقة المقترحة بتجزئة $n = 2^7$.



الشكل(9): محاكاة للخطأ القوي E_S^{2n} في الحل العددي للمسألة 3 بالطريقة المقترحة بتجزئة $2n = 2^8$.

الاستنتاجات والتوصيات:

قُدمت محاكاة عددية لحلول بعض النماذج من المعادلات التفاضلية العشوائية المتأخرة الخطية وغير الخطية باستخدام تقنية عددية اعتمدت على كثيرات حدود تقريبية من الدرجة الرابعة مع أربع نقاط تجميع، وعند تطبيق التقنية على مسألة اختبار من نفس النمط كانت مستقرة بقوة بمتوسط المربعات ومتقاربة من مرتبة تزيد عن الثالثة وقد نجحت في تقليد الحل التحليلي إلى حد كبير كما توضح الرسومات البيانية في الأشكال (2)-(9)، وكذلك تشير نتائج المقارنات لمعدلات الأخطاء في الجداول (1)-(3) إلى أن الطريقة المقترحة قدمت نتائج جديرة بالاهتمام بمقارنتها مع طريقتي ليجندر ونشيتشيف الطيفيتين في المرجع [5]، وطريقة Theta في [9]، و طريقتي النقطة الوسطى و التنبؤ والتصحيح في المرجع [2].

برنامج حاسوبي بلغة Mathematica11: تطبيق الطريقة العددية المقترحة لمحاكاة حل المسألة الأولى:

```
Clear[f, X, x, T, t, h1, h2, h3, c, r, n, Spl, W, z, a, b];
m = IntegerPart[2^7];
T = 1.0; n = m; dt = (T)/(n); h = dt;
```

```

a = -0.9; b = 0.1; b1 = 1.; b2 = 0; b3 = 0;
For[i = 0, i <= m, X[-m + i] = 1 + (-m + i) h; i++]
W[0] = 0;
dW[1] = Sqrt[dt]*RandomReal[{-1, 1}];
W[1] = W[0] + dW[1];
For[i = 2, i <= n + 1,
  dW[i] = Sqrt[dt]*RandomReal[{-1, 1}];
  W[i] = W[i - 1] + dW[i]; i++]
i = 1; X[0] = 1;
Ex[t_] = (1 + b/a^2) Exp[a h t] - (b/a) h t - b/a^2 +
  b1 Exp[a h t] Sum[Exp[-a s h]*(W[s + 1] - W[s]), {s, 0, t - 1}];
X0 = X[0]; X[1] = Ex[1];
For[i = 2, i <= n, t = (i) dt; X[i] = Ex[i]; i++]
ListPlot[Table[{i dt, W[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True, Mesh -> All,
  PlotLabel -> "Wi Wiener process ",
  PlotStyle -> {Black, PointSize[0.01]},
  AxesStyle -> Directive[Thickness[0.004], 12]]
Exact = ListPlot[Table[{i dt, X[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True,
  Mesh -> All, PlotLabel -> "Exact Solution"]
h1 = 0.75; h2 = 0.85; h3 = 0.95; z[1] = h1; z[2] = h2; z[3] = h3; z[4] = 1;
Off[LinearSolve::luc];
For [r = 1, r <= n ,
  For [i = 1, i <= 4, i++, x = z[i]*dt; t = x + dt*(r - 1);
    f[i] = a*dt*X0 + b*dt*X[-m + r - 1] + (b1 + b2*X0 + b3*X[-m + r - 1])*(W[r] - W[r - 1]);
    ja[i, 1] = dt*(1 - a*x) - b*x*(W[r] - W[r - 1]);
    ja[i, 2] = dt*(x - a*x^2/2) - b*x^2/2*(W[r] - W[r - 1]);
    ja[i, 3] = dt*(x^2/2 - a*x^3/6) - b*x^3/6*(W[r] - W[r - 1]);
    ja[i, 4] = dt*(x^3/6 - a*x^4/24) - b*x^4/24*(W[r] - W[r - 1]);
  ];
  c = LinearSolve[{
    {ja[1, 1], ja[1, 2], ja[1, 3], ja[1, 4]},
    {ja[2, 1], ja[2, 2], ja[2, 3], ja[2, 4]},
    {ja[3, 1], ja[3, 2], ja[3, 3], ja[3, 4]},
    {ja[4, 1], ja[4, 2], ja[4, 3], ja[4, 4]} },
    {f[1], f[2], f[3], f[4]} ];
  x = z[4]*dt;
  spl[r] = X0 + x*c[[1]] + x^2*c[[2]]/2 + x^3*c[[3]]/6 + x^4*c[[4]]/24;
  t = x + dt*(r - 1);
  X0 = X[r]; r++]
a1 = ListPlot[Table[{i dt, spl[i]}, {i, 0, n}], Joined -> True,
  Mesh -> All, PlotStyle -> {Black, PointSize[0.01]},
  PlotMarkers -> {"*"}, AxesStyle -> Directive[Thickness[0.004], 12],
  PlotLabel -> " The Approximate solution with Exact"]
Show[a1, Exact]
For[r = 0, r < n, t = dt*r;
  Print["t", r, "=", t, " ***Error= ", spl[r] - X[r],
  " Sp(t", r, ")=", spl[r], " Exact Xt=", X[r]], r++]

```


References

1. CAO W., M. LIU, Z. FAN, MS-Stability of the Euler–Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations, Applied Mathematics and Computation Vol. 159, 2004, pp. 127–135.
2. CAO W., Z. ZHANG, G. E. KARNIADAKIS, Numerical Methods for Stochastic Delay Differential Equations Via The Wong–Zakai Approximation, Siam J. Sci. Comput. Vol. 37, No. 1, **2015**, pp. A295–A318.
3. DAI X. , A. XIAO, Numerical Solutions of Nonautonomous Stochastic Delay Differential Equations by Discontinuous Galerkin Methods, Journal of Computational Mathematics, Vol.37, No.3, **2019**, pp.447–464.
4. HU P. and C. HUANG, Delay Dependent Stability of Stochastic Split-Step θ Methods for Stochastic Delay Differential Equations, Applied Mathematics and Computation Vol. 339, **2018**, pp. 663–674.
5. KHAN S. U. , I. ALI, Application of Legendre Spectral-Collocation Method to Delay Differential and Stochastic Delay Differential Equation, AIP ADVANCES 8, 035301, **2018**, pp.1-11.
6. MAHMOUD S. M. , A. AL-WASSOUF, A. EHSSAN, Numerical Simulation Stochastic of Differential Equations by Using Spline Function Approximations, Tishreen University Journal Research-Basic Science Series Vol. 38, No 6, **2016**.
7. WANG X., S. GANA, D. WANG, θ -Maruyama methods for nonlinear stochastic differential delay equations, Applied Numerical Mathematics 98 (2015) 38–58.
8. WANG P., A-Stable Runge–Kutta Methods For Stiff Stochastic Differential Equations With Multiplicative Noise, Comp. Appl. Math., 2014, pp.1-21.
9. YUE C., C. HUANG, Strong Convergence of the Split-Step Theta Method for Stochastic Delay Differential Equations with Nonglobally Lipschitz Continuous Coefficients, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2014, **2014**, pp.1-9.
10. ZHENG Y., Asset Pricing Based on Stochastic Delay Differential Equations, PHD Thesis, Iowa State University, **2015**.
11. ZHAO X., F. DENG, Sh. KUANG, Numerical Schemes for Stochastic Differential Equations with Variable and Distributed Delays: The Interpolation Approach, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2014, pp.1- 11 (2014).
12. MAHMOUD S. M. , A. AL-WASSOUF, A. EHSSAN, Studying mean-square stability of numerical method applied for solving models of stochastic differential equations, Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Basic Sciences Series Vol. 14, No. 5, **2019**.