إيجاد حلول دقيقة ذات موجة منعزلة ظاهرة
لمعادلة فاخنينكو- باركس ذات معاملات تابعة للزمن

د. رامز كروم *

(تاريخ الإيداع 1 / 3 / 2020. قُبِل للنشر في 21 / 6 /2020)

□ ملخّص □

يهدف البحث إلى تقديم حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة لمعادلة فاخنينكو- باركس ذات المعاملات التابعة للزمن باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي. تم وضع شروط على هذه المعاملات للحصول على هذا النوع من الحلول. وجدنا أن الطريقة فعالة للحصول هذا النوع من الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية.

الكلمات المفتاحية: معادلة فاخنينكو-باركس – موجة المنعزلة ظاهرة – طريقة فرضية الحل الموجي – أمواج بترددات عالية.

* أستاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية العلوم – جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.

البريد الالكتروني:d.karroum.r@gmail.com

Finding Exact Bright Soliton Solutions for Vakhnenko-Parkes Equation with Time-Dependent Coefficients

Dr. Ramez Karroum *

(Received 1 / 3 / 2020. Accepted 21 / 6 /2020)

□ ABSTRACT □

The aim of this research is to present exact analytical bright soliton solutions for Vakhnenko-Parkes equation with time-dependent coefficients by using the solitary wave ansatz method. Conditions for existence of these solutions basing on the coefficients of the equation are presented. We find that the used method is efficient to obtain this kind of solutions for the partial differential equations.

Keywords: Vakhnenko-Parkes equation – bright soliton - solitary wave ansatz method – high frequency waves.

* **Associate Professor, Departement of Mathematics, Faculty of Sciences, Tishreen University, Lattakia, Syria.**
E- mail: **d.karroum.r@gmail.com**

مقدمة

توصف العديد من الظواهر الفيزيائية غير الخطية وظواهر أخرى كما في الكيمياء وعلم الأحياء والهندسة بمعادلات تفاضلية جزئية غير خطية. ونظراً لأهمية الحلول الدقيقة لهذه المعادلات في وصف هذه الظواهر والتنبؤ بها والسيطرة عليها، كان البحث في ايجاد هذه الحلول محط اهتمام الكثير من الباحثين في مجال الفيزياء الرياضية، ولقد أحرز الفيزيائيون والرياضيون تقدماً ملحوظاً في هذا الاتجاه.

من هذه المعادلات لدينا معادلة فاخنينكو Vakhnenko التي قدمها فاخنينكو في عام 1992 في [1] وتأخذ الشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u + u = 0 \qquad (1)$$

وأوجد لها حلولاً ذات طبيعة موجية، وتصف هذه المعادلة الأمواج عالية التردد في وسط الارخاء[2]. في الآونة الأخيرة وفي عام 1998 بالتحديد أثبت كل من Parkes و Vakhnenko أن الشكل المختزل لمعادلة استروفيسكي [3]:

$$(u_t + c_0 u_x + \alpha u u_x)_x = \gamma u \qquad (2)$$

يمكن أن يتحول إلى شكل جديد:

$$u u_{xxt} - u_x u_{xt} + u^2 u_t = 0 \qquad (3)$$

سميت هذه المعادلة بمعادلة Vakhnenko–Parkes.

تم في السنوات الأخيرة استخدام العديد من الطرائق الفعالة لإيجاد حلول دقيقة، مثل تحويلات Hirota–Backlund في [4] وطريقة الانتشار العكسية [5,6] وطريقة الدالة الأسية [7] وطريقة منشور G'/G في [8] وطريقة تعويض معادلة برنولي في [9].

حديثاً حظيت دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية ذات المعاملات التابعة للزمن باهتمام كبير نظراً لقدرتها على وصف العديد من الظواهر الفيزيائية بشكل أكثر واقعية من المعاملات الثابتة، لذلك سنتناول في هذا البحث معادلة Vakhnenko–Parkes ذات المعاملات التابعة للزمن والتي تأخذ الشكل الآتي:

$$\alpha(t) u u_{xxt} + \beta(t) u_x u_{xt} + \gamma(t) u^2 u_t = 0 \qquad (4)$$

إذ أننا سنحاول إيجاد حلول دقيقة ذات موجة منعزلة ظاهرة (bright soliton) باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي (solitary wave ansatz) [10] وذلك نظراً للأهمية الكبيرة لهذه الحلول في المجالات الفيزيائية المختلفة.

أهمية البحث وأهدافه

يهدف هذا البحث إلى إيجاد حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة (bright soliton) لمعادلة فاخنينكو–باركس ذات المعاملات التابعة للزمن باستخدام طريقة فرضية الحل الموجي (solitary wave ansatz)، إذ يعد هذا البحث مهماً جداً للباحثين في مجال الفيزياء، لما يقدمه من فائدة كبيرة وخاصة أنه يعطي حلولاً ذات طبيعة فيزيائية فريدة لها العديد من التطبيقات وخاصة في الظواهر غير الخطية.

طرائق البحث ومواده

يندرج هذا البحث تحت اختصاص الرياضيات النظرية وخاصة المعادلات التفاضلية، لذلك فإن التقنيات المستخدمة هنا، تعتمد بشكل أساسي على طرائق حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية وحل جمل المعادلات الجبرية وبرامج الحسابات الرياضية.

النتائج والمناقشة:

ايجاد حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة *(bright soliton)* للمعادلة (4):

لنأخذ المتحول الموجي بالشكل المعمم الآتي:

$$\tau = B(t)(x - c(t).t) \tag{5}$$

حيث $c(t)$ سرعة الموجة المنعزلة، و$B(t)$ عرض معكوس للموجة المنعزلة وهما تابعان حقيقيان يحددان لاحقاً، ولإيجاد الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة سنتبع فرضية الحل الموجي المستخدمة في [10]، إذ سنفترض أن الحل يكتب بالشكل الآتي:

$$u(x,t) = \lambda(t)\,\mathrm{sech}^p\,\tau \tag{6}$$

حيث $\lambda(t)$ يمثل سعة الموجة المنعزلة (5) و p عدد صحيح موجب سيحدد لاحقاً خلال عملية إيجاد الحل.

سنقوم في البداية بإيجاد مشتقات العلاقة (6) الموجودة في المعادلة (4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d\lambda}{dt}\mathrm{sech}^p\,\tau - p\lambda\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right)\mathrm{sech}^p\,\tau\,.\tanh\tau \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -pB\lambda\,\mathrm{sech}^p\,\tau\tanh\tau \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{B}^2\lambda(p^2\,\mathrm{sech}^p\,\tau - p(p+1)\,\mathrm{sech}^{p+2}\,\tau) \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t} = (\mathrm{B}^2\frac{d\lambda}{dt} + 2\lambda B\frac{dB}{dt})(p^2\,\mathrm{sech}^p\,\tau - p(p+1)\,\mathrm{sech}^{p+2}\,\tau) +$$
$$\mathrm{B}^2\lambda\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right)(-p^3\,\mathrm{sech}^p\,\tau\,.\tanh\tau + p(p+1)(p+2)\,\mathrm{sech}^{p+2}\,\tau\,.\tanh\tau) \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} = -p\frac{d\lambda}{dt}B\,\mathrm{sech}^p\,\tau\,.\tanh\tau - p\lambda\frac{dB}{dt}\mathrm{sech}^p\,\tau\,.\tanh\tau +$$
$$B\lambda p^2\,\mathrm{sech}^p\,\tau\,(\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right) - \lambda B(p+p^2)\,\mathrm{sech}^{p+2}\,\tau\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right) \tag{11}$$

بتعويض العلاقات (7)−(11) في المعادلة (4)، نحصل على:

$$\alpha.\lambda\left(B^2\frac{d\lambda}{dt} + 2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)p^2\,\mathrm{sech}^{2p}\,\tau - \alpha\lambda\left(B^2\frac{d\lambda}{dt} + 2\lambda B\frac{dB}{dt}\right)p(p+1)\,\mathrm{sech}^{2p+2}\,\tau$$
$$-\alpha\lambda^2B^2p^3\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right)\mathrm{sech}^{3p}\,\tau\,.\tanh\tau +$$
$$+\alpha\lambda^2p(p+1)(p+2)B^2\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right)\mathrm{sech}^{2p+2}\,\tau\,.\tanh\tau$$
$$+\beta(\mathrm{sech}^{2p}\,\tau - \mathrm{sech}^{2p+2}\,\tau\left(p^2B^2\lambda\frac{d\lambda}{dt} + p^2\lambda^2B\frac{dB}{dt}\right)$$
$$-\beta p^3B^2\lambda^2\,\mathrm{sech}^{2p}\,\tau\,.\tanh\tau\,(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt})$$
$$+\beta p(p+p^2)B^2\lambda^2\,\mathrm{sech}^{2p+2}\,\tau\,.\tanh\tau\left(x\frac{dB}{dt} - \frac{d(Bc.t)}{dt}\right)$$

$$+\gamma\lambda^2\frac{d\lambda}{dt}\operatorname{sech}^{3p}\tau-\gamma p\lambda^3\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bc.t)}{dt}\right)\operatorname{sech}^{3p}\tau.\tanh\tau=0 \quad (12)$$

للموازنة بين u^2u_t مع $u\ u_{xxt}$ نساوي القوتين $3p$ و $2p+2$ أي قوتي $\operatorname{sech}^{3p}\tau.\tanh\tau$ و $\operatorname{sech}^{2p+2}\tau\tanh\tau$ على الترتيب، فنحصل على:

$$3p=2p+2 \quad (13)$$

ومنه:

$$p=2 \quad (14)$$

وبتعويضها في المعادلة (12) وجعل معاملات التوابع المستقلة خطياً مساوية للصفر نحصل على:

$$4\alpha\lambda B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda\frac{dB}{dt}\right)+4\beta\lambda B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt}\right)=0 \quad (15)$$

$$-6\alpha\lambda B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+2\lambda\frac{dB}{dt}\right)-4\beta\lambda B\left(B\frac{d\lambda}{dt}+\lambda\frac{dB}{dt}\right)+\gamma\lambda^2\frac{d\lambda}{dt}=0 \quad (16)$$

$$\lambda^2B^2(-8\alpha-8\beta)\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bc.t)}{dt}\right)=0 \quad (17)$$

$$(24\alpha\lambda^2B^2+12\beta B^2\lambda^2-2\gamma\lambda^3)\left(x\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bc.t)}{dt}\right)=0 \quad (18)$$

من المعادلة (17) إذا كان $\alpha(t)=-\beta(t)$، نعوّض في (15) نجد أن:

$$-4\beta\lambda\frac{dB}{dt}=0 \quad (19)$$

أي أن $\frac{dB}{dt}=0$ ومنه:

$$B(t)=B_0 \quad (20)$$

حيث B_0 ثابت.

بالتعويض في (16) نجد أن $\frac{d\lambda}{dt}=0$ ومنه:

$$\lambda(t)=\lambda_0 \quad (21)$$

أما إذا كان $x\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bc.t)}{dt}=0$ ، فإنه وبما أن $c(t)$ تابع فقط لِ t فإن $\frac{dB}{dt}=0$ ومنه نحصل على (20). وبالتالي لدينا:

$$c(t)=\frac{c_0}{t.B_0} \quad (22)$$

وبالتعويض في المتحول الموجي (5) نجد أن τ تابع فقط لِ x لذلك فإن هذا الخيار مرفوض أي أن $x\frac{dB}{dt}-\frac{d(Bc.t)}{dt}\neq 0$.

الآن بتعويض (20) و (21) في (18) مع مراعاة أن $\alpha(t)=-\beta(t)$ نحصل على:

$$12\alpha(t)B_0^2=2\gamma(t)\lambda_0 \quad (23)$$

ومنه:

$$B_0=\sqrt{\frac{\gamma(t)\lambda_0}{6\alpha(t)}} \quad (24)$$

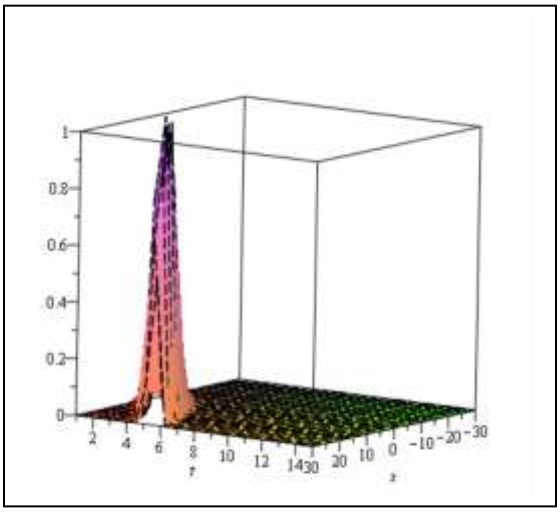
وبالتالي شروط وجود حل ذو موجة منعزلة ظاهرة للمعادلة (4) هو كون $\alpha(t)=-\beta(t)$ وأن $\gamma(t).\alpha(t)>0$.

و بتعويض (20) و (21) و (24) مع كون $\alpha(t)=-\beta(t)$ نحصل على حل ذو موجة منعزلة للمعادلة (4):

$$u(x,t)=\lambda_0\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{\gamma(t)\lambda_0}{6\alpha(t)}}(x-c(t).t)\right)$$

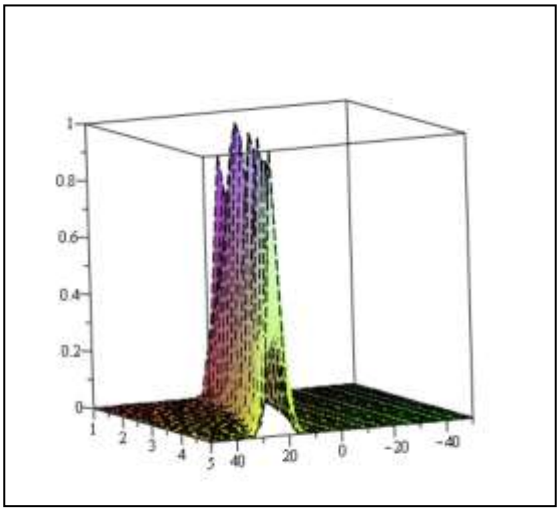
حيث $c(t)$ تابع حقيقي كيفي.

بأخذ $\alpha(t) = 1$ و $\beta(t) = -1$ و $\gamma(t) = 1$ نحصل على حل معادلة Vakhnenko–Parkes :
انظر الشكل (1) حيث أخذنا $\lambda_0 = 1$ و $c(t) = t$ و $-30 \le x \le 30$ و $1 \le t \le 15$.



الشكل (1) يوضح شكل الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة في حالة معاملات ثابتة

بأخذ $\alpha(t) = t$ و $\beta(t) = -t$ و $\gamma(t) = t$ نحصل على حل ذو موجة منعزلة ظاهرة للمعادلة (4)، انظر الشكل (2) حيث أخذنا $\lambda_0 = 1$ و $c(t) = t$ و $-50 \le x \le 50$ و $1 < t < 5$.



الشكل (2) يوضح شكل الحل ذو الموجة المنعزلة الظاهرة في حالة معاملات متحولة

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث دراسة وجود وإيجاد حلول ذات موجة منعزلة ظاهرة (bright soliton) لمعادلة فاخنينكو–باركس ذات المعاملات المتحولة التابعة للزمن، وقدمنا شرطاً لوجود مثل هذا النوع من الحلول على هذه المعاملات إذ وجدنا أنه يجب أن يكون $\alpha(t) = -\beta(t)$ وأن $\gamma(t).\alpha(t) > 0$ وأن $\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$ يساوي ثابت. كذلك تبين من خلال الدراسة أن السرعة $c(t)$ كيفية وغير مرتبطة بالسعة وهذا ما يعطي صفة soliton للموجة. بيّنت الدراسة فعالية طريقة فرضية الحل الموجي في الحصول على مثل هذه الحلول، كما نأمل أن تساعد هذه الحلول الفيزيائيين وخاصة العاملين في مجال الأمواج ذات الترددات العالية. تم استخدام برنامج *Maple* لإجراء العمليات الحسابية والرسومات البيانية.

Reference:

[1] VAKHNENKO, V. A. *Solitons in a nonlinear model medium*, Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 25, no. 15, 1992, pp. 4181–4187.

[2] VAKHNENKO, V. O. *High-frequency soliton-like waves in a relaxing medium*, Journal of Mathematical Physics, vol. 40, no.4, 1999, pp. 2011–2020.

[3] OSTROVSKY, L. A. *Nonlinear internal waves in a rotating ocean*, Oceanology, vol. 18, 1978, pp. 119–125.

[4] MORRISON, A. J. PARKES, E. J. and VAKHNENKO, V. O. *The N loop soliton solution of the Vakhnenko equation*, Nonlinearity, vol. 12, no. 5, 1999, pp. 1427–1437.

[5] VAKHNENKO, V. O. PARKES, E. J. and MICHTCHENKO, A. V. *The Vakhnenko equation from the viewpoint of the inverse scattering method for the KdV equation*, International Journal of Differential Equations and Applications, vol. 1, no. 4, 2000 pp. 429–449.

[6] VAKHNENKO, V. O. and PARKES, E. J. *The calculation of multisoliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method*, Chaos, Solitons & Fractals, vol. 13, no. 9, 2002, pp. 1819–1826.

[7] KOROGLU, C. and OZIS, T. *A novel traveling wave solution for Ostrovsky equation using exp-function method*, Computers and Mathematics with Applications, vol. 58, no. 11-12, 2009, pp. 2142–2146.

[8] ABAZARI, R. *Application of (G′/G)-expansion method to travelling wave solutions of three nonlinear evolution equation*, Computers & Fluids. An International Journal, vol. 39, no. 10, 2010, pp. 1957–1963.

[9] BASKONUS, H. M. BULUT, H. and EMIR. D. G. *Regarding New Complex Analytical Solutions for the Nonlinear Partial Vakhnenko-Parkes Differential Equation via Bernoulli Sub-Equation Function Method.* Mathematics Letters.Vol. 1, No. 1, 2015, pp. 1-9.

[10] BISWAS A. *1-Soliton solution of the K(m,n) equation with generalized evolution*, Phys Lett A (2008);372:4601–2.