

بناء موديل رقمي لحل معادلات المياه قليلة العمق (معادلات Saint-Venant) باستخدام طريقة العناصر المنتهية

الدكتورة نسرين محمد*

ايهاب مالك صالح**

(تاريخ الإيداع 20 / 8 / 2014. قَبِلَ للنشر في 20 / 10 / 2014)

□ ملخص □

باعتبار أن معادلات الجريان تخضع لعلاقات تفاضلية بمشتقات جزئية، فإن حل هذه المعادلات ليس بالأمر السهل باستخدام الطرق الرياضية المعروفة وقد يكون مستحيلاً في بعض الحالات بسبب طبيعة الشكل الهندسي الذي يتم الجريان حوله (مثل بدن السفينة) وتعقيد الشروط الحدية بالإضافة إلى وجود حدود غير مستقرة تبين تبعية النظام الفيزيائي المدروس لمتحول الزمن. لذلك يتم اللجوء حديثاً إلى الطرق الرقمية لحل هذا النوع من المعادلات مثل: طريقة العناصر المنتهية وطريقة التفاضلات المنتهية وطريقة الحجوم المنتهية وطريقة عناصر الحدود (BEM). ومع ذلك فإن استخدام هذه الطرق يتطلب معايير ضبط استقرارية الجملة من حيث التقريب الرقمي للحد غير المستقر وتحقق القانون الفيزيائي الذي يضبط الجملة وهنا يكمن محور هذا البحث.

الكلمات المفتاحية: معادلات المياه الضحلة، طريقة العناصر المنتهية، الشروط الحدية، طريقة Crank-Niklson في التقريب الرقمي.

* مدرسة - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
** قائم بالأعمال / معاون - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

Establishment of Numerical Model for solving shallow water equations(Saint-Venant equations) by using the finite element method

Dr. Nisrine Mohamad*
Ehab Saleh **

(Received 20 / 8 / 2014. Accepted 20 / 10 / 2014)

□ ABSTRACT □

Since the flow equations are governed by differential relations with partial derivatives, the solution of these equations is not easy by using known mathematical methods and it maybe impossible in some cases because of the nature of the geometric shape that the is flowing around (such as the hull of ship) and the complexity of the boundary conditions in addition to the existence of the unstable terms related to the unsteady physical system. So now they resort to the newly numerical methods, such as Finite Elements Method, Finite Differences Method, Finite Volumes Method and Boundary Elements Method (BEM) to solve this kind of equations. However, the use of these methods requires standards of controlling the stability of the system in the function of the numerical approximation of the unstable term as well as the verification of the physical law that controls the system and here lies the focus of this research.

Key Words: Shallow Water Equations, Finite Element, Boundary Conditions ,Crank-Nicklson method

* Assistant professor, Department of Marine Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Teaching Assistant, Department of Marine Engineering, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria

مقدمة:

إن الفهم الدقيق لطبيعة أمواج السطح الحر في المياه قليلة العمق ذو أهمية كبيرة في دراسة العديد من الظواهر الفيزيائية المرتبطة بشكل مباشر بالبيئة، بالإضافة إلى أهميتها من الناحية الاقتصادية، حيث تلعب آلية نشوء الأمواج في المياه قليلة العمق دوراً هاماً في تغير المقامات الهيدروليكية للسفن أثناء إبحارها الأمر الذي ينعكس على تغير استهلاك الوقود في السفن، لتأمين الإبحار بالسرعة الاستثمارية في المياه قليلة العمق. وبسبب صعوبة الحل الرياضي للمعادلات التفاضلية التي تحكم الجريان نتيجة تعقيد الشروط الحدية المفروضة من جهة وعدم استقرار الجريان من جهة ثانية، يتم اللجوء إلى الطرق الرقمية للحل كطريقة العناصر المنتهية التي تعد الأكثر شهرة في الوقت الحالي لحل جملة معادلات تفاضلية بمشتقات جزئية خطية أو غير خطية. نبين في هذه المقالة أن الحل الرقمي لمعادلات المياه الضحلة باستخدام طريقة العناصر المنتهية لا يعطي نتائج دقيقة من الناحية الفيزيائية، إلا إذا ترافق مع شرط معياري يضمن انحفاظ الطاقة الميكانيكية وهذا يتحقق فقط باستخدام التقريب الرقمي من نوع *Crank-Niklson* للحد غير المستقر، ونوضح أن التقريب الرقمي الضمني للحد غير المستقر لم يعد كافياً لضمان استقرارية الجملة الفيزيائية، على الرغم من عدم وجود نقاط شاذة في الشكل العام لبروفيل السرعة وارتفاع السطح الحر. ندرس أيضاً في هذه المقالة تأثير الشروط الحدية على طبيعة الحل.

أهمية البحث وأهدافه:

يهدف هذا البحث إلى محاكاة الجريان على السطح الحر في المياه قليلة العمق والتي تخضع لمعادلات المياه الضحلة باستخدام طريقة العناصر المنتهية. يعد هذا البحث من المشاريع البرمجية التي تحتاج إلى دقة في استخدام الطرق الرقمية من جهة مع الإحاطة الكافية بالقوانين الفيزيائية التي تضبط النظام المدروس، نهدف من خلاله إلى محاكاة انتشار أمواج المياه الضحلة باستخدام طريقة العناصر المنتهية مع ضبط شرط التقريب الرقمي للحد غير المستقر. تكمن أهمية هذا البحث بالقدرة على محاكاة عملية انتقال الملوثات في مناطق المياه قليلة العمق عن طريق ربط معادلات المياه الضحلة بمعادلات انتشار الملوث على الشكل الآتي [1]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} \vec{q} - f_v = 0, \quad \forall (x, y) \in S, \quad t > 0 \quad (1)$$

حيث أن:

C : تركيز الملوث $[kg/m^3]$.

f_v : حد يمثل مصدر مولد للتدفق أو ماص للتدفق $[kg/m^3 \cdot s]$.

\vec{q} : تدفق التلوث ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} C + \vec{V} C \quad (2)$$

V : حقل السرعة المحلي للجريان والذي سيتم تعويض السرعة الناتجة عن الحل الرقمي لمعادلات المياه الضحلة

فيه.

k : معامل الانتشار $[m^2/s]$.

الأمر الذي يسمح بالتنبؤ المسبق بالمناطق التي ستكون عرضة للتلوث، وتحديد زمن وصول التلوث إليها. من جهة ثانية، تعطي هذه الدراسة فكرة عن آلية نشوء الأمواج في المياه قليلة العمق والأمر الذي يسمح بدراسة تأثيرها

الفعال على تغير المقاومات الهيدروليكية للسفن أثناء إبحارها وانعكاس ذلك على استهلاك الوقود في السفن لتأمين الإبحار بالسرعة الاستثمارية في المياه قليلة العمق.

طرائق البحث ومواده:

طريقة البحث:

1. فهم طبيعة الجريان ووضع الموديل الرياضي الموافق.
2. البحث عن حلول خطية.
3. بناء حلقة نمذجة رقمية لتحويل المعادلة التفاضلية إلى عدد محدود من المعادلات الجبرية.
4. حل جملة المعادلات الجبرية في ضوء الشروط الحدية باستخدام MATLAB.
5. تحليل النتائج وفق القوانين الفيزيائية الموافقة.

مواد البحث:

i. استنتاج الشكل العام لمعادلات المياه الضحلة انطلاقاً من معادلات نافيه-ستوكس:

معادلات نافيه-ستوكس هي عبارة عن معادلات تفاضلية بمشتقات جزئية من المرتبة الثانية غير خطية تصف حركة جزيء مائع [2].

من أجل مائع نيوتوني غير قابل للانضغاط يعطى الشكل العام لهذه المعادلات وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \vec{U} \right) \vec{U} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \vec{g} \quad (3)$$

وترتبط مع معادلة الاستمرار لجريان غير قابل للانضغاط، والتي تعطى بالعلاقة الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \nabla \vec{U} = 0 \quad (4)$$

حيث إن:

ρ : الوزن النوعي للمائع المدروس [kg/m^3].

U : تمثل سرعة جزيء المائع المدروس [m/s].

p : الضغط [N/m^2].

g : تسارع الجاذبية الأرضية [m/s^2].

μ : معامل اللزوجة poiseuille.

$\vec{\nabla}$: عامل التدرج الشعاعي.

تصف معادلات المياه قليلة العمق تدفقات طبقات رقيقة من المائع وتُستنتج من معادلات نافيه - ستوكس كما

يلي:

تعطى علاقة قوة الضغط بدلالة تدرج ارتفاع عمود من المائع h [m] بالعلاقة الآتية:

$$\vec{\nabla} p = g \cdot \rho \cdot \vec{\nabla} h$$

نأخذ بعين الاعتبار أنه يمكن إهمال تغيرات السرعة ضمن الجريان في الاتجاه z ، بالتالي تبسط المعادلة (3)

إلى الشكل الآتي:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\rho g \frac{\partial h}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

لاشتقاق معادلة الارتفاع نكامل معادلة الاستمرار (4) بالاتجاه z:

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h + w_h - w_0 = 0$$

حيث إن: w_0 السرعة الرأسية في القاع و w_h السرعة الرأسية على سطح المائع.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h + w_h - w_0 = 0$$

ومنه:

$$w_h - w_0 = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h$$

من شرط الالتصاق: $w_0 = 0$.

$$w_h = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h$$

لكن من تعريف المشتق المادي لدينا:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{U}(\vec{\nabla}h)$$

ومنه:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}$$

من منشور تايلور يونغ، لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= w_h \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h \end{aligned}$$

باعتبار أن:

$$\|\mu \nabla^2 \vec{U}\| \ll \|\vec{\nabla} p\|$$

تصبح معادلات المياه الضحلة كما يأتي:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) h \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ii. الموديل الرياضي المبسط لمعادلات المياه الضحلة:

بسبب صعوبة إيجاد الحل الرياضي لمعادلات الجريان بشكل عام، يتم اللجوء إلى الفرضيات المبسطة التالية: نعتبر أن انتشار أمواج السطح الحر متناظر بالنسبة للمستوي المكون من المحورين الأفقي والشاقولي وهذه الفرضية تعد صحيحة فقط من أجل بروفيل قاع مستوي، في ضوء ذلك يتم إلغاء كافة المتحولات على المحور الانتقالي y ، بالتالي نحصل على المعادلتين:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

يمكن كتابة المعادلتين السابقتين على الشكل الآتي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} h \\ u \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (7)$$

نلاحظ أن هذه المعادلات ليست خطية بسبب وجود الحد $\frac{\partial hu}{\partial x}$ وبالتالي فإن الخطوة التالية هي البحث عن

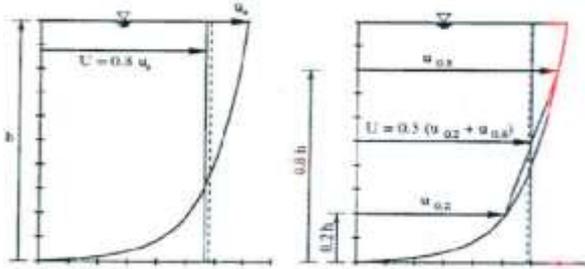
صيغة رياضية خطية لها [3]، نفرض أن:

$$h(x,t) = H_0 + \eta(x,t)$$

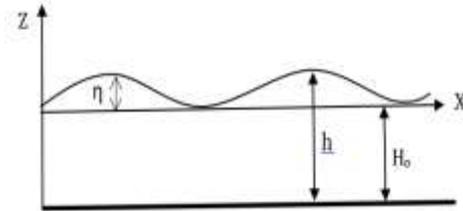
حيث إن:

H_0 = متوسط عمق القناة $[m]$ ، الشكل (1).

η = ارتفاع السطح الحر $[m]$ ، الشكل (1).



الشكل (2) بروفيل السرعة عند $x = const$



الشكل (1) يظهر الارتفاعات المميزة بالدراسة

$$u = U + \bar{u}$$

u : السرعة الكلية.

\bar{u} : سرعة موجة السطح الحر النسبية.

U : متوسط بروفيل السرعة عند $x = const$ ، عند مقطع يتعامد مع اتجاه الجريان.

$$U = \frac{1}{h} \int_0^h u(z) dz$$

يبين الشكل (2) بروفيل السرعة عند $x = const$ ، $u_{0.2}$ ، $u_{0.8}$ سرعة محلية على ارتفاعات تمثل $0.2h$ و

$0.8h$.

السطر العلوي للمعادلة (7) يكتب على الشكل الآتي:

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + (H_0 + \eta) \frac{\partial}{\partial x} (U + \bar{u}) + (U + \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} (H_0 + \eta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + U \frac{\partial H_0}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial H_0}{\partial x} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \eta \quad (8)$$

H_0 تمثل مقدار ثابت بالتالي:

$$\frac{\partial \eta \bar{u}}{\partial x} \ll 0, \quad \frac{\partial H_0}{\partial t} = \frac{\partial H_0}{\partial x} = 0$$

لأن $\eta \bar{u}$ تمثل مقدار صغير جداً ومن جهة ثانية لأنه يمثل تدفق ثابت وبالتالي اشتقاقه معدوم.

وبالتالي فإن المعادلة (8) تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

السطر السفلي للمعادلة (7) يكتب على الشكل الآتي:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{(U + \bar{u})^2}{2} + \frac{\partial}{\partial x} g(H_0 + \eta) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + 0.5 \frac{\partial U^2}{\partial x} + 0.5 \frac{\partial^2 U \bar{u}}{\partial x} + 0.5 \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + g \frac{\partial H_0}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} = 0 \leftarrow \text{تأخذ قيمة صغيرة جداً}$$

تصبح المعادلة (9):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

جملة المعادلات المطلوب حلها:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} + H_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (10)$$

يمكن كتابة جملة المعادلات (10) على شكل مصفوفي كما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \eta(x,t) \\ \bar{u}(x,t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} U & H_0 \\ g & U \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \eta(x,t) \\ \bar{u}(x,t) \end{Bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x,t) + [K] \frac{\partial}{\partial x} V(x,t) = 0; \quad V(x,t) = \begin{Bmatrix} \eta(x,t) \\ \bar{u}(x,t) \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$, [K] = \begin{bmatrix} U & H_0 \\ g & U \end{bmatrix}$$

iii. الموديل الرقمي:

لحل جملة المعادلات السابقة نستخدم طريقة العناصر المنتهية. يعتمد مبدأ هذه الطريقة على إضعاف التعبير الرياضي الممثل بجملة المعادلات (11) باستخدام طريقة الرواسب الترجيحية [4]، [6].
الحصول على التعبير الرياضي الضعيف يتم وفق الخطوات التالية:

$$1. \text{ نضرب المعادلة (11) بتابع تجريبي } \delta V^T(x) = \begin{Bmatrix} \delta \eta(x) \\ \delta \bar{u}(x) \end{Bmatrix} \text{ من نوع}$$

GALERKIN حيث إنتوابع الشكل هي نفسها المستخدمة للمتحويلات η و \bar{u} :

2. نكامل على طول المجال المدروس (المجرى المائي):

$$\int_0^L \delta V^T(x) \left[\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + [k] \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} \right] dx = 0$$

$$\int_0^L \delta V^T(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx + \int_0^L \delta V^T(x) [k] \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} dx = 0$$

3. التكامل بالتجزئة بهدف تخفيض درجة الاشتقاق للمتحول $V(x,t)$ إضافة إلى أخذ

الشروط الحدية بعين الاعتبار:

$$W = \int_0^L \delta V^T(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx + [\delta V^T(x) [k] V(x,t)]_0^L - \int_0^L \frac{\partial \delta V^T(x)}{\partial x} [k] V(x,t) dx = 0$$

iv. التقريب الرقمي:

- نقسم المجال المدروس إلى مجالات عنصرية صغيرة يطبق عليها التكامل.

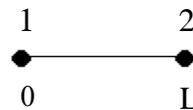
$$W = \sum_e W_{int}^e + W_{cl}$$

حيث أن:

$$W_{int}^e = \int_0^{Le} \delta V^T(x) \frac{\partial}{\partial t} V(x,t) dx + \int_0^{Le} \frac{\partial \delta V^T(x)}{\partial x} [K] V(x,t) dx \quad (12)$$

$$W_{cl} = [\delta V^T(x) [k] V(x,t)]_0^{Le} \quad (13)$$

- نختار عنصر منتهي خطي بعقدتين:



التقريب العقدي لارتفاع السطح الحر:

$$\eta(x,t) = \eta_1(t) \times N_1(x) + \eta_2(t) \times N_2(x)$$

حيث إن:

η_1, η_2 : ارتفاع السطح الحر عند العقدتين 1 و 2.

N_1, N_2 : توابع الشكل، وتعطى بالعلاقات:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{le}, \quad N_2 = \frac{x}{le}$$

حيث إن le : طول العنصر المنتهي.

التقريب العقدي لسرعة نقاط السطح الحر:

$$\bar{u}(x,t) = \bar{u}_1(t) \times N_1(x) + \bar{u}_2(t) \times N_2(x)$$

حيث إن:

\bar{u}_1, \bar{u}_2 : سرعتي العقدتين 1 و 2.

$$\delta V(x) = \begin{Bmatrix} \delta \eta(x) \\ \delta \bar{u}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \eta_1 \times N_1(x) + \delta \eta_2 \times N_2(x) \\ \delta \bar{u}_1 \times N_1(x) + \delta \bar{u}_2 \times N_2(x) \end{Bmatrix}$$

$$\delta V^T(x) = \langle \delta \eta(x) \quad \delta \bar{u}(x) \rangle$$

$$\delta V^T(x) = \langle \delta \eta_1 \times N_1(x) + \delta \eta_2 \times N_2(x) \quad \delta \bar{u}_1 \times N_1(x) + \delta \bar{u}_2 \times N_2(x) \rangle \Rightarrow$$

$$\delta V^T(x) = \langle \delta \eta_1 \quad \delta \bar{u}_1 \quad \delta \eta_2 \quad \delta \bar{u}_2 \rangle \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) \\ N_2(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) \end{bmatrix}$$

متحولات المسألة:

$$\begin{Bmatrix} \eta(x,t) \\ \bar{u}(x,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_1(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{Bmatrix}$$

الحد الأول في العلاقة (12) يحسب كما يلي:

$$\int_0^{L_e} \delta V^T(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx = \int_0^{L_e} \langle \delta \eta_1 \quad \delta \bar{u}_1 \quad \delta \eta_2 \quad \delta \bar{u}_2 \rangle \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) \\ N_2(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{Bmatrix} dx$$

$$\int_0^{L_e} \delta V^T(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx = \langle \delta \eta_1 \quad \delta \bar{u}_1 \quad \delta \eta_2 \quad \delta \bar{u}_2 \rangle [M_e] \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \bar{u}_1 \\ \eta_2 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}$$

حيث إن $[M_e]$ مصفوفة الكتلة وتعطى بعد تعويض توابع الشكل بقيمتها وتكاملها على المجال $[0 \quad L_e]$ بالعلاقة

الآتية:

$$[M_e] = \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بعد الانتهاء من حساب التكامل على مستوى عنصر منتهي واحد في العلاقة تتم عملية التجميع على عدد

العناصر المنتهية التي تم تقسيم المجال إليها.

الشكل العام لجملة المعادلات الناتجة من تكامل هذا الحد يكتب على الشكل الآتي:

$$\langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \quad \dots \delta\eta_n \quad \delta\bar{u}_n \rangle [VMG] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

حيث إن [VMG] مصفوفة الكتلة الكلية.

الحد الثاني في العلاقة (12) يحسب كما يأتي:

$$-\int_0^{L_e} \frac{\partial \delta V^T(x)}{\partial x} [K] V(x,t) dx =$$

$$-\int_0^{L_e} \langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \rangle \begin{bmatrix} N_1' & 0 \\ 0 & N_1' \\ N_2' & 0 \\ 0 & N_2' \end{bmatrix} [K] \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_2(x) & 0 \\ 0 & N_1(x) & 0 & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(x,t) \\ \bar{u}_1(x,t) \\ \eta_2(x,t) \\ \bar{u}_2(x,t) \end{bmatrix} dx$$

$$-\int_0^{L_e} \frac{\partial \delta V^T(x)}{\partial x} [K_e] V(x,t) dx = \langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \rangle [K_e] \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \end{bmatrix} \quad (14)$$

حيث إن [K_e] مصفوفة الصلابة العنصرية:

$$[K_e] = -0.5 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

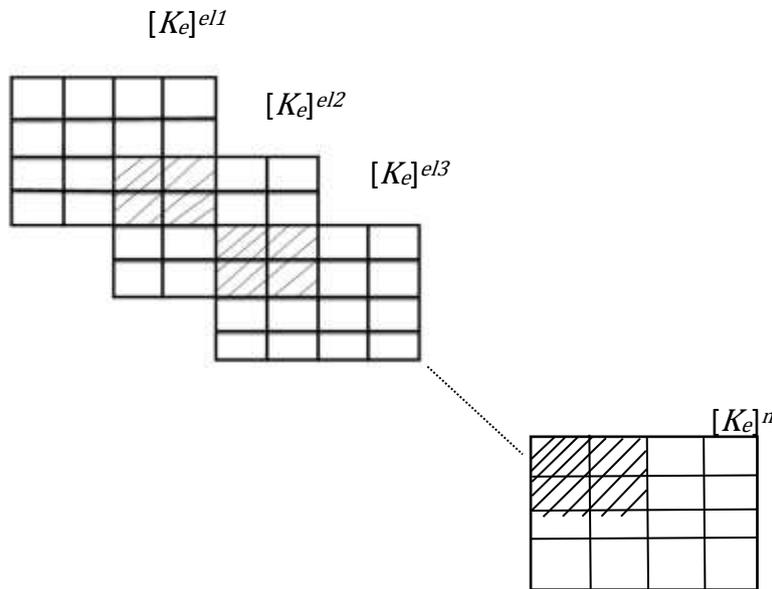
بعد الانتهاء من حساب التكامل على مستوى عنصر منتهي واحد في العلاقة (14) تتم عملية التجميع على

عدد العناصر المنتهية التي تم تقسيم المجال إليها.

الشكل العام لجملة المعادلات الناتجة من تكامل هذا الحد يكتب على الشكل التالي:

$$\langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \quad \dots \delta\eta_n \quad \delta\bar{u}_n \rangle [VKG] \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

حيث إن $[VKG]$ مصفوفة الصلابة الكلية .
يوضح الشكل الآتي طريقة تجميع مصفوفة الصلابة العنصرية.



الشكل (3) طريقة تجميع مصفوفات الصلابة العنصرية

التقريب الرقمي للعلاقة (12) يعطي العلاقة التالية:

$$W_{int} = \sum W_{int}^e = \langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \quad \dots \delta\eta_n \quad \delta\bar{u}_n \rangle [VMG] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix} + \quad (15)$$

$$\langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \quad \dots \delta\eta_n \quad \delta\bar{u}_n \rangle [VKG] \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

معالجة الشروط الحدية في العلاقة (13):

$$W_{cl} = \left[\delta V^T(x) [k V(x, t)] \right]_0^L =$$

$$\langle \delta\eta(x=L) \quad \delta\bar{u}(x=L) \rangle [k] \begin{bmatrix} \eta \\ \bar{u} \end{bmatrix}_{x=L} - \langle \delta\eta(x=0) \quad \delta\bar{u}(x=0) \rangle [k] \begin{bmatrix} \eta \\ \bar{u} \end{bmatrix}_{x=0}$$

$$W_{cl} = \langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \quad \dots \delta\eta_n \quad \delta\bar{u}_n \rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & & 0 & & & & & \\ 0 & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & U & H_0 \\ 0 & & & & & & g & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_{x=L} \\ \bar{u}_{x=L} \end{bmatrix}$$

$$-\langle \delta\eta_1 \quad \delta\bar{u}_1 \quad \delta\eta_2 \quad \delta\bar{u}_2 \quad \dots \delta\eta_n \quad \delta\bar{u}_n \rangle \begin{bmatrix} U & H_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g & U & & & & & & \\ 0 & & 0 & & & & & \\ 0 & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{x=0} \\ \bar{u}_{x=0} \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

باعتبار أن $W = W_{int} + W_{cl} = 0$

نلاحظ أن التابع التجريبي يمكن اختزاله من طرفي العلاقة (15) و (16).

وبالتالي فإن العلاقة (15) تكتب كما يلي:

$$W_{int} = \sum W_{int}^e = [VMG] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix} + [VKG] \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \bar{u}_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \\ \bar{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

يتم معالجة العلاقة السابقة وفق منشور تايلور-سيونغ كما يأتي [5]:

$$[VMG] \left[\frac{\begin{Bmatrix} \eta \\ \bar{u} \end{Bmatrix}^{n+1} - \begin{Bmatrix} \eta \\ \bar{u} \end{Bmatrix}^n}{\Delta t} \right] + [VKG] \left[(1-\alpha) \begin{Bmatrix} \eta \\ \bar{u} \end{Bmatrix}^n + \alpha \begin{Bmatrix} \eta \\ \bar{u} \end{Bmatrix}^{n+1} \right] = 0 \quad (17)$$

حيث إن معامل يأخذ القيم [0, 1, 0.5].

مناقشة:

• من أجل $\alpha = 0$

$$[VMG] \frac{\left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1} - \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n}{\Delta t} + [VKG] \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n = 0$$

وبالتالي فإن التقريب الرقمي للحد غير المستقر هو من النوع الصريح. في هذا النوع من التقريب الرقمي لا بد من دراسة الاستقرار للحل الرقمي الذي غالباً ما يرتبط بضبط خطوة الزمن Δt .

• من أجل $\alpha = 1$

$$[VMG] \frac{\left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1} - \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n}{\Delta t} + [VKG] \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1} = 0$$

نحصل على التقريب الرقمي من النوع الضمني والذي غالباً ما يعطي حلاً مستقراً بغض النظر عن الخطوة الزمنية.

• طريقة *Crank-Niklson* من أجل $\alpha = 0.5$

$$[VMG] \frac{\left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1} - \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n}{\Delta t} + [VKG] \frac{\left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n + \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1}}{2} = 0$$

آلية الحل:

تكتب المعادلة (17) كما يأتي:

$$([VMG] + \alpha \cdot \Delta t \cdot [VKG]) \left(\left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1} - \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n \right) = -\Delta t [VKG] \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n$$

$$[Vkt] = [VMG] + \alpha \cdot \Delta t \cdot [VKG]$$

$$\Delta \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\} = \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^{n+1} - \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n$$

حيث إن Δ تمثل الفرق بين قيمتي الارتفاع في السطح الحر والسرعة النسبية \bar{u} بين اللحظتين الزمنية n و $n+1$.

$$\frac{[Vkt] \Delta \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}}{\Delta t} + [VKG] \left\{ \frac{\eta}{\bar{u}} \right\}^n = 0$$

حيث إن الطرف الأيمن من هذه المعادلة يوافق شعاع التحريض العنصري $\{vfg\}$ ويكون غير معدوم بعد إدخال الشروط الحدية.

$$\frac{[Vkt] \Delta \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}}{\Delta t} + [VKG] \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}^n = \{vfg\} \Rightarrow$$

$$\frac{[Vkt] \Delta \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}}{\Delta t} = \{vfg\} - [VKG] \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}^n$$

$$res = \{vfg\} - [VKG] \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}^n$$

تصبح العلاقة السابقة على الشكل الآتي:

$$\frac{[Vkt] \Delta \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}}{\Delta t} = \{res\} \Rightarrow \Delta \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\} = \frac{\Delta t \times \{res\}}{[Vkt]}$$

تسمح لنا هذه العلاقة باستخراج الحل في اللحظة الزمنية $n+1$ من خلال العلاقة الآتية:

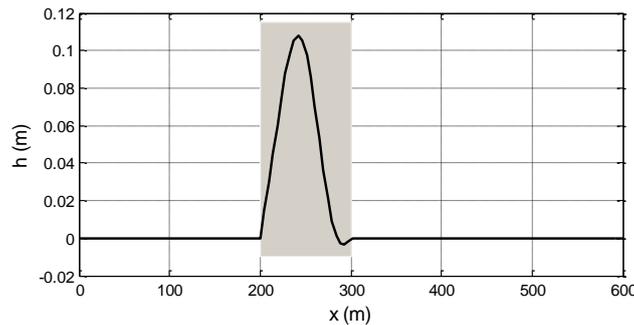
$$\left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}^{n+1} = \Delta \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \eta \\ \bar{u} \end{matrix} \right\}^n$$

تحتاج العلاقة السابقة لتعريف الشرط الابتدائي الموافق للحل في اللحظة $t=0$.

بفرض أن السطح الحر يخضع للمعادلة التالية التي تمثل موجة منفردة نختار رياضياً مكان توضعها في المجال

كما هو مبين في الشكل (4) ووفق المعادلة الآتية: $\left[\frac{L}{3}, \frac{L}{2} \right]$

$$h(x) = \frac{1}{10} \left(\sin\left(\frac{2 \times x \times \pi}{L/3}\right) + \left(\frac{3}{10} \sin\left(\frac{4 \times x \times \pi}{L/3}\right)\right) \times \left(1 - \cos\left(\frac{2 \times x \times \pi}{L/3}\right)\right) \right)$$



الشكل (4) ارتفاع السطح الحر في اللحظة $t=0$

الشروط الحدية:

عند $x = 0$ ، قيمة ارتفاع السطح الحر (η) محدودة بقيمة معينة بحيث يكون تغيره معدوماً بين لحظتين

زمنيتين.

عند $x = L$ ، السرعة \bar{u} غير محدودة بقيمة معينة.

الطاقة الكامنة والحركية:

وتعطي الطاقة الكامنة بالعلاقة الآتية:

$$E_p = \int_D \rho \cdot g \cdot z \cdot dV = \int_{x=0}^L \rho \cdot g \int_{z=0}^{\eta} z \cdot dz \cdot dx = \rho \cdot g \int_0^L \frac{\eta^2}{2} \cdot dx$$

وتعطي الطاقة الحركية بالعلاقة الآتية:

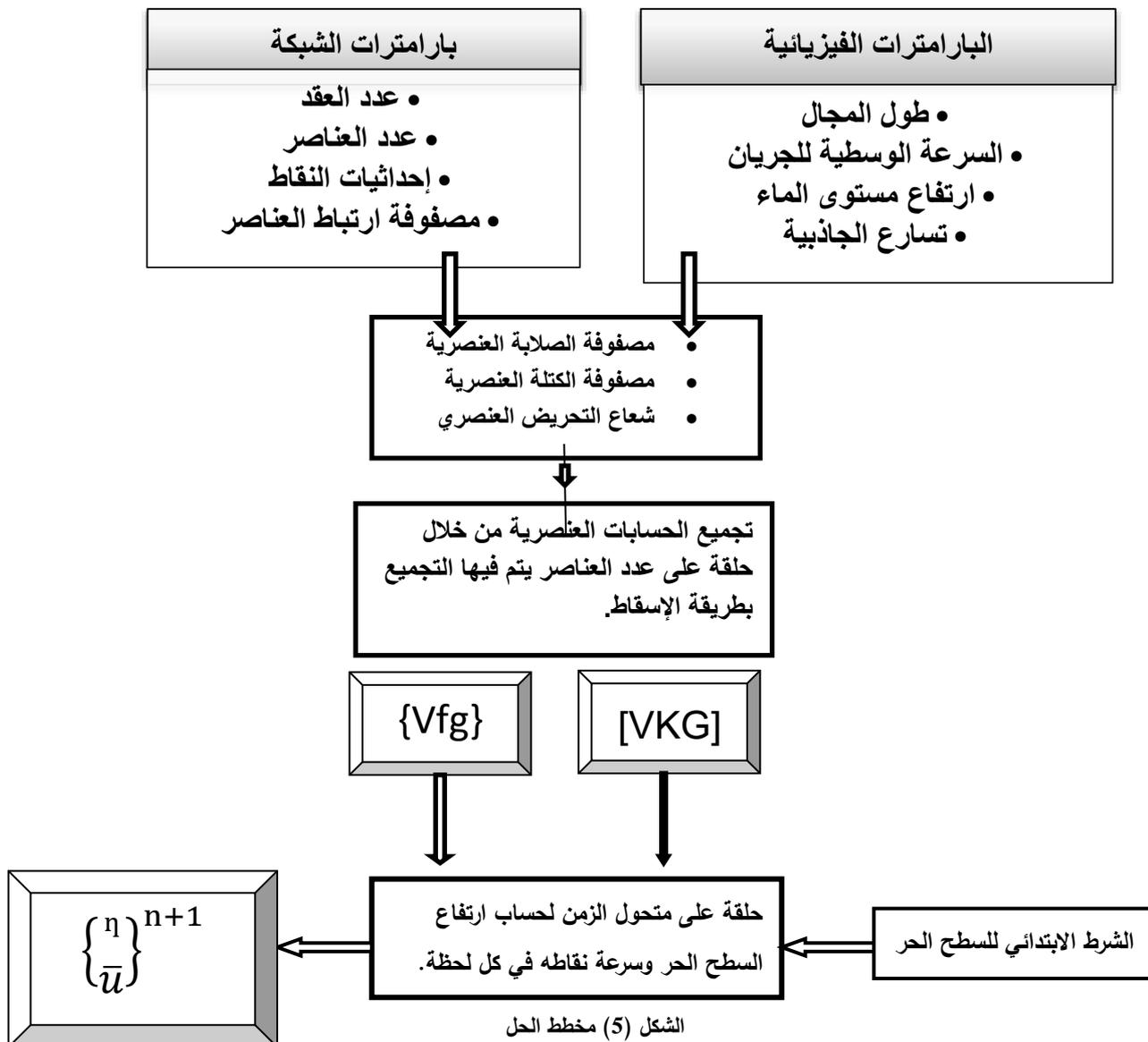
$$E_c = \int_D \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot dV = \int_{x=0}^L \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot dx \int_{z=0}^{H_0+\eta} dz = \rho \cdot \frac{1}{2} \int_0^L (H_0 + \eta) \cdot v^2 \cdot dx$$

ويتم حساب تكامل الطاقة من خلال طريقة شبه المنحرف.

الطاقة الميكانيكية هي مجموع الطاقة الكامنة والحركية:

$$E_t = E_c + E_p$$

مخطط الحل:



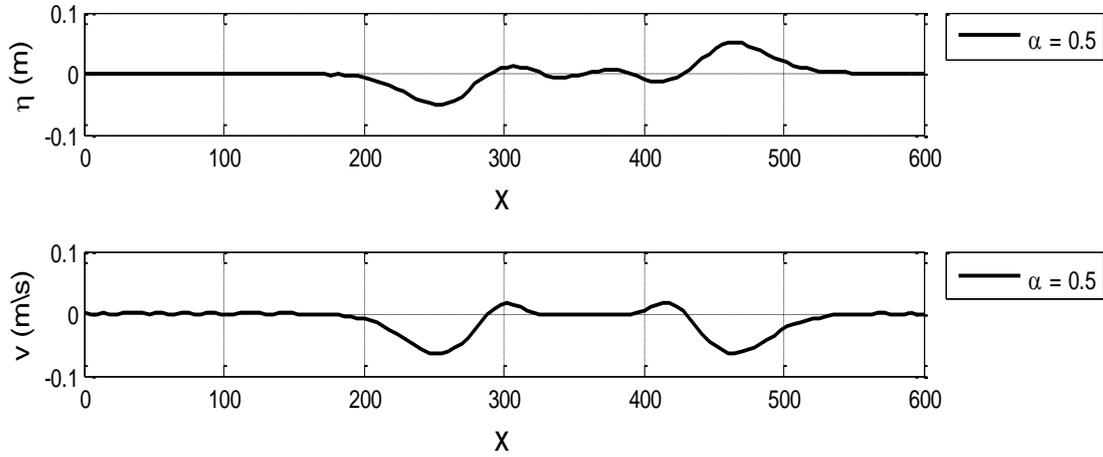
الشكل (5) مخطط الحل

النتائج والمناقشة:

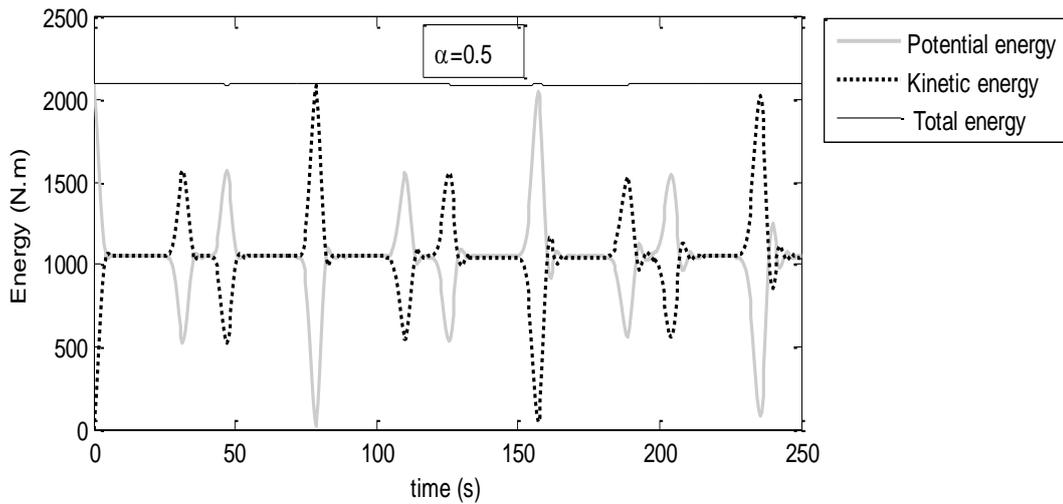
في المرحلة الأولى سندرس تأثير قيمة α على استقرارية الجملة من أجل البارامترات المبينة في الجدول التالي:

U	H_0	L	Δt	رقم العقدة	عدد العقد الكلي	عدد خطوات الزمن
0 m/s	6 m	600 m	0.5 s	8	130	500

يظهر الشكل (6) من أجل $\alpha=0.5$ تغير ارتفاع السطح الحر وسرعته على امتداد المجال. يمثل الشكل (7) تغير الطاقة الحركية والكامنة خلال فترة تطور الموجة وانتشارها ويبين هذا الشكل انحفاظ الطاقة الميكانيكية ممثلة بمجموع الطاقتين الكامنة والحركية في كل لحظة زمنية موافقة لتشكل الموجة وانتقالها.

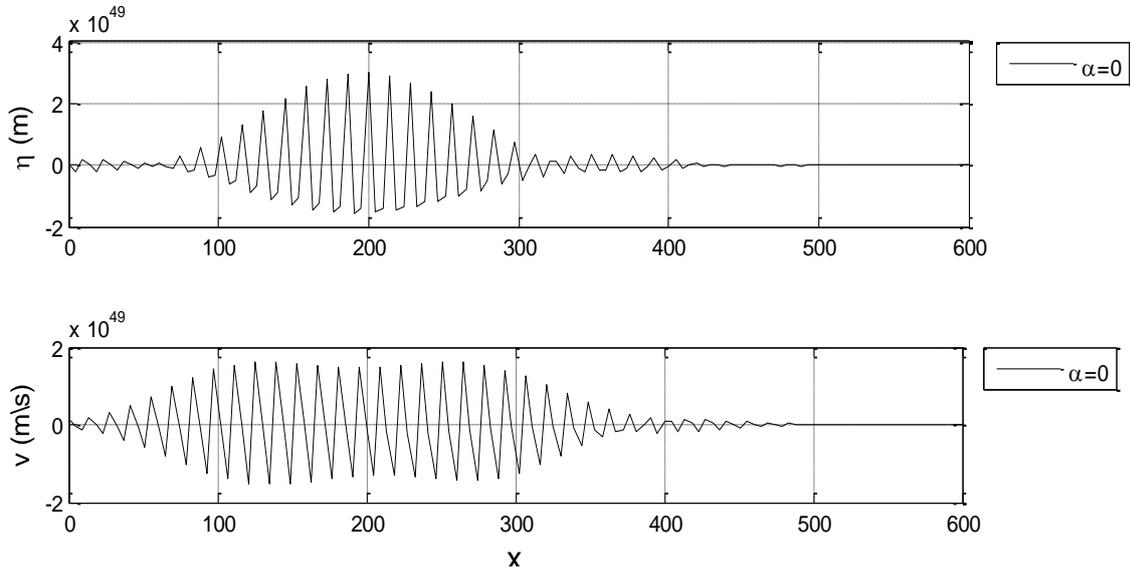


الشكل (6) تغير ارتفاع السطح الحر وسرعته للعقدة المدروسة على امتداد المجال من أجل $\alpha = 0.5$



الشكل (7) تغير الطاقة الحركية والكامنة من أجل $\alpha = 0.5$

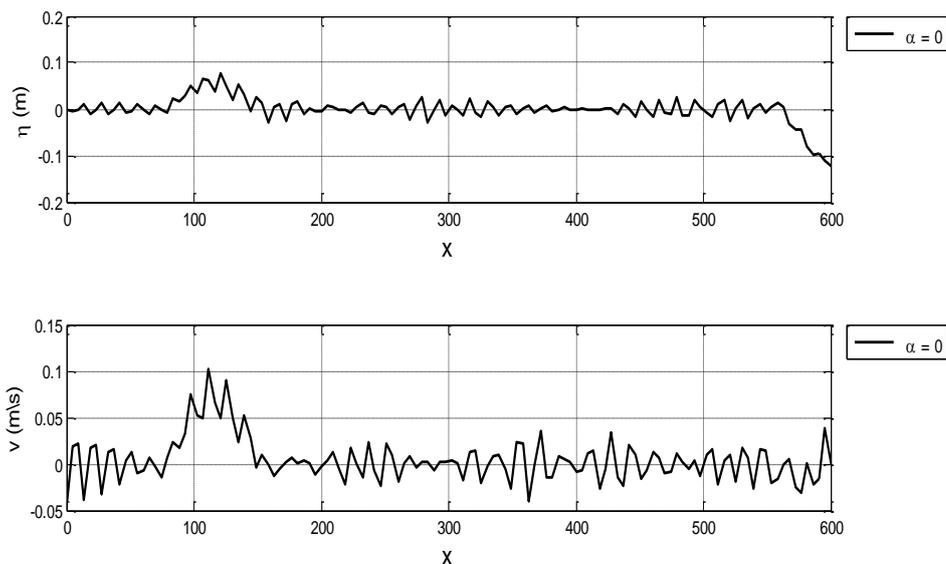
في حال تم استخدام التقريب الرقمي الصريح للحد غير المستقر نلاحظ وجود اضطرابات في الطريقة الرقمية عند حساب ارتفاع السطح الحر وسرعته كما هو موضح في الشكل (8) الذي يمثل تغير ارتفاع السطح الحر خلال الزمن في المنحني العلوي وتغير السرعة النسبية خلال زمن انتقال الموجة.



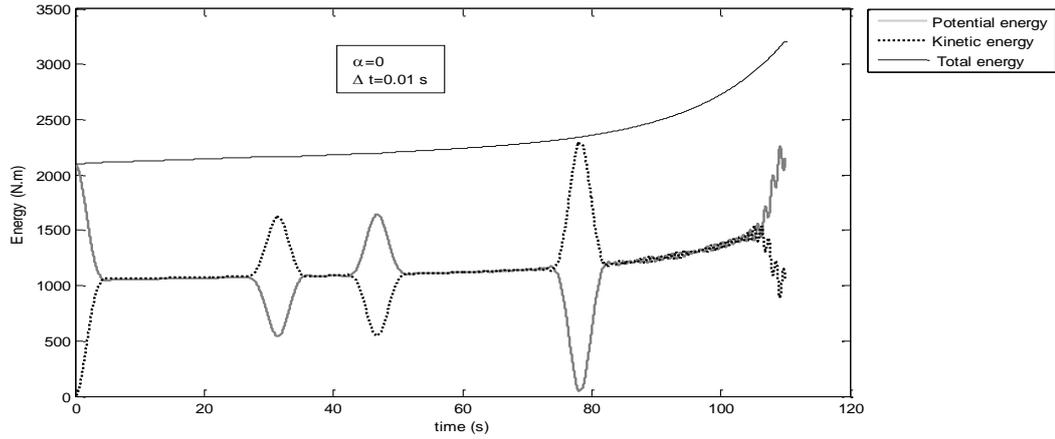
الشكل (8) تغير ارتفاع

السطح الحر وسرعته للعقدة المدروسة على امتداد المجال من أجل $\alpha = 0$.

غالبا ما يحتاج التقريب الرقمي الصريح إلى خطوه زمنية صغيرة ولكن نلاحظ أيضاً أنه حتى الخطوة الزمنية بمقدار $\Delta t = 0.01$ لم تضمن استقرارية الجملة كما هو موضح في الشكل (9)، يمثل الشكل (10) تغير الطاقة الميكانيكية كتابع للزمن خلال فترة انتشار الموجة على السطح الحر، نلاحظ وجود ضياعات في الطاقة الميكانيكية مترافقة مع حالة عدم استقرار.

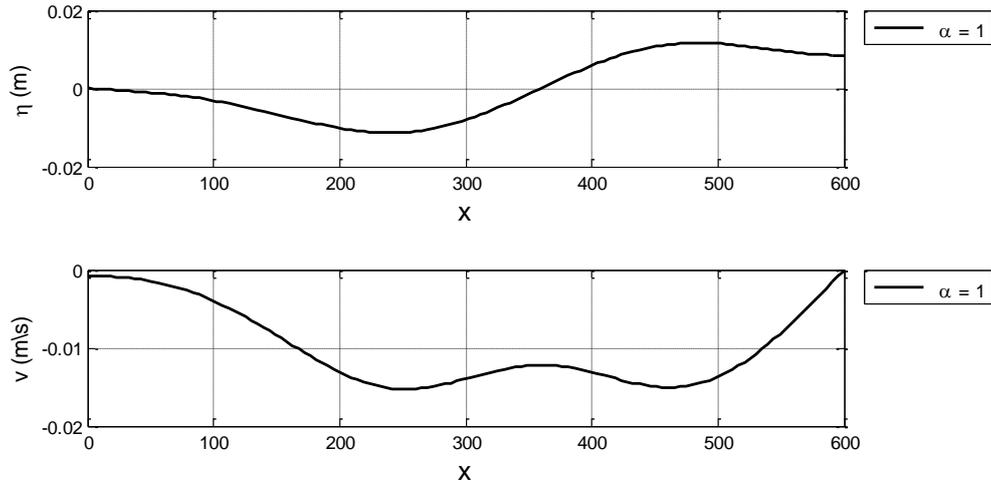


الشكل (9) عدم استقرارية الجملة باستخدام التقريب الصريح من أجل خطوة زمن صغيرة $\Delta t = 0.01 S$.

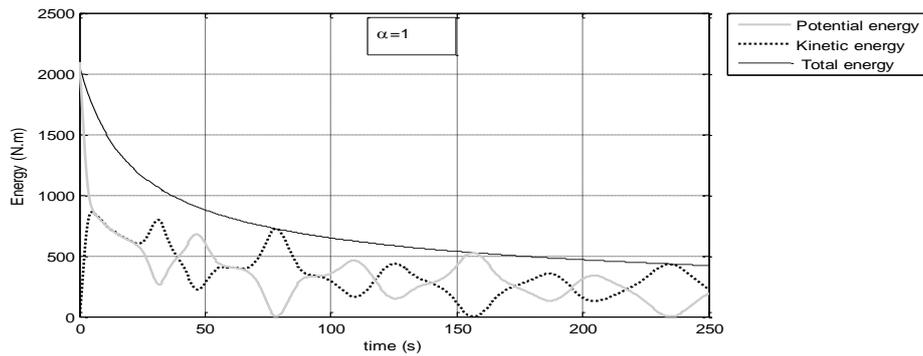


الشكل (10) تبديد الطاقة الميكانيكية باستخدام التقريب الصريح من أجل $\Delta t = 0.01$ s .

أما عند استخدام التقريب الضمني فنلاحظ عدم وجود اضطرابات رقمية في السطح الحر على امتداد الزمن كما هو موضح في الشكل (11)، ولكن مع ذلك فإن منحني الطاقة الميكانيكية يبين وجود ضياعات كما هو موضح في الشكل (12).



الشكل (11) تغير ارتفاع السطح الحر وسرعته للعقدة المدروسة على امتداد المجال من أجل $\alpha = 1$



الشكل (12) تغير الطاقة الحركية والكامنة من أجل $\alpha = 1$

تحليل النتائج:

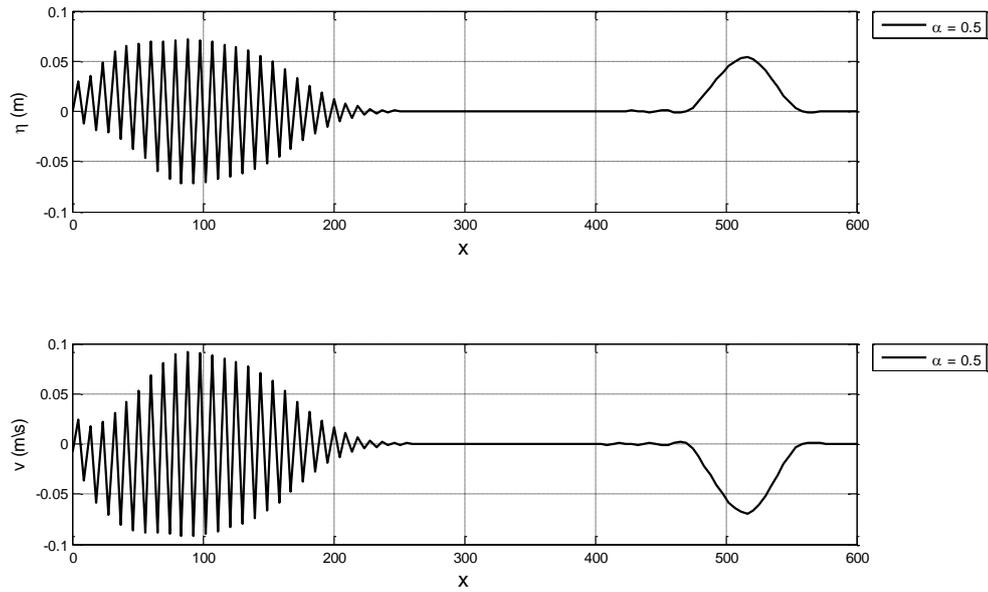
تبين النتائج أن طريقة *Crank-Nicholson* في التقريب الرقمي تعطي أفضل تقريب رقمي للحد غير المستقر حيث نلاحظ من الشكل (7) تحقق مبدأ مصونية الطاقة الميكانيكية خلال مرحلة انتشار الأمواج على امتداد السطح الحر. على خلاف طريقة التقريب الضمني، حيث إنه على الرغم من غياب مؤشرات عدم استقرارية الجملة - لا يوجد اضطراب أو تذبذب - من حيث انتشار الأمواج على السطح الحر كما هو مبين في الشكل (11) إلا أن الشكل (12) يبين أن التقريب الضمني يبذل الطاقة بمرور الزمن - ضياع في الطاقة - بالتالي نستطيع القول بأن التقريب غير محافظ.

أما فيما يخص التقريب الصريح للحد غير المستقر فالشكل (9) يوضح أن خطوة الزمن الصغيرة التي تم فرضها $\Delta t = 0.01$ s لم تضمن استقرارية الجملة.

تمثل هذه النتائج مدخل للمبرمجين ومستخدمي الطرق الرقمية في حل معادلة المياه الضحلة فمن خلال هذه الدراسة ننصح الباحثين بعدم استخدام التقريب الضمني على الرغم من توليده لنتائج مستقرة في مفهوم الموديل الرقمي واستبداله بتقريب من نوع *Crank-Nicholson*.

تأثير الشروط الحدية:

في حال تم فرض شروط حدية غير تابعة للزمن أي شروط حدية مستقرة تتشأ حالة عدم استقرار في الجملة حتى من أجل قيم $\alpha = 0.5$ كما هو موضح بالشكل (13).



الشكل (13) شروط حدية مستقرة تولد حالة عدم استقرار من أجل تقريب من نوع Crank–Niklson

ويفسر ذلك بأن النظام الفيزيائي الذي يحوي بارامترات متغيرة خلال الزمن مقترن حكماً بشروط حدية متغيرة خلال الزمن لتضمن تطور الحل كتابع للزمن.

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث إيجاد الحل الرقمي بطريقة العناصر المنتهية لانتشار الأمواج في معادلات المياه قليلة العمق وتم وضع المعايير اللازمة لضبط التقريب الرقمي من خلالها، حيث تبين أن التقريب الرقمي من نوع Crank–Niklson هو الأفضل لكونه يضمن استقرارية الجملة من جهة وانحفاظ الطاقة الميكانيكية من جهة ثانية على خلاف التقريب الضمني المعروف عنه باستقراريته. يشكل هذا البحث محور أساسي لدراسة انتشار التلوث على السطح الحر وذلك من خلال تعويض حد السرعة في كل خطوة زمنية في معادلات الانتشار والانتقال. أما فيما يتعلق بالتوصيات فإن النسخة المتكاملة من البرنامج تتطلب الحل الرقمي في موديل ثلاثي البعد للمحاكاة الدقيقة لظاهرة انتشار الأمواج في المياه القليلة العمق فوق قاع غير مستوي.

المراجع:

- [1] CHERTOCK, A; KURGANOV, A; PETROVA, G. Finite-Volume-Particle methods for models of transport of pollutant in shallow water. Journal of Scientific Computing, volume 27, Issue 1-3, pp 189-199, June 2006.
- [2] Bruce R. Munson; Donald F. Young; Theodore H. Okiishi. Fundamentals of Fluid Mechanics. John Wiley, and sons 2002.
- [3] WALTERS, R, A. Numerically Induced Oscillations in finite Element approximation to the Shallow water Equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 3 :591-604, 1983.
- [4] G. Dhatt, G. Touzot. Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine S.A., 1984.
- [5] G. Dhatt, G. Touzot, et E. Lefrançois. Méthodes des éléments finis. Lavoisier, 2005.
- [6] Raizer, O; Smaoui, H; Ouahsine, A; Sergent, P. Body force term comparison in lattice Boltzmann method for shallow water equations. International conference of numerical analysis and applied mathematics 2013: Icaam 2013. Aip conference proceedings, volume 1558, pp. 2013.