مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية - سلسلة العلوم الهندسية المجلد (20) العدد (7+6) 1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research - Engineering Science Series Vol. (20) No (6+7) 1998

مسألة حدية لمعادلة تفاضلية
من النوع القطعي المكافئ بشروط إبتدائية وحدية لاموضعية

الدكتور علي محمد مقوص*

(قبل للنشر في 1998/3/2)

□ ملخص □

درسنا مسألة حدية على المعادلة التفاضلية :

$$u_{xx} - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn} x(1-x)t\right]u_t = 0$$

في المنطقة :

$$D = \{(x,t): x \in (-1,0) \cup (0,1), t \in (-T,0) \cup (0,T)\}$$

من أجل الشروط الإبتدائية والحدية اللاموضعية :

$$\begin{cases} u(x,+0) + \alpha(x)u(x,T) = \varphi_1(x), 0 \le x \le 1 \\ u(x,-T) + \beta(x)u(x,-0) = \varphi_2(x), -1 \le x \le 0 \\ u(0,0) = \alpha_0 = \text{const}, u(1,0) = \alpha_1 = \text{const} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t)u(-1,t) + q(t)u(1,t) = \psi_1(t), -T \le t \le T \\ q(t)u_x(-1,t) + p(t)u_x(1,t) = \psi_2(t), t \in [-T,0] \cup (0,T) \end{cases}$$

حيث $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \psi_1(t), \psi_2(t), |\alpha(x)| \le 1, |\beta(x)| \le 1, p(t) \ne 0$, $q(t) \ne 0$ دوال مفروضة مستمرة معطاة تحقق شرط التطابق :

$$\alpha(0).\beta(1) \ne 0$$

لقد تم برهان نظريتي وحدانية ووجود الحل للمسألة المدروسة .

* مدرس في قسم العلوم الأساسية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية- جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية - سلسلة العلوم الهندسية المجلد (20) العدد (6+7) 1998
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research -Engineering Science Series Vol. (20) No (6+7) 1998

BOUNDARY PROBLEM FOR A GENERATING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH UN LOCAL CONDITIONS

Dr. Ali MKAWAES*

(Accepted 2/3/1998)

❒ ABSTRACT ❒

We investgate boundary problem of the degenerating parabolic partial differential equation

$$u_{xx} - \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sgn} x(1-x)t\right]u_t = 0$$

in domain

$$D \equiv \{(x,t): x \in (-1,0) \cup (0,1), t \in (-T,0) \cup (0,T)\}$$

imposing the non local initial and boundary conditons :

$$\begin{cases} u(x,+0) + \alpha(x)u(x,T) = \varphi_1(x), 0 \le x \le 1 \\ u(x,-T) + \beta(x)u(x,-0) = \varphi_2(x), -1 \le x \le 0 \\ u(0,0) = \alpha_0 = \text{const}, u(1,0) = \alpha_1 = \text{const} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t)u(-1,t) + q(t)u(1,t) = \psi_1(t), -T \le t \le T \\ q(t)u_x(-1,t) + p(t)u_x(1,t) = \psi_2(t), T \in [-T,0] \cup (0)T \ ] \end{cases}$$

Here $\varphi_i(x)$, $\psi_i(t)$, $i = 1,2$, $|\alpha(x)| \le 1$, $|\beta(x)| \le 1$, $p(t) \ne 0$

and $q(t) \ne 0$ *are given continuous functions satisfying the compatibity condition*

$$\alpha(0).\beta(1) \ne 0$$

Uniqueness and Existence of the solution of the considered problem are proved .

* Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

1 – مقدمة : في الأعمال [2] - [5] أخذنا المعادلة التفاضلية

$$u_{xx} - \frac{1}{2}[1+\operatorname{sgn}(xt)]u_t = o$$

في المنطقة :

$$D \equiv \{(x,t): x\in(-1,o)\cup(o,1), t\in(-T,o)\cup(o,T)\}$$

ودرسنا عليها مجموعة من المسائل الحدية حيث الشروط الابتدائية والحدية المفروضة فيها هي إما من النوع الكلاسيكي معاً أو أن الإبتدائية منها كلاسيكية والحدية من النوع اللاموضعي وقد كانت المسألة تؤول لحل معادلة أو جملة معادلات تكاملية لفولتيرا من النوع الثاني تحتوي على مؤثرات تكاملية نوياتها ضعيفة الشذوذية لكن من مرتبة أدنى من $1/2$. في السنوات الأخيرة نشرت بعض الأعمال [6] , [7] التي تم فيها برهان تراص مؤثرات تكاملية لفولتيرا أو فردهولم نوياتها التكاملية ضعيفة الشذوذية لكن من مرتبة أكبر من $1/2$ وأصغر من الواحد الصحيح فيما يلي سنعتمد على ذلك في دراسة مسألة حدية بشروط إبتدائية وحدية لاموضعية تقودنا إلى حل جملة معادلات تكاملية لفرد هو لم نويات المؤثرات التكاملية الداخلة فيها هي من النوع المذكور آنفاً .

2- نص المسألة : في المنطقة $D = \cup_{i=1}^{4} D$ ، حيث

$$D_1 \equiv \{(x,t): o\langle x\langle 1\,,\, o\langle t\langle T\} \quad , \quad D_2 = \{(x,t): -1\langle x\langle o\,,\, o\langle t\langle T\}$$
$$D_3 \equiv \{(x,t): -1\langle x\langle o, -T\langle t\langle o\} \quad , \quad D_4 = \{(x,t): o\langle x\langle 1, -T\langle t\langle o\}$$

وعلى المعادلة التفاضلية :

$$u_{xx} - \frac{1}{2}[1+\operatorname{sgn} x(1-x)t]u_t = o \qquad /1/$$

ندرس مسألة حدية ، الشروط الإبتدائية والحدية فيها على الترتيب من النوع اللاموضعي :

$$\begin{cases} u(x,+o) + \alpha(x)u(x,T) = \varphi_{11}(x),\ o\le x\le 1 \\ u(x,-T) + \beta(x)u(x,-o) = \varphi_2(x)\ ,\ -1\le x\le o \\ u(o,o) = \alpha_o = const\ ,\ u(1,o) = \alpha_1 = const \end{cases} \qquad /2/$$

$$\begin{cases} P(t)u(-1,t) + q(t)u(1,t) = \Psi_1(t)\ ,\ -T\le t\le T \\ q(t)u_x(-1,t) + P(t)u_x(1,t) = \Psi_2(t)\ ,\ t\in[-T,o]\cup(o,T) \end{cases} \qquad /3/$$

حيث $-T\le t\le T\ ,\ q(t)\ne o\ ,\ P(t)\ne o,\ |\alpha(x)|\le 1\ ,\ |\beta,(x)|\le 1\ ,\psi_i(t)\ ,\varphi_i(x)$

دوال مفروضة مستمرة على مجالات تعريفها وحيث :

$$\alpha(0).\beta(1)\ne 0 \qquad /4/$$

والمسألة تتلخص في إيجاد التابع $u(x,t)$ المعرّف المحدود والمستمر في المنطقة : $\overline{D}\setminus\{x\in(-1.0)\cup(0.1)\}$ والمحقق للمعادلة / 1 / والشروط الابتدائية والحدية / 2 / ، / 3 / وبحيث أن مشتقه الجزئي u_x (x,t) مستمر في المنطقة D بما فيه من أجل $x = o$, $-T\le t\,T$.

3 ـ وحدانية حل المسألة / 1 / - / 4 /

لنفرض أن $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ حلان للمسألة عندئذ يكون $V(x,t) = u_1 - u_2$ حلاً لها من أجل الشروط الصفرية $\varphi_i(x)\equiv 0, \psi_i(t)\equiv 0$ ثم بمكاملة المتطابقة

$$V_x^2 + \frac{1}{4}[1+\operatorname{sgn} x(1-x)t]\frac{\partial}{\partial t}(V^2) - \frac{\partial}{\partial x}(VV_x) \equiv o$$

على المنطقة D_i^{ε} حيث هي المنطقة D بعد الدخول من أطرافها لمسافة $o\langle\varepsilon\langle\frac{1}{2}\min(1,T)$ ثم بجعل $5 \to \varepsilon$ وجمع المتطابقات الناتجة آخذين بعين الاعتبار العلاقات /1/ - /3/ نجد أن $V_x(x,t)\equiv o$ من أجل $(x,t)\in D_1\cup D_3$ ولكن و

بسبب المتطابقة /1/ نجد أن $V_t(x,t) \equiv o$ أي أن $V(x,t) = const$ وبما أن $V(o,o) = o$ نجد أن $V(x,t) = o$ أما في المنطقة D_2 فإن $V_x(x,t) \equiv o$ إذاً $V(x,t) = g(t)$ ولكن وبما أن $V(o,t) \equiv o$ فإن $V(x,t) = o$ بنفس الآلية نجد أن $V(x,t) \equiv o$ في D_4 . وبالتالي فالمسألة /1/ - /4/ يمكن أن يكون لها على الأكثر حل واحد وبهذا يتم برهان نظرية وحدانية الحل .

4 - وجود حل المسألة /1/ - /4/ :

لبرهان نظرية وجود الحل للمسألة /1/ - /4/ سنشكل الدوال المساعدة التالية :

$$u(-1,t) = \tau_1(t) \ , \ u(o,t) = \tau_2(t) \ , u(1,t) = \tau_3(t) \ , \ -T \le t \le T$$

$$u(x,+o) = \mu_1(x) \ , \ o \le x \le 1 \ , \ u(x,-T) = \mu_2(x) \ , \ 1 \le x \le o$$

والتي سنحددها لاحقاً وبحيث تكون مستمرة في مجالات تحولها وتحقق الشروط التالية للتطابق .

$$\begin{cases} \mu_1(o) = \tau_2(o) = \alpha_o \ , \ \mu_1(1) = \tau_3(o) = \alpha_1 \\ \mu_2(-1) = \tau_1(-T) \ , \ \mu_2(o) = \tau_2(-T) \end{cases} \qquad /5/$$

وأن المشتقات $\tau_i'(t)$ ، $i = 1,2,3$ مستمرة في المجموعة $\{t : t \in (-T,o) \cup (o,T)$ أما من أجل $0 \to t$ ، $-T \to t$ فيمكن أن تتزايد بشكل غير محدود ولكن من مرتبة أصغر من الواحد الصحيح .

القيم $\tau_2(o) \ , \ \tau_3(o) \ , \ \tau_1(-T) \ , \ \tau_2(-T)$ نحددها من الجملة :

$$\tau_2(o) + \alpha(o)\tau_2(T) = \varphi_1(o) \ , \ \tau_3(o) + \alpha_1(1)\,\tau_3(T) = \varphi_1(1)$$

$$\tau_1(-T) + \beta(-1)\tau_1(o) = \varphi_2(-1) \ , \ \tau_2(-T) + \beta(o)\tau_2(o) = \varphi_2(o)$$

$$P(-T)\tau_1(-T) + q(-T)\tau_3(-T) = \Psi_1(-T) \ , \ P(o)\tau_1(o) + q(o)\tau_3(o) = \Psi_1(o)$$

$$P(T)\tau_1(T) + q(T)\tau_3(T) = \Psi_1(T) \ , \ \tau_2(o) = \alpha_o \ , \ \tau_3(o) = \alpha_1$$

ثم من العلاقات /5/ نحدد القيم . $\mu_1(o) \ , \ \mu_1(1) \ , \ \mu_2(-1) \ , \ \mu_2(o)$ واعتماداً على ذلك سنبحث عن الدالة $u(x,t)$ المسألة /1/ - /4/ في علاقة من الشكل :

$$u(x,t) = u_i(x,t) \ , \ (x,t) \in D_i \ , \ i = 1-4 \qquad /6/$$

حيث $u_i(x,t)$ يحقق المعادلة /1/ في المنطقة D_i عند الشروط التالية على الترتيب :

$$\begin{cases} u(o,t) = \tau_2(t) \ , \ u(1,t) = \tau_3(t) \ , \ o \le t \le T, u(x,+o) = \mu_1(x) \\ o \le x \le 1 \ , \ \mu_1(o) = \tau_2(o) = \alpha_o \ , \ \mu_1(1) = \tau_3(o) = \alpha_1 \end{cases} \qquad /7/$$

$$u(o,t) = \tau_2(t) \ , u(-1,t) = \tau_1(t) \ , \ o \le t \le T \qquad /8/$$

$$\begin{cases} u(o,t) = \tau_2(t) \ , \ u(-1,t) = \tau_1(t) \ , \ -T \le t \le o \ , \ u(x,-T) = \mu_2(x) \\ -1 \le x \le o \ , \ \mu_2(-1) = \tau_1(-T)\mu_2(o) = \tau_2(-T) \end{cases} \qquad /9/$$

$$u(o,t) = \tau_2(t) \ , \ u(1,t) = \tau_3(t) \ , \ -T \le t \le o \qquad /10/$$

إن حل المسألة /1/ , /7/ يعطى بالعلاقة :

$$u_1(x,t) = \int_o^1 \mu_1(\zeta) G(x,t,\zeta,o)\,d\zeta + \int_o^t \tau_2(\eta) G_\zeta(x,t,o,\eta)\,d\eta -$$

$$- \int_o^t \tau_3(\eta) G_\zeta(x,t,1,\eta)\,d\eta \ ,,(x,t) \in D. \qquad /11/$$

حيث $G(x,t,\zeta,\eta)$ هو دالة غرين لمسألة ديرخلي على معادلة الحرارة في الربع الأول .

ومن المساواة الأخيرة نجد أن :

$$u_1(x,T)=\int_0^1 \mu_1(\zeta)G(x,T,\zeta,o)d\zeta+\int_0^T \tau_2(\eta)G_\zeta(x,T,o,\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^T \tau_3(\eta)G_\zeta(x,T,1,\eta)d\eta\,,\ o\langle x\langle 1. \qquad /12/$$

$$u_{1x}(o,t)=\int_0^1 \mu_1(\zeta)G_x(o,t,\zeta,o)d\zeta-\frac{\tau_2(o)}{\sqrt{\pi t}}-\int_0^t \frac{\tau_2'(\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(t-\eta)}}-$$
$$-\int_0^t \tau_2(\eta)K_0'(t-\eta)d\eta+\int_0^t \tau_3(\eta)K_1'(t-\eta)d\eta\,,\ o\langle t\le T \qquad /13/$$

$$u_{1x}(1,t)=\int_0^1 \mu_1(\zeta)G_x(1,t,\zeta,o)d\zeta+\frac{\tau_3(o)}{\sqrt{\pi t}}+\int_0^t \frac{\tau_3'\tau(\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(t-\eta)}}+$$
$$+\int_0^t \tau_2(\eta)K_0'(t-\eta)d\eta-\int_0^t \tau_2(\eta)K_1'(t-\eta)d\eta\,,\ o\langle t\le T \qquad /14/$$

حيث $K_1(\gamma)\,,\,K_o(\gamma)$ دوال معروفة قابلة للإشتقاق من أية مرتبة نشاء انظر [7] .

أما حل المسألة /1/ - /8/ في المنطقة D_2 فهو :

$$u_2(x,t)=[\tau_2(t)-\tau_1(t)]x+\tau_2(t)\,,\ (x,t)\in D_2 \qquad /15/$$

ومنه :

$$u_{2x}(o,t)=u_{2x}(-1,t)=\tau_2(t)-\tau_1(t)\,,\ o\le t\le T \qquad /16/$$

سنحدد الدوال غير المعروفة $\tau_i(t)$, $i=1,2,3$, $\mu_1(x)$, $o\le x\le 1$, $o\le t\le T,$ من الشروط التالية :

$$\begin{cases} u_{1x}(o,t)=u_{2x}(o,t)\,,\ o\langle t\le T \\ \mu_1(x)+\alpha(x)u_1(x,T)=\varphi_1(x)\,,\ o\le x\le 1 \\ p(t)\tau_1(t)+q(t)\tau_3(t)=\Psi_1(t)\,,\ 0\le t\le T \\ q(t)u_{2x}(-1,t)+p(t)u_{1x}(1,t)=\Psi_2(t)\,,\ o\langle t\le T \end{cases} \qquad /17/$$

من الشرط الثالث من العلاقات السابقة نجد أن :

$$\tau_1(t)=\frac{1}{p(t)}[\psi_1(t)-q(t)\tau_3(t)]\,,\ o\le t\le T \qquad /18/$$

نعرّف الآن الدالتين :

$$\phi_{1j}(t)=\begin{cases} t^{3/4}\int_0^t \frac{\tau_j'(\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(t-\eta)}}\,,\ o\langle t\le T \\ 0\quad,\quad t=o\quad,\quad j=2,3 \end{cases} \qquad /19/$$

وبسهولة يمكن أن نجد العلاقة العكسية :

$$\tau_j(t)=\tau_j(o)+\int_0^t \frac{\phi_{1j}(\sigma)d\sigma}{\sigma^{3/4}\sqrt{\pi(t-\sigma)}}\,,\ o\le t\le T\,,\ j=2,3 \qquad /20/$$

الآن إذا أخذنا بعين الإعتبار العلاقات /12/ - /20/ نحصل على الجملة التالية من المعادلات التكاملية لفردهولم من النوع الثاني :

$$\begin{cases} \phi_{12}(t)+\int\limits_0^T \phi_{12}(\sigma)\,K_{11}(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_0^T \phi_{13}(\sigma)N_{11}(t,\sigma)d\sigma+ \\ \qquad +\int\limits_0^1 \mu_1(\zeta)\,M_{11}(t,\zeta)d\zeta=F_{11}(t)\ ,\ o\le t\le T \\ \phi_{13}(t)+\int\limits_0^T \phi_{13}(\sigma)N_{12}(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_0^T \phi_{12}(\sigma)K_{12}(t,\sigma)d\sigma+ \\ \qquad +\int\limits_0^1 \mu_1(\zeta)M_{12}(t,\zeta)d\zeta=F_{12}(t),o\le t\le T \\ \mu_1(x)+\int\limits_0^1 \mu_1(\zeta)M_{13}(x,\zeta)d\zeta+\int\limits_0^T \phi_{12}(\sigma)K_{13}(x,\sigma)d\sigma+ \\ \qquad +\int\limits_0^T \phi_{13}(\sigma)N_{13}(t,\sigma)d\sigma=F_{13}(x)\ ,\ 0\le x\le 1 \end{cases} \qquad /21/$$

حيث :

$$K_{11}(t,\sigma)=\begin{cases}\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{3/4}\left\{\int\limits_\sigma^t \dfrac{K_0'(t-\eta)}{\sqrt{\pi(\eta-\sigma)}}d\eta+\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\sigma)}}\right\} & ,\quad o<\sigma<t \\ o & ,\quad t\le\sigma\le T\end{cases}$$

$$N_{11}(t,\sigma)=\begin{cases}-\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{3/4}\left[\int\limits_\sigma^t \dfrac{K_0'(t-\eta)'d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-\sigma)}}-\dfrac{q(t)}{P(t)\sqrt{\pi(t-\sigma)}}\right] & ,o\le\sigma<t \\ o & ,\quad t\le\sigma\le T\end{cases}$$

$$M_{11}(t,\zeta)=-t^{3/4}\,G_x(o,t,\zeta,o)\ ,\ o\le\zeta\le 1\ ,\ o\langle t\le T$$

$$F_{11}(t)=-\frac{\tau_2(o)}{\sqrt{\pi}}\,t^{1/4}+t^{3/4}\left\{\frac{\psi_1(t)}{p(t)}+\tau_2(o)[K_o(t)-1]-\frac{\tau_3(o)}{p(t)}\big[p(t)K_1(t)+q(t)\big],\right.$$

$$o\le t\le T$$

$$K_{12}(t,\sigma)=N_{11}(t,\sigma)$$

$$N_{12}(t,\sigma)=\begin{cases}\left(\dfrac{t}{\sigma}\right)^{3/4}\left[\int\limits_\sigma^t \dfrac{K_0'(t-\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-\sigma)}}+\dfrac{q^2(t)}{p^2(t)\sqrt{\pi(t,\sigma)}}\right] & ,o\langle\sigma\langle t \\ o & ,\quad t\le\sigma\le T\end{cases}$$

$$M_{12}(t,\zeta)=t^{3/4}\,G_x(1,t,\zeta,o)\ ,\ o\le\zeta\le 1\ ,\ o\langle t\le T$$

$$F_{12}(t)=-\frac{t^{1/4}\,\tau_{3,(o)}}{\sqrt{\pi}}+\frac{t^{3/4}}{p^2(t)}\begin{Bmatrix}p(t)\psi_2(t)+q(t)K_1(t)+ \\ +\tau_3(0)\big[p^2(t)K_o(t)-q^2(t)\big]-\tau_2(o) \\ \big[\big[p^2(t)K_1(t)+p(t)q(t)\big]\end{Bmatrix},$$

$$o\le t\le T$$

$$K_{13}(x,\sigma)=\frac{\alpha(x)}{\sigma^{3/4}}\int_{\sigma}^{T}\frac{G_{\zeta}(x,T,o,\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-\sigma)}},o\le x\le 1,o\langle\sigma\langle T,$$

$$N_{13}(x,\sigma)=-\frac{\alpha(x)}{\sigma^{3/4}}\int_{\sigma}^{T}\frac{G_{\zeta}(x,T,1,\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-\sigma)}},o\le x\le 1,o\langle\sigma\langle T$$

$$M_{13}(x,\zeta)=\alpha(x)G(x,T,\zeta,\sigma),o\le x\le 1,o\le\zeta\le 1$$

$$F_{13}(x)=\begin{cases}\varphi_1(x)-\alpha(x)\int_o^T[\tau_2(o)G_{\zeta}(x,To,\eta)-\tau_3(o)G_{\zeta}(x,T,1,\eta)]d\eta,\\ o\langle x\langle 1\\ F_{13}(o)=\varphi_1(o)-\alpha(o)\tau_2(o)\ ;\ F_{13}(1)=\varphi_1(1)-\alpha(1)\tau_3(0),\end{cases}$$

الدوال $K_{1i}, N_{1j}, M_{1j}, i=1,2,3, j=1,2$ هي نويات تكاملية ضعيفة الشذوذية من مرتبة أقل من الواحد أما الدوال $i=1,2,3, F_{1i}(t), M_{13}$ فهي دوال مستمرة وبالتالي وحسب نظرية المعادلات التكاملية فالجملة /21/ لها حل وحيد مستمر أي أن الدوال $o\le t\le T,\phi_{13}(t),\phi_{12}(t),o\le x\le 1,\mu_i(x)$ تتحدد بشكل وحيد ثم نحدد بعدئذ من العلاقتين /20/ , /18/ الدوال غير المعروفة $o\le t\le T,i=1,2,3,\tau_i(t)$

أخيراً العلاقتان /11/ , /15/ تعطيان الدالتين $u_2(x,t), u_1(x,t)$ حلي المسألتين /1/ , /7/ و /1/ , /8/ في المنطقتين D_2 , D_1 على الترتيب .

بعد إجراء الانسحاب المناسب للجملة الإحداثية فإن حل المسألة /1/ , /9/ في المنطقة D_3 يأخذ الشكل التالي :

$$u_3(x,t)=\int_o^1\mu_2(\zeta-1)G(1+x,T+t,\zeta,o)d\zeta+\int_o^{T+t}\tau_1(\eta-T)G_{\zeta}(1+x,T+t,o,\eta)d\eta-$$
$$-\int_o^{T+t}\tau_2(\eta-T)G_{\zeta}(1+x,T+t,1,\eta)d\eta,-T\le t\le o \qquad /22/$$

$$u_3(x,-0)=\int_o^1\mu_2(\zeta-1)G(1+x,t,\zeta,o)d\zeta+\int_o^{T}\tau_1(\eta-T)G_{\zeta}(1+x,T,o,\eta)d\eta-$$
$$-\int_o^{T}\tau_2(\eta-T)G_{\zeta}(1+x,T,1,\eta)d\eta,-1\langle x\langle o \qquad /23/$$

$$u_{3x}(o,t)=\int_o^1\mu_2(\zeta-1)G_x(1,T+t,\zeta,o,d\zeta+\int_o^{T+t}\frac{\tau_2'(\eta-T)}{\sqrt{\pi(T+t-\eta)}}d\eta+\frac{\tau_2(-T)}{\sqrt{\pi(T+t)}}+$$
$$+\int_o^{T+t}\tau_2(\eta-T)K_0'(T+t-\eta)d\eta-\int_o^{T+t}\tau_1(\eta-T)K_1'(T+t-\eta)d\eta,-T\langle t\le o; \qquad /24/$$

$$u_{3x}(-1,t)=\int_o^1\mu_2(\zeta-1)G_x(o,T+t,\zeta,o)d\zeta-\frac{\tau_1(-T)}{\sqrt{\pi(T+t)}}-\int_o^{T+t}\frac{\tau_1'(\eta-T)}{\sqrt{\pi(T+t-\eta)}}d\eta-$$
$$-\int_o^{T+t}\tau_1(\eta-T)K_0'(T+t-\eta)d\eta+\int_o^{T+t}\tau_2(\eta-T)K_1'(T+t-\eta)d\eta,-T\langle t\le o \qquad /25/$$

أما حل المعادلة /1/ من أجل الشروط /10/ في المنطقة D_4 فهو :

$$u_4(x,t)=[\tau_3(t)-\tau_2(t)]x+\tau_2(t),(x,t)\in D_4 \qquad /26/$$

ومنه :

$$u_{4x}(o,t)=u_{4x}(1,t)=\tau_3(t)-\tau_2(t),\ -T\le t\le o \qquad /27/$$

وسوف نحدد الدوال غير المعروفة : $\tau_i(t)$, $i = 1,2,3$, $-T\le t\le o$, $\mu_2(x)$, $-1\le x\le o$ من الشروط الأربعة التالية :

$$\begin{cases} u_{3x}(o,t) = u_{4x}(o,t) \ , -T < t \le o \\ \mu_2(x) + \beta(x)u_3(x,-o) = \varphi_2(x) \ , -1\le x\le o \\ p(t)\tau_1(t) + q(t)\tau_3(t) = \psi_1(t) \ , -T\le t\le o \\ q(t)u_{3x}(-1,t) + p(t)u_{4x}(1,t) = \psi_2(t), -T < t \le 0 \end{cases} \qquad /28/$$

بعد التعويض من العلاقات /23/ - /27/ في الشروط /28/ وتشكيل الدوال :

$$\phi_{2j}(\sigma) = \begin{cases} \sigma^{3/4}\displaystyle\int_o^\sigma \frac{\tau_j'(\eta - T)\,d\eta}{\sqrt{\pi(\sigma-\eta)}} \ , & o < \sigma \le T \\ o \ , & \sigma = o \ , j = 1 , 2 \end{cases} \qquad /29/$$

$$\tau_j(\sigma - T) = \tau_j(-T) + \int_o^\sigma \frac{\phi_{2j}(s)\,ds}{s^{3/4}\sqrt{\pi(\sigma - s)}} \ , j = 1 , 2 , o < \sigma \le T \qquad /30/$$

$$\tau_3(t) = \frac{1}{q(t)}\left[\psi_1(t) - p(t)\tau_1(t)\right] \ , -T\le t\le o \qquad /31/$$

نحصل على جملة المعادلات التكاملية لفردهولم من النوع الثاني :

$$\begin{cases} \phi_{22}(\sigma) + \displaystyle\int_o^T \phi_{22}(s)K_{21}(\sigma,s)\,ds + \int_o^T \phi_{21}(s)N_{21}(\sigma,s)\,ds + \\ \qquad + \displaystyle\int_o^1 \mu_2(\zeta - 1)M_{21}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = F_{21}(\sigma) \ , o\le\sigma\le T , \\ \phi_{21}(\sigma) + \displaystyle\int_o^T \phi_{21}(s)N_{22}(\sigma,s)\,ds + \int_o^T \phi_{22}(s)K_{22}(\sigma,s)\,ds + \\ \qquad + \displaystyle\int_o^1 \mu_2(\zeta - 1)M_{22}(\sigma,\zeta)\,d\zeta = F_{22}(\sigma) \ , o\le\sigma\le T \\ \mu_2(x) + \displaystyle\int_o^1 \mu_2(\zeta - 1)M_{23}(x,\zeta)\,d\zeta + \int_o^T \phi_{21}(s)N_{23}(x,s)\,ds + \\ \qquad + \displaystyle\int_o^T \phi_{22}(s)K_{23}(x,s)\,ds = F_{23}(x) \ , -1\le x\le o , \end{cases} \qquad /32/$$

حيث :

$$K_{21}(\sigma,s) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sigma}{s}\right)^{3/4}\left[\displaystyle\int_s^\sigma \frac{K_0'(\sigma,x)\,d\eta}{\sqrt{\pi(\eta - s)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi(\sigma - s)}}\right], & o < s < \sigma \\ o \ , & \sigma\le s\le T \end{cases}$$

$$N_{21}(\sigma,s) = \begin{cases} -\left(\dfrac{\sigma}{s}\right)^{3/4}\left[\displaystyle\int_s^\sigma \frac{K_1'(\sigma,\eta)\,d\eta}{\sqrt{\pi(\eta - s)}} - \frac{p(\sigma - T)}{q(\sigma - T)\sqrt{\pi(\sigma - s)}}\right], & o < s < \sigma \\ o \ , & \sigma\le s\le T \end{cases}$$

$$M_{21}(\sigma,\zeta)=\sigma^{3/4}G_x(1,\sigma,\zeta,o)\ ,\ o\langle\ \sigma\le T\ ,\ o\le\zeta\le 1$$

$$F_{21}(a)=-\frac{\sigma^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\tau_2(-T)+\frac{1}{q(\sigma-T)}\{\psi_1(\sigma-T)+\tau_2(-T)q(\sigma-T)[K_o(\sigma)-1]-$$

$$-\tau_1(-T)p(\sigma-T)+q(\sigma-T)K_1(\sigma)\},o\le\sigma\le T, K_{22}(\sigma,s)=N_{21}(\sigma,s)$$

$$N_{22}(\sigma,s)=\begin{cases}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^{3/4}\left[\int_s^\sigma\frac{K_o'(\sigma-\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-s)}}+\frac{p^2(\sigma-T)}{q^2(\sigma-T)\sqrt{\pi(\sigma-s)}}\right], & o\langle s\langle\sigma\ , \\ o\ , & \sigma\le s\le T\end{cases}$$

$$M_{22}(\sigma,\zeta)=-\sigma^{3/4}G_x(o,\sigma,\zeta,o)\ ,\ o\langle\sigma\le T\ ,\ o\le\zeta\le 1$$

$$F_{22}(\sigma)=-\frac{\sigma^{1/4}}{\sqrt{\pi}}\tau_1(-T)+\frac{\sigma^{3/4}}{q^2(\sigma-T)}\begin{Bmatrix}p(\sigma-T)\psi_1(\sigma-T)-q(\sigma-T)\Psi_2(\sigma-T)-\\ -\tau_1(-T)\left[p^2(\sigma-T)+q^2(\sigma-T)K_o(\sigma)\right]+\\ +\tau_2(-T)q(\sigma-T)[p(\sigma-T)-q(\sigma-T).\end{Bmatrix}$$

$$.K_1(\sigma,T)\ ]\ ,\qquad o\le\sigma<T$$

$$K_{23}(x,s)=-\frac{\beta(x)}{s^{3/4}}\int_s^T\frac{G_\zeta(1+x,T,1,\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-s)}}\ ,-1\le x\le o\ ,\ o\langle\ s\ \langle T,$$

$$N_{23}(x,s)=\frac{\beta(x)}{s^{3/4}}\int_s^T\frac{G_\zeta(1+x,T,o,\eta)d\eta}{\sqrt{\pi(\eta-s)}}\ ,-1\le x\le o\ ,\ o\langle\ s\ \langle T,$$

$$M_{23}(x,\zeta)=\beta(x)G(1+x,T,1,\eta)\ \ ,\ -1\le x\le o\ ,\ o\ \le\zeta\le 1$$

$$F_{23}(x)=\begin{cases}\varphi_2(x)+\beta(x)\int_o^T[\tau_2(-T)G_\zeta(1+x,T,1,\eta)-\tau_1(-T)G_\zeta(1+x,T,o,\eta)]\,d\eta\ ,\\ F_{23}(-1)=\varphi_2(-1)-\beta(-1)\tau_1(-T),\ F_{23}(o)=\varphi_2(o)-\beta(o)\tau_2(-T)\ ,\\ -1<x<0.\end{cases}$$

والنويات التكاملية $K_{2i}\ ,N_{2i}\ ,\ i=1,2,3\ ,\ M_{2j}\ ,\ j=1,2$ نويات ضعيفة الشذوذية أما الدوال $M_{23}\ ,\ F_{2i}\ ,\ i=1,2,3$ فهي دوال مستمرة وبالتالي فالجملة /32/ حسب الفرضية الأساسية لفردهولم في المعادلات التكاملية لها حل وحيد أي أن الدوال $\mu_2(x)\ ,\ -1\le x\le o\ ,\ \phi_{21}(\sigma)\ ,\ \phi_{22}(\sigma)\ ,\ o\le\sigma\le T$ تتعين بشكل وحيد ومن ثم من العلاقتين /31/ ، /30/ نحدد أيضاً بشكل وحيد الدوال $\tau_i(t)\ ,\ -T\le t\le o$ أخيراً العلاقتان /22/ , /26/ تعطيان الدالتين $u_4(x,t)$, $u_3(x,t)$ حلي المعادلة /1/ في المنطقتين $D_4\ ,\ D_3$ على الترتيب وهكذا بعد إيجاد $u_i(x,t)$ $i=1,2,3,4,$ نكون قد أوجدنا تماماً الدالة $u(x,t)$ المعرّفة بالعلاقة /6/ وبهذا نكون قد أتممنا برهان نظرية وجود الحل للمسألة /1/ - /4/ .

REFERENCES

المراجع

1 - KEREFOV , A.A.1979,- *NONLOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR A PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION, DIFFERENTIAL EQUATION*, MOSCOW, VOL: 15, NO !, PP : 74 - 78 .

2 - MKAWAES, M.A.1985, - *FIRST BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATING PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION*, APPLIED MATHEMATICS, UNIVERSITY ANNVAL, BULGARIA, VOL : 21, NO 3.PP. 77-89

3 - MKAWAES, M.A.1985 - *THE SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATING PARTIAL PARABOLIC DIFFERENIAL EQUATION*, APPLIED MATHEMATICS, UNIVERSITY ANNVAL, BULGARIA, VOL : 21, NO 4.PP. 77-89

4 - MKAWAES, M.A,1986 - *THE SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATING PARTIAL PARABOLIC DIFFERENIAL EQUATION WITH NON LOCAL CONDITIONS*, MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, BULGARIAN ACADEMY OF SCIENES , PP. 262 - 270 .

5 - MKAWAES, M.A. - *THE UNIQUENESS AND EXISTENCE OF THE SOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM FOR A DEGENERATING PARTIAL PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION* . (WORKS TO BE PUBLISHED) . 1997

6 - SHOPOLV , N.N, 1987 - *ON ONE CLASS LINEAR INTEGRAL OPERATORS* OF *THE FREDHOLM TYPE*, APPLIED MATHEMATICS, UNIVERSITY ANNUAL, BULGARIA, VOL : 23 NO 4, PP. 83 - 94 .

7 - SHODOLV, N.N, 1989 - *THE CATTABRIGA PROBLEM FOR THIRD ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH TWO LINES OF DEGENERATING*, APPLIED MATHEMATICS, UNIVERSITY ANNUAL , BULGARIA, VOL : 25, NO 2, PP. 75 - 89 .