

Designing a Computer Simulation Model to Study the Failure Mechanism in Rotating Shaft

Dr. Mohamad Kheir Mohamad*

Haya Mohamad**

(Received 22 / 8 / 2022. Accepted 16 / 1 / 2023)

□ ABSTRACT □

The phenomenon of the failure of rotating mechanical structures is considered one of the dangerous phenomena that researchers are trying to study to find effective ways to avoid it. Many mathematical models describing the mechanism of crack formation in structures and the occurrence of failure in them have been adopted. In this paper, a computer simulation model of the failure mechanism in the intermediate conduction shaft of the ship's propeller (oil shuttle tanker) was designed based on the mathematical model that describes the stages of failure according to the number of revolutions that the shaft bears and the dimensions of fatigue cracks in it. In the beginning, a detailed mathematical model of the crack propagation mechanism was deduced as an initial stage, through which the differential equations that express the failure of the shaft were described. In the second stage, numerical simulations were implemented using the Euler and Rung-Kutta numerical methods used in solving ordinary differential equations. Also, for both methods using the Matlab language in order to reach the results and accurate graphs and analyze them. In this way it is possible to predict the number of cycles that the column will bear before the collapse and this will reduce the occurrence of sudden collapses and save time, effort and costs.

Keywords: connecting shaft, ship propeller, fatigue cracks, mathematical model, simulation, Euler method, Rung-Kutta method, Matlab.

* Assistant Professor, Department of Design and Production, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

**Postgraduate Student (Master), Department of Design and Production, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria

تصميم نموذج محاكاة حاسوبي لدراسة آلية الانهيار في المحاور الدوارة

د. محمد خير محمد*

هيا محمد**

(تاريخ الإيداع 22 / 8 / 2022. قُبِلَ للنشر في 16 / 1 / 2023)

□ ملخص □

تعتبر ظاهرة انهيار الهياكل الميكانيكية الدوارة من الظواهر الخطرة التي يحاول الباحثون دراستها للوصول إلى طرق فعالة لتلافيها، فقد تم توظيف العديد من التقانات والدراسات القائمة على تحفيز عمليات الصيانة المتواصلة والفحوص الدورية المستمرة، إلا أن ذلك يبقى غير كافي لتجنب حدوث الانهيارات المفاجئة وكان لابد من إيجاد نماذج رياضية تصف آلية تشكل الشقوق في الهياكل وحدث الانهيار فيها، في هذه الورقة تم تصميم نموذج محاكاة حاسوبي لآلية الانهيار في عمود التوصيل المتوسط لمروحة السفينة (الناقلة المكوكة للنفط) انطلاقاً من النموذج الرياضي الذي يصف مراحل الانهيار تبعاً لعدد الدورات التي يتحملها العمود وأبعاد شقوق التعب فيه. في البداية تم استنتاج النموذج الرياضي التفصيلي لآلية انتشار الشقوق كمرحلة أولية، تم من خلالها توصيف المعادلات التفاضلية التي تعبر عن انهيار العمود، وفي المرحلة الثانية تم تنفيذ المحاكاة العددية باستخدام طريقتي Euler و Rung-Kutta العدديتين والمستخدمتين في حل المعادلات التفاضلية العادية، تمت البرمجة الحاسوبية أيضاً لكلا الطريقتين باستخدام لغة Matlab بهدف الوصول إلى النتائج والرسوم البيانية الدقيقة وتحليلها، بهذا يمكن التنبؤ بعدد الدورات التي يتحملها العمود قبل الانهيار وهذا من شأنه التقليل من حدوث الانهيارات المفاجئة و توفير الوقت و الجهد و التكاليف .

الكلمات المفتاحية: عمود التوصيل، مروحة السفينة، شقوق التعب، نموذج رياضي، محاكاة، طريقة Euler، طريقة Rung-Kutta، Matlab.

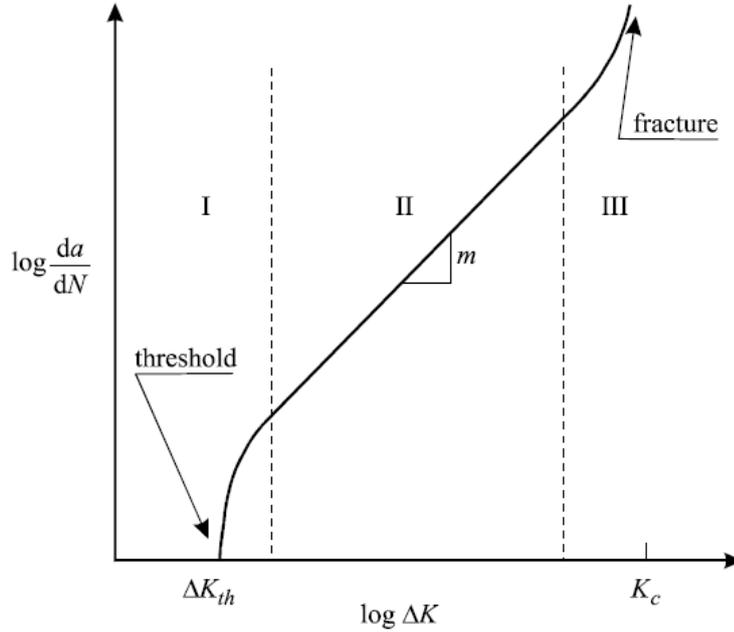
* مدرس - قسم هندسة التصميم والإنتاج - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
mmohamadkheir@yahoo.com

** طالبة دراسات عليا (ماجستير) قسم هندسة التصميم والإنتاج - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
Haya.mohammad@tishreen.edu.sy

مقدمة

إن حدوث الانهيار في المحاور الدوارة ذات أهمية خاصة في العديد من الهياكل مثل ناقلة النفط المكوكية المستخدمة في النقل البحري للمواد النفطية سريعة الاشتعال والتي قد يسبب أي حادث فيها كوارث فادحة ، وبالتالي من المهم إجراء دراسة شاملة لأحد أهم مكونات ناقلة النفط ألا وهو عمود التوصيل المتوسط لمروحة السفينة، والذي يصل بين شفرات المروحة والمحرك ، وهو من أكثر المكونات التي تتعرض للانهيار بعد الشفرات ، حيث يترتب على انهياره تكاليف هائلة ، فضلاً عن تكاليف الصيانة الباهظة [1] .

يظهر الشكل (1) مراحل تشكل الشقوق في العمود من مرحلة الاستقرار إلى الانهيار النهائي ،



الشكل (1) رسم بياني يمثل العلاقة بين لوغاريتم معدل انتشار الشقوق (da/dN) و لوغاريتم تدرج شدة الإجهاد ΔK .

حيث يحدد العلاقة بين معدل انتشار الشقوق بالنسبة لعدد الدورات da/dN وتدرج شدة الإجهاد ΔK وينقسم إلى ثلاث مناطق تحدد بعوامل شدة الإجهاد ، في المنطقة الأولى تكون الشقوق صغيرة ميكروية ومستقرة وتتميز بأن عامل شدة الإجهاد الأعظمي أصغر من عتبة تدرج شدة الإجهاد ΔK_{th} أي $\Delta K_{th} > K_{max}$ وفي حال كانت قيمتها أكبر من العتبة تنمو الشقوق الصغيرة وتصل للمنطقة الثانية في الرسم البياني وهي المنطقة الأهم في وصف حالة الشقوق حيث تكون فيها الشقوق مستقرة نوعاً ما وتنمو خطياً وفق نموذج باريس [2].

تحدد هذه المنطقة متانة الكسر فعندما تصبح قيمة عامل شدة الإجهاد الأعظمي أكبر من متانة الكسر أي $K_{max} > K_c$ تصبح الشقوق غير مستقرة وتزداد سرعة نموها بشكل كبير جداً حتى يحدث الانهيار المفاجئ للهيكل [3] .

الدراسات المرجعية:

أكد الباحث Nicolò Bachschmid ما ذكره العالم Irwin عام 1957 بأن عامل شدة الإجهاد عند طرف الشق يصف حالة التعب للهيكل المدروس فإذا وصل (Stress Intensity Factor) لقيمة أكبر من قيمة متانة الكسر يصبح الشق غير مستقر وتزداد سرعة انتشاره حتى حدوث الانهيار النهائي للهيكل [3] .

اعتمد الباحث (Herrmann) عامل شدة الإجهاد كميّار لمعرفة حالة انتشار الشقوق في المحور الرئيسي

(محور السرعة المنخفضة) للنفثة الهوائية wind turbine ذات استطاعة 2.1 MW حيث تمت محاكاة انتشار الشقوق لمحور النفثة وتقدير حياة التعب له بتغيير نوع المعدن والوصول للمعدن الأنسب لهذا المحور بالاعتماد على نموذج باريس والذي تمت نمذجته باستخدام طريقة Block Diagram وباستخدام البيئة الحاسوبية (ANSYS) [4].

قام الباحث Rajesh M.Metkar بنمذجة انتشار الشق وفق نموذج باريس لعمود مرفقي في محرك IC (Internal-combustion)، حيث كان المعيار في معرفة عدد الدورات اللازمة لتقدم الشق حتى حدوث الانهيار هو وصول قيمة عامل شدة الإجهاد الأعظمي لقيمة أكبر من قيمة متانة الكسر ($K_{max} > K_C$) [5].

قام الباحث Tom Lassen بدراسة حول انهيار عمود المروحة الوسيط في ناقلة النفط المكوكية ، استخدم فيها عامل طول الشق بالمقارنة مع قطر العمود كمعيار لمعرفة حالة انتشار الشق في العمود بحيث إذا بلغ طول الشق قيمة أكبر من نصف قطر العمود ستزداد سرعة نموه حتى حدوث الانهيار النهائي [1].

اعتمد الباحث Lucas Gimenis de Moura طريقة Euler العددية لمحاكاة السلوك الديناميكي للشقوق كتابع للموضع و العمق ولمعامل شدة الإجهاد عند مقدمتها [6] وهذا يبرر الحاجة إلى نماذج موثوقة ودقيقة لتمثيل الشقوق في الأعمدة الدوارة ومحاكاة سلوكها الديناميكي للتنبؤ بتشكيل الشقوق و كشفها في مرحلة مبكرة والذي كان موضوع بعض الدراسات كما في الدراسة [7].

اعتمدت معظم الدراسات السابقة على عامل شدة الإجهاد كمعيار لمعرفة طول الشق الذي سيحدث عنده الانهيار وذلك بمقارنته بمتانة الكسر لمادة المحور ، واعتمدت أيضا مقارنة طول الشق بنصف قطر المحور المدروس وهذا ما سيتم اعتماده في الدراسة الحالية بالإضافة إلى دراسة آلية انتشار الشقوق في المحور المدروس باستخدام نموذج paris ومحاكاته باستخدام طريقتي Euler و Rung-Kutta العدديتين وبرمجتهما باستخدام بيئة Matlab للوصول إلى نتائج حاسوبية تتم مقارنتها بالنتائج التطبيقية عن التجارب العملية في الدراسات المرجعية .

أهمية البحث وأهدافه:

نظراً للحاجة الماسة لسلامة الهياكل المتعرضة للتشقق والانهيار كان لابد من دراسة تحليلية لآلية انهيار عمود التوصيل المتوسط لمروحة الناقل النفطية باعتباره أحد التطبيقات المهمة للأعمدة الدوارة المعرضة للانهيار في الناقلات النفطية فضلاً عن أنه المكون المعرض للانهيار بشكل كبير والذي سيسبب توقفه عن العمل خسائر فادحة وبالتالي يهدف البحث إلى:

الحصول على نموذج رياضي يصف آلية انهيار عمود التوصيل المتوسط لمروحة الناقل النفطية والتنبؤ بالعمر التشغيلي له بعد ظهور شق التعب مع الأخذ بعين الاعتبار (هندسة المكون ، نوع المعدن المصنوع منه ، متانة الكسر له ، نوع التحميل ، هندسة الشق المتشكل ، حقل الإجهاد عند مقدمة الشق مع كل زيادة في طوله) وذلك بهدف محاكاة الظروف التشغيلية للمحور قدر الإمكان والتنبؤ بالعمر التشغيلي له بعد ظهور الشقوق.

طرائق البحث ومواده:

- تم توصيف المعادلات الرياضية التي تصف آلية انتشار الشقوق حتى حدوث الانهيار وبالتالي معرفة عدد الدورات اللازمة لحدوث الانهيار في الهيكل المدروس .

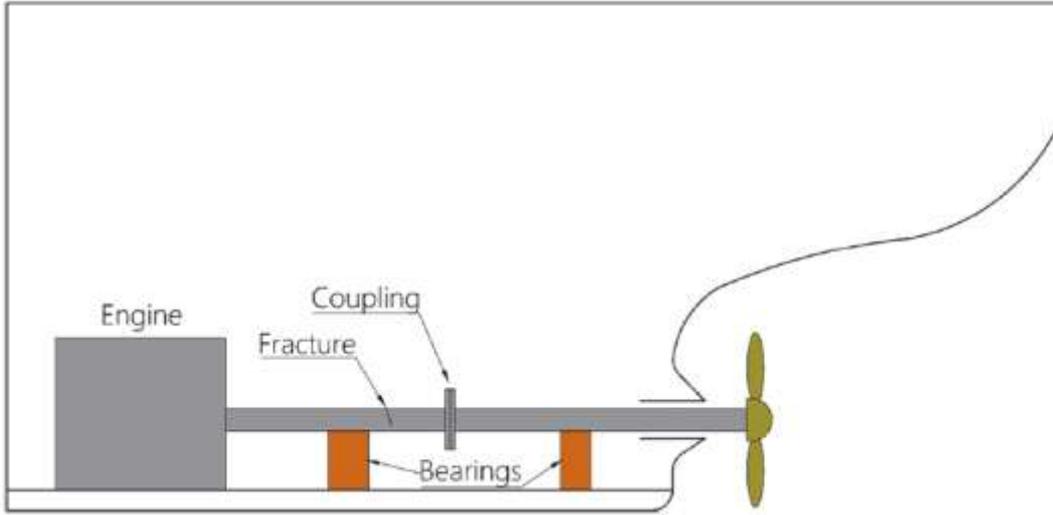
• تم محاكاة القيم التطبيقية بطريقتين :

□ الطريقة الأولى : النمذجة باستخدام طريقة (Euler) العددية في بيئة Matlab .

□ الطريقة الثانية : النمذجة باستخدام طريقة (Runge – Kutta) العددية في بيئة Matlab .

النموذج الرياضي لانتشار الشقوق في عمود التوصيل المتوسط لمروحة الناقل النفطية:

تمت دراسة آلية الانهيار في عمود التوصيل المتوسط لمروحة الناقل النفطية المبين تخطيطياً في الشكل (2) ، تم تطبيق نظرية ميكانيكا الكسر الخطية (linear elastic mechanics fracture) لاستنتاج حياة التعب التي تتألف من مرحلتين مرحلة بدء الشق crack initiation ومرحلة تقدم الشق crack propagation period حتى حصول الانهيار .



الشكل (2) رسم تخطيطي للعمود وموقع الكسر

تعطى المعادلة المعبرة عن حياة التعب للمحور كما يلي:

$$N = N_i + N_p \quad (1)$$

N : عدد الدورات الكلي الذي يمثل حياة التعب. (cycle)

N_i : عدد الدورات اللازمة لتشكل الشقوق . (cycle)

N_p : عدد الدورات اللازمة لتقدم الشقوق حتى الانهيار . (cycle)

يتم حساب عدد الدورات اللازمة لتقدم الشق N_p باستخدام نموذج باريس الذي يعطي العلاقة بين معدل انتشار الشق بالنسبة لعدد الدورات وعامل شدة الإجهاد عند مقدمة الشق ويعطى بالعلاقة الآتية [8] :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (2)$$

a : طول الشق. (mm)

N : عدد الدورات. (cycle)

ΔK : ندرج عامل شدة الإجهاد. (MPa \sqrt{mm}) (يتناسب عامل شدة الإجهاد مع الجذر التربيعي لطول الشق).

C, m : ثوابت تتعلق بالمادة. ولها القيم التالية في هذه الدراسة $m=3, C=1.83E-13$ [1].

لتحديد متى يصبح العمود وفق نموذج باريس قابلاً للانهييار تحت أصغر دورة تحميل ، هناك معياران يجب أن يتحقق على الأقل أحد منهما:

- تتم مقارنة عامل شدة الإجهاد الأعظمي K_{max} عند كل زيادة في معدل انتشار الشقوق بمتانة الكسر K_c وعندما تتجاوزها ($K_{max} > K_c$) يتسارع نمو الشقوق بشكل مفاجئ حتى حدوث الانهييار.
- تتم مقارنة طول الشق a بنصف قطر العمود الدوار d وعندما يتجاوز طول الشق نصف القطر ($a > d$) ينهار العمود .

يحسب عامل شدة الإجهاد وفق طريقة إيرون بالعلاقة الآتية: [9]

$$K_I = \sigma \beta \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} = (\sigma_{max} - \sigma_{min}) \beta \sqrt{\pi a} = \Delta \sigma \beta \sqrt{\pi a} \quad (4)$$

بتعويض العلاقة (4) في العلاقة (2) :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta \sigma \beta \sqrt{\pi a})^m \quad (5)$$

للحصول على عدد الدورات اللازمة لتقدم الشق N_p يتم تكامل العلاقة (5) بين الحدين a_c , a_{th} وفق مايلي :

$$\int_0^{N_p} dN = \frac{1}{C} \cdot \int_{a_{th}}^{a_c} \frac{da}{[\Delta K(a)]^m} \quad (6)$$

$$\int_0^{N_p} dN = \frac{1}{C} \cdot \int_{a_{th}}^{a_c} \frac{da}{[\Delta \sigma \beta \sqrt{\pi a}]^m} \quad (7)$$

تحسب (a_{th}) و (a_c) كما يلي:

$$a_{th} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta k_{th}}{s_f} \right)^2 \quad (8)$$

تحسب قيمة عتبة تدرج شدة الإجهاد بدلالة قطر البلورة وفق العلاقة :

$$\Delta k_{th} = s_f \sqrt{\pi \frac{D}{2}} \quad (9)$$

$$a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_{max}} \right)^2 \quad (10)$$

حيث:

K_I : هو عامل شدة الإجهاد $[Mpa\sqrt{mm}]$

K_{max} : عامل شدة الإجهاد الأعظمي $[Mpa\sqrt{mm}]$

K_{min} : عامل شدة الإجهاد الأصغري $[Mpa\sqrt{mm}]$

σ_{max} : الإجهاد الأعظمي المطبق $[MPa]$

σ_{min} : الإجهاد الأصغري المطبق $[MPa]$

a_{th} : طول الشق الابتدائي (عند العتبة Δk_{th}) $[mm]$

a_c : طول الشق الحرج $[mm]$

β : عامل لا بعدي يتعلق بهندسة الشق ويأخذ في هذه الدراسة القيمة $(\beta = 0.95)$. [1]

D : قيمة قطر حبيبة المادة في الشبكة البلورية.

s_f : حد التعب.

تؤخذ قيمة حد التعب من مخطط (S-N) الذي يعبر عن العلاقة بين عدد دورات التحميل N

(Number of cycle) بالنسبة للإجهاد المطبق (Stress) لمعدن المحور 42CrMO4 وفق DIN EN 10083.

$$\Delta k_{th} = 63 \text{ Mpa}$$

بتعويض قيمة عتبة تدرج شدة الإجهاد في العلاقة (8) تكون قيمة الشق الابتدائي الذي ستبدأ عنده المحاكاة :

$$a_{th} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{63}{50.26} \right)^2 = 0.5 \text{ mm}$$

النتائج والمناقشة:

من أجل معدن 42CrMo4 steel تم تنفيذ المحاكاة العددية لنمو الشقوق وفق نموذج paris المعبر عنه بالعلاقة (5) والذي يقترح مشكلة قيمة أولية (Initial value problem) ، من خلال معادلة تفاضلية عادية خطية من الرتبة الأولى باستخدام طريقة (Euler) العددية والتي تقوم بحساب قيمة الحل Y_{i+1} عند اللحظة X_{i+1}

بالاعتماد على قيمة الحل Y_i عند اللحظة السابقة X_i وقيمة الخطوة الزمنية h [10] كما يلي :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + f(x_i, y_i)h \quad (11)$$

$$x_{i+1} = x_i + h \quad (12)$$

ويعطى $f(x_i, y_i)$ انطلاقاً من الشروط الابتدائية بالعلاقة :

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx}, \quad y(x_0) = y_0 \quad (13)$$

جدول (1) البارامترات المعتمدة في الدراسة [1] (Tom Lassen ,2021).

N_p	B	m	C
6.68E + 07	0.95	3	1.83E-13

تمت برمجة هذه الطريقة بلغة Matlab كمايلي:

```

clc
clear
syms a
m=3;
c=1.83E-13;
B=0.95;
a_f= 180 %mm ;
sigma_max=36;
sigma_min=0;
h=10000
f=c*((sigma_max - sigma_min)*B*sqrt(pi)*sqrt(a))^m;
N(1)=0;
A(1)=0.5;
Nf=100000000000;
nsim=(Nf-N(1))/h
for i=1:nsim
    N(i+1)=N(i)+h ;
    n=N(i);
    a=A(i);
    A(i+1)=A(i)+h*subs(f);

```

```

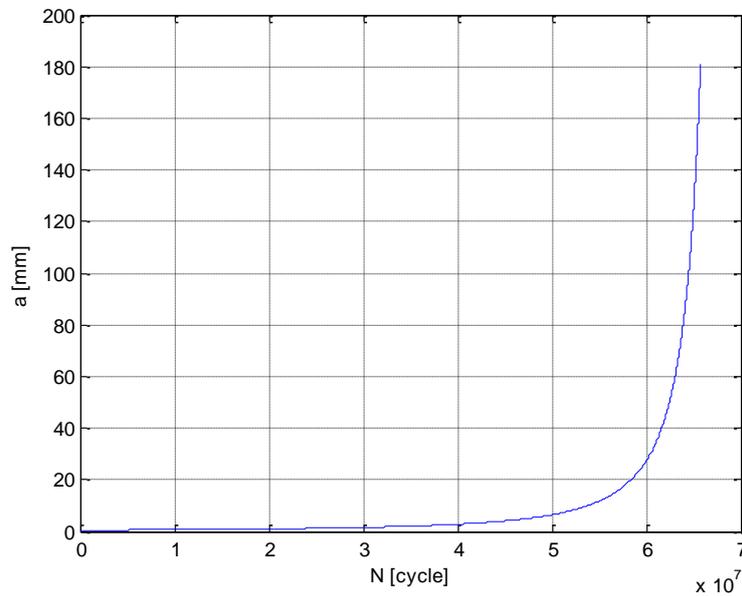
if a > a_f
    disp(sigma_max)
    disp(N(i))
    disp(A(i))
    break
end
end
plot(N,A)
grid

```

```

xlabel('N [cycle]')
ylabel('a [mm]')

```



الشكل (3) نتائج المحاكاة وفق Euler

ومن أجل دقة أكبر تمت محاكاة النموذج الرياضي وفق طريقة Rung-Kutta العددية التي تحل المعادلات التفاضلية الخطية وغير الخطية وتعطي قيمة تابع في لحظة معينة بدلالة بارمترات اللحظة السابقة و المشتقات عندها ، وتستنتج معادلات Rung-Kutta من منشور تايلور الي يعطى بالعلاقة الآتية [11] :

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h y_n'}{1!} + \frac{h^2 y_n''}{2!} + \frac{h^3 y_n'''}{3!} + \frac{h^4 y_n''''}{4!} + \dots + \frac{h^N y_n^N}{N!} \quad (14)$$

وبهذا تعطى الصيغة العامة لطريقة Rung-Kutta عند n=4 وفق المعادلات الآتية [12] :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (15)$$

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad (16)$$

$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{2} h, y_n + \frac{1}{2} k_1) \quad (17)$$

$$k_3 = h f(x_n + \frac{1}{2} h, y_n + \frac{1}{2} k_2) \quad (18)$$

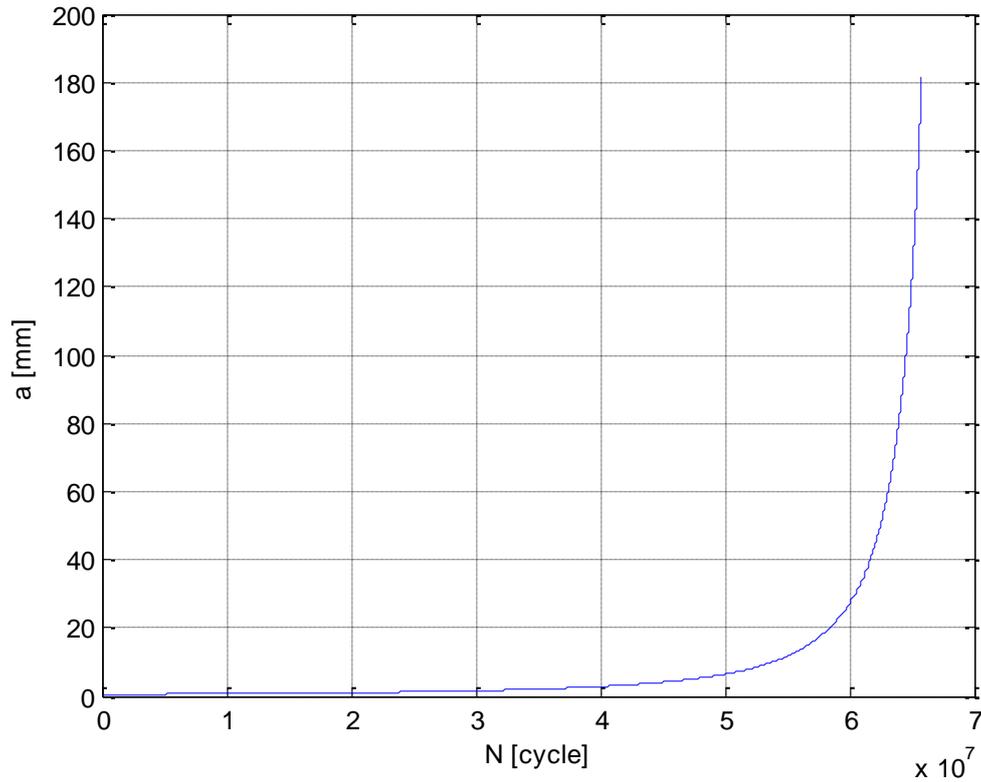
$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (19)$$

تم تصميم الكود البرمجي لطريقة Rung-Kutta وفق الآتي:

```

clc
clear
syms a
m=3;
c=1.83E-13;
B=0.95;
a_f=180 %mm ;
sigma_max=36;
sigma_min=0;
h=10000;
f=c*((sigma_max - sigma_min)*B*sqrt(pi)*sqrt(a))^m;
N(1)=0;
A(1)=0.5;
Nf=1000000000;
nsim=(Nf-N(1))/h
for i=1:nsim
    a=A(i);
    n=N(i);
    k1=subs(f);
    a=A(i)+0.5*k1*h;
    n=N(i)+0.5*h;
    k2=subs(f);
    a=A(i)+0.5*k2*h;
    n=N(i)+0.5*h;
    k3=subs(f);
    a=A(i)+k3*h;
    n=N(i)+h;
    k4=subs(f);
    A(i+1)=A(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
    N(i+1)=N(i)+h;
    if a > a_f
        disp(N(i))
        disp(A(i))
        break
    end
end
figure
plot(N,A)
grid
xlabel('N [cycle]')
ylabel('a [mm]')

```



الشكل (4) نتائج المحاكاة وفق Rung-Kutta

يلاحظ من النتائج في الشكلين (3) و(4) بأن العمود ينهار عند عدد دورات وفق Euler تقدر $N_p = 65730000$ cycle وعدد الدورات اللازمة لتقدم الشق حتى الانهيار وفق Rung-Kutta تقدر $N_p = 65780000$ cycle وهي قيم مطابقة بدقة مقبولة للنتائج في الدراسة المرجعية [1] مما يؤكد صحة النموذج المصممة و التي يمكن استخدامها لأي عمود آخر تبعاً البارامترات الخاصة به.

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

- 1- تم التوصل الى كتابة توصيف للمعادلات الممثلة لامتداد الشق كتابع لعدد الدورات.
- 2- تم حل هذه المعادلات باستخدام طرق عددية لحل المعادلات التفاضلية (Euler، Rung-Kutta).
- 3- تم محاكاة سلوك المنظومة عند شروط معينة موافقة للدراسة [1].
- 4- بمقارنة النتائج مع الدراسة تم التوصل الى أن النموذج الحاسوبي موثوق للتنبؤ بسلوك الشق مع عدد الدورات.
- 5- تم التوصل لنموذج رياضي يحاكي امتداد الشقوق حتى حدوث الانهيار في عمود التوصيل المتوسط لمروحة الناقل النفطية والذي تنبأ بعدد الدورات التي تحملها العمود قبل الانهيار .

التوصيات:

1. بناء النماذج الرياضية الدقيقة التي تحاكي الانهيار على مستوى البنية المجهرية.

2. العمل على تطوير النماذج الرياضية التي تصف الانهيار بتطبيق الطرق التحليلية كطريقة العناصر المنتهية في الحساب الدقيق للإجهادات الناشئة على حدود البلورات وبالتالي الحساب الدقيق لعامل شدة الإجهاد (Stress Intensity Factor) عند مقدمة الشقوق .
3. العمل على دراسة الطرق المختلفة لحساب عامل شدة الإجهاد عند مقدمة الشق بالإضافة لتطوير طرق حساب متانة الكسر رياضياً و تجريبياً.
4. العمل على إنشاء نموذج رياضي يأخذ بعين الاعتبار ظروف الرطوبة والتآكل ودرجات الحرارة وغيرها من البارامترات الهامة المحيطة بالأعمدة الدوارة.
5. الركيزة الأساسية في ميكانيكا الكسر هي عامل شدة الإجهاد وهو المتغير الذي يمكن اعتماده في تحليل الحالة الحركية للشقوق.

References:

- [1] Tom Lassen. " Crack growth models for multiaxial fatigue in a ship's propeller shaft " .(2021)
- [2] William D. Callister , Jr."Materials Science and Engineering". Chapter 8 ,Failure. seventh editions.(2007).
- [3] Nicolò Bachschmid , Ezio Tanzi, Paolo Pennacchi . "Cracked Rotors, A Survey on Static and Dynamic Behaviour Including Modelling and Diagnosis".(2010).
- [4] J Herrmann, "Fatigue life on a full scale test rig: Forged versus cast wind turbine rotor shafts" Journal of Physics: Conference Series 753 (2016).
- [5] Rajesh M. Metkar , "COMPARATIVE EVALUATION OF FATIGUE ASSESSMENT TECHNIQUES ON A FORGED STEEL CRANKSHAFT OF A SINGLE CYLINDER DIESEL ENGINE"(2012) .
- [6] Lucas Gimenis de Moura, "Application of Numerical Methods for Integrating Differential Equations of Crack Evolution Models to the Range of Constant Tension" Federal Technological University of Paraná, DAMEC, Curitiba, Paraná, Brazil .(2015)
- [7] Matthew J. Pais , "High-Order Integration of Fatigue Crack Growth Using Surrogate Model" University of Florida, Gainesville, (2011)
- [8] Xiaobin Lin , "NUMERICAL SIMULATION OF FATIGUE CRACK GROWTH" University of Sheffield,(1994).
- [9] Vivek K.Sunnappwar , "COMPARATIVE EVALUATION OF FATIGUE ASSESSMENT TECHNIQUES ON A FORGED STEEL CRANKSHAFT OF A SINGLE CYLINDER DIESEL ENGINE", Proceedings of the ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition,(2012).
- [10] Atkinson, K.E., Han, W. and Stewart, Introduction. In Numerical Solution of Ordinary Differential Equations (eds K.E. Atkinson, W. Han and D. Stewart). (2009)
- [11] David I. LANLEGE , "Comparison of Euler and Range-Kutta methods in solving ordinary differential equations of order two and four"Leonardo Journal of Sciences, p. 10-37 ,(2018).
- [12] L.Zheng , X.Zhang , "Modeling and Analysis of Modern Fluid Problems" Chapter 8 - Numerical Methods, Mathematics in Science and Engineering p.364,(2017).