

The Numerical Stability Condition in the Mathematical Solution Algorithm of Newtonian Fluid Flow Equations Applied on a Dynamic Mesh

Dr. Nisrine Mohamad*

(Received 19 / 2 / 2023. Accepted 24 / 4 / 2023)

□ ABSTRACT □

The use of dynamic mesh in solving the differential equations of flow helps avoid the use of the principle of flow reflection usually taken into account in the majority of the problems of fluid-structure interaction. However, the applications of this principle are limited. The use of this type of dynamic mesh leads to incorrect results that depend on many considerations, including the deformation of the finite elements and their inconsistency with the movement of the body, which causes instability in the numerical solution of the flow parameters.

This research presents a contribution to determine the condition that guarantees the stability of the numerical solution as well as the conservation of the geometric element property (the condition of geometric conservation) when solving the flow equations of an incompressible Newtonian fluid using the finite element method after selecting a test function of the Galerkin type. A method to reset the coordinates of the mesh is also proposed.

Keywords: Newtonian fluid, dynamic mesh, finite elements, Navier stokes equations.

Copyright



:Tishreen University journal-Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

* Associate Professor, Marine Engineering Department, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria. nisrine.mohamad@live.fr

شرط الاستقرار الرقمي في خوارزمية الحل الرياضي لمعادلات جريان مائع نيوتوني على شبكة ديناميكية

د. نسرين محمد*

(تاريخ الإيداع 19 / 2 / 2023. قُبِلَ للنشر في 24 / 4 / 2023)

□ ملخص □

يسمح استخدام الشبكات الديناميكية عند الحل الرقمي للمعادلات التفاضلية النازمة للجريان بالاستغناء عن مبدأ انعكاس الجريان المستخدم عادة في غالبية الأبحاث التي تتناول التداخل الهيدروديناميكي بين السفن أو أي جسم متحرك في سائل وهذا السائل والذي تطبيقاته تعد محدودة، وغالباً ما يترافق استخدام هذا النوع من الشبكات بنتائج غير مرضية تتوقف على اعتبارات عديدة من بينها تشوه العناصر المنتهية وعدم موافقتها لحركة الجسم الأمر الذي يسبب عدم استقرار في الحل الرقمي لبارامترات الجريان. يقدم هذا البحث مساهمة في تحديد الشرط اللازم الذي يضمن على التوازي استقرار الحل الرقمي والحفاظ على خاصية العنصر الهندسي (شرط الانحفاظ الهندسي) عند حل معادلات جريان مائع نيوتوني غير قابل للانضغاط بطريقة العناصر المنتهية بعد اختيار تابع تجريبي من نوع Galerkin مع اقتراح آلية لإعادة ضبط إحداثيات الشبكة.

الكلمات المفتاحية: مائع نيوتوني، شبكة ديناميكية، عناصر منتهية، معادلات نافيه ستوكس.

حقوق النشر : مجلة جامعة تشرين- سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص



CC BY-NC-SA 04

* أستاذ مساعد - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.
nistrine.mohamad@live.fr

مقدمة:

لإدخال مفهوم الحركة في خوارزمية الحل الرقمي لمعادلات الجريان من الضروري إعادة ضبط الشبكة وفق الوضع الجديد خلال الزمن لتتوافق مع الوضع الجديد للجسم من أجل ذلك توجد عدة طرائق نذكر منها الآتي:

إعادة ضبط الشبكة بالحركة على شكل كتل عناصر:

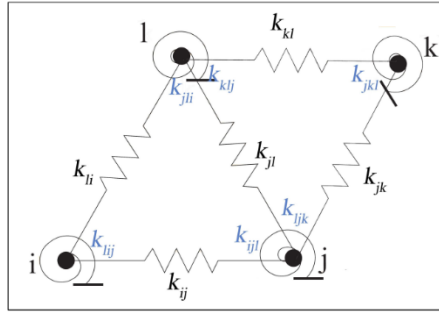
تستخدم هذه الطريقة عند حركة جسم وحيد في وسط لا متناهٍ (المياه غير المحدودة مثلاً) حيث يمكن إزاحة الشبكة ككتلة متكاملة مع الجسم، وبالتالي فإن كل عقدة من الشبكة تعتبر متصلة بشكل مباشر مع الجسم بحيث تخضع حركتها لنفس شعاع الحركة للجسم المحسوب وفق المبدأ الأساسي في الديناميك، وتخضع حدود المجال لنفس الحركة الانسحابية للجسم وبالتالي لا يمكن أن تكون حركتها مستقلة عن حركة الجسم [1].

إعادة تشكيل الشبكة عن طريق الترجيح الرياضي:

تهدف هذه الطريقة إلى التعبير عن خصائص حركة الجسم بواسطة عامل ترجيح k_p ، تزداد قيمة هذا العامل عند عناصر الشبكة القريبة من الجسم المتحرك بحيث تتراوح قيمته بين 0 و 1. تأخذ عقد الشبكة التي هي على تماس مع الجسم الرقم 1، أما عقد الشبكة المنطبقة على حدود المجال تأخذ القيمة 0، ويتم الحصول على قيمة العامل بالنسبة للعقد الداخلية عن طريق حل معادلة لابلاس، ومن ثم يتم توزيع قيم هذا العامل باستيفاء رياضي وفقاً للمسافة بين العقد، ولا تستخدم هذه الطريقة في توليد الشبكة الديناميكية في حال كان الجسم قابلاً للتشوه أثناء حركته [2].

إعادة بناء الشبكة استناداً لمحاكاتها لحركة النواض:

تهدف هذه الطريقة إلى محاكاة حركة شبكة العناصر المنتهية بحركة شبه ستاتيكية لجسم ما بحيث يتم تمثيل كل عقدة بنابض خطي كما هو مبين في الشكل (1)، ومن أجل تحسين أداء الشبكة والتحكم بالتشوهات الزاوية الحاصلة لعناصر الشبكة والسماح بإزاحات كبيرة لحدود المجال فقد تم تمثيل حركة بعض عناصر الشبكة بنابض قتل.



الشكل 1: محاكاة مبدأ النواض في توليد شبكة ديناميكية [4]

تتطلب نظرية النابض دراسة معادلات التوازن عند كل عقدة داخلية للشبكة الأمر الذي يؤدي في النهاية إلى تشكيل جملة معادلات تكون إزاحة حدود المجال فيها معروفة وتمثل الشرط الحدي لإغلاق جملة المعادلات الجبرية.

من مزايا هذه الطريقة الحفاظ على مصفوفة تعريف ارتباط العناصر المنتهية مع توليد شبكة جديدة مناسبة لحركة الجسم ولكنها صعبة البرمجة بالإضافة إلى الزمن الحسابي الطويل نسبياً لذلك تبقى استخداماتها محدودة [4] [3].

إعادة بناء الشبكة استناداً إلى نظرية أشباه المواد:

تهدف هذه الطريقة إلى تمثيل شبكة العناصر المنتهية للجريان بجسم لدن قابل للتشوه، والحصول على إزاحة العقد الداخلية حيث تخضع شبكة العناصر المنتهية للمعادلة النازمة لعلاقة الإجهاد بالانفعال للأجسام القابلة للتشوه. قام

الباحث الفرنسي *Lefrancois* [6] باستخدام المبدأ العام لهذه الطريقة في توليد شبكة ديناميكية بزمن مختصر فعلياً وذلك من خلال تقسيم المجال الحسابي إلى عناصر منتهية بحجم كبير نسبياً ومن ثم إيجاد شعاع الإزاحة للشبكة المنخفضة الكثافة واستخدام عملية الاستيفاء الرياضي لإعادة توزيع العناصر الحقيقية للشبكة الحقيقية العالية الكثافة ضمن المجال الجديد بعد الإزاحة.

تم الاعتماد على مبدأ الشبكة الديناميكية من قبل العديد من الباحثين، ولكن لم يتم استخدامها على مجال واسع في الأبحاث التي تتناول حل مسائل الجريان في مجال الهيدروليك البحري والنهري [7]، فاستخدام الشبكات الديناميكية يفرض قيوداً هامة على مستوى الشكل الهندسي للشبكة، وفي هذا البحث سيتم إيجاد شرط الاستقرار الرقمي لحل معادلات جريان مائع نيوتوني غير مستقر (تابع للزمن) في شبكة ديناميكية وهو الشرط اللازم لتحقيق الانحفاظ الهندسي لعناصر الشبكة وتجنب التذبذبات في قيم بارامترات الجريان.

أهمية البحث وأهدافه:

يعد هذا البحث بمثابة مساهمة علمية في حل معادلات الجريان لمائع غير قابل للانضغاط باستخدام شبكة ديناميكية على مجالات هندسية بحدود متحركة.

حيث يهدف البحث إلى حل مشكلة عدم استقرار الحل الرقمي عند استخدام شبكة ديناميكية في حل معادلات الجريان للموائع النيوتونية الأمر الذي يساعد في الاستغناء عن شرط انعكاس الجريان عند دراسة حركة الجريان حول الأجسام المتحركة.

طرائق البحث ومواده:

يعتمد هذا البحث المنهج التحليلي الرياضي في دراسة جريان مائع نيوتوني باستخدام طريقة العناصر المنتهية، ومن ثم اقتراح خوارزمية لتحديث إحداثيات شبكة العناصر المستخدمة في شبكة ديناميكية مع تحديد الشرط اللازم لتجنب التذبذبات في حقل السرعة للجريان.

الموديل الرياضي لمعادلات جريان مائع نيوتوني غير قابل للانضغاط:

يمكن كتابة معادلات الجريان على شكل تفاضلي وفق العلاقة التالية:

$$\left. \frac{\partial (J \cdot \vec{U})}{\partial t} \right|_{\zeta} + J(t) \cdot \nabla_x (F^c(\vec{U}, \vec{x}, \vec{x}) + F^d(\vec{U}, \vec{x})) = 0. \quad (1)$$

حيث إن: F^c تمثل حد الحمل للجريان تعبر عن تغير بارامترات الجريان بتغير الإحداثيات المكانية.

F^d : تمثل الحد الانتشاري للجريان.

$J(t)$: مصفوفة Jacobian للتحويل بين الإحداثيات الديكارتية والإحداثيات مرتبطة بحركة جزيء من المائع.

يتم الحل الرقمي للمعادلة (1) باستخدام طريقة العناصر المنتهية ويتم ذلك بتطبيق نظرية الرواسب الترجيحية وذلك

بضرب المعادلة بتابع تجريبي $\delta \vec{U}$ من نوع Galerkin ومن ثم التكامل على طول المجال المدروس [8]:

$$\int_{V^r} \delta \vec{U} \cdot \left[\left. \frac{\partial (J \cdot \vec{U})}{\partial t} \right|_{\zeta} + J \cdot \nabla_x \cdot (F^c(\vec{U}, \vec{x}, \vec{x}) + F^d(\vec{U}, \vec{x})) \right] dV \quad (2)$$

حيث إن: $\vec{x} = \vec{U}_m$ سرعة المجال (سرعة الشبكة الديناميكية).

نكامل بالتجزئة وذلك بهدف تخفيض درجة الاشتقاق مع الأخذ بالاعتبار أن $\frac{\partial \delta U}{\partial t} = 0$ [9]:

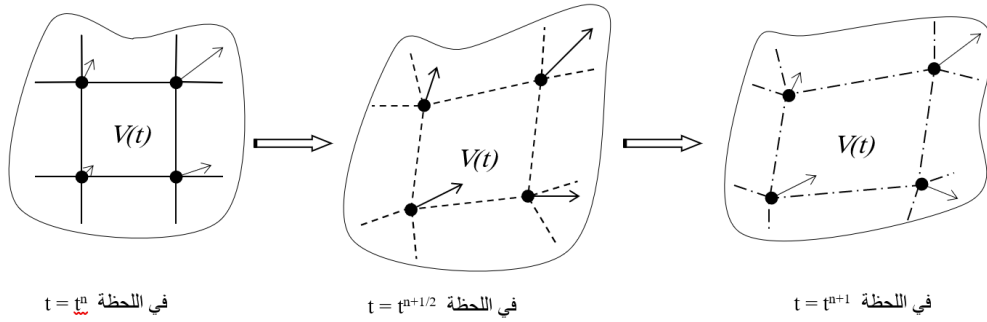
$$\int_{V(t)} \delta \vec{U} \cdot \vec{U} dV + \int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot (F^C(\vec{U}, \vec{x}, \vec{x}) + F^D(\vec{U}, \vec{x})) dV = 0. \quad (3)$$

$i=x, y$

نكامل بين اللحظتين الزمنية t^n و t^{n+1}

$$\int_{V(t^{n+1})} \delta \vec{U} \cdot \vec{U} dV - \int_{V(t^n)} \delta \vec{U} \cdot \vec{U} dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot (F_i^C(\vec{U}, \vec{x}, \vec{x}) + F_i^D(\vec{U}, \vec{x})) dV dt = 0. \quad (4)$$

تعتمد حلول المعادلة (4) على تحديد قيم مجال التكامل لحدود هذه المعادلة والتي تضمن الحصول على حل مستقر ودقيق على شبكة العناصر المنتهية في اللحظة $t = t^n$ وفي اللحظة $t = t^{n+1}$ أو في لحظة وسطية بينهما كما هو مبين في الشكل 2 الذي يمثل عنصر من الشبكة في حالة تشوهه، وكذلك الأمر فيما يتعلق باختبار سرعة الشبكة الديناميكية.



الشكل 2: عنصر من الشبكة في حالة تشوهه

الحل الرقمي المختار من أجل حساب الحد $\int_{t^{n+1}}^{t^n} \int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot F_i dV dt$ يجب أن يحقق حالة الجريان الموحد مع ملاحظة أن $U^* = Const$ وبالتالي في جملة المعادلات الأخيرة يتم تعويض $U = U^*$:

$$\int_{V(t^{n+1})} \delta \vec{U} \cdot \vec{U}^* dV - \int_{V(t^n)} \delta \vec{U} \cdot \vec{U}^* dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot (F_i^C(\vec{U}^*, \vec{x}, \vec{x}) + F_i^D(\vec{U}^*, \vec{x})) dV dt = 0. \quad (5)$$

بما أن المعادلة (5) محققة مهما تكن قيمة تابع الترجيح بالتالي يمكن فرض أي قيمة لهذا التابع، ولسهولة الحساب يُعطى تابع الترجيح (تابع الوزن) القيمة صفر على حدود المجال كقيمة افتراضية:

$$\int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot F(\vec{U}^*) dV = 0.$$

تكتب المعادلة (5) وفق الآتي:

$$\int_{V(t^{n+1})} \delta \vec{U} \cdot \vec{U}^* dV - \int_{V(t^n)} \delta \vec{U} \cdot \vec{U}^* dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot \vec{x} \cdot \vec{U}^* dV dt = 0. \quad (6)$$

يمكن تبسيط المعادلة (6) وفق الشكل الآتي:

$$\int_{V(t^{n+1})} \delta \vec{U} dV - \int_{V(t^n)} \delta \vec{U} dV - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V(t)} \delta \vec{U}_{,i} \cdot \vec{x} dV dt = 0 \quad (7)$$

تمثل هذه المعادلة شرط الانحفاظ الهندسي لصيغة الحل الرقمي بطريقة العناصر المنتهية وفق وصف اولر - لاغرانج العشوائي.

انطلاقاً من التحليل الرياضي الذي تم شرحه سابقاً وبهدف إيجاد الصيغة الرياضية المناسبة لتكامل الحد الأخير من المعادلة (7) تم اقتراح التحليل الآتي:
بفرض أن:

$$G(T) = \int_{i^n V(t)}^T \int \delta \bar{U}_{,i} \cdot \bar{x}_i dV dt \quad (8)$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل التالي:

$$G(T) = \int_{V(T)} \delta \bar{U}(\zeta(x, T)) dV dt - \int_{V(t^n)} \delta \bar{U}(\zeta(x, t^n)) dV dt \quad (9)$$

من المعادلتين (8) و(9) يمكن كتابة المعادلة التالية:

$$\frac{dG(T)}{dT} = \int_{V(T)} \delta \bar{U}_{,i} dV = \frac{d}{dT} \int_{V(T)} \delta \bar{U}(T) dV \quad (10)$$

الصيغة المناسبة التي تسمح بحساب التكامل الدقيق للحد $\int_{V(t^n)} \delta \bar{U} dV$ من المعادلة (7) والتي تحقق شرط الاستقرار الهندسي هي تلك التي تسمح بالحساب الدقيق للحد:

$$\int_{i^n}^{i^{n+1}} \frac{d}{dT} \int_{V(T)} \delta \bar{U}(T) dV$$

في جملة الإحداثيات الديكارتيّة المعتمدة، يُعطى التقريب العقدي لإحداثيات عنصر منتهٍ بالعلاقة [8]:

$$\begin{cases} \bar{\zeta} = (\zeta, \eta) \\ \bar{x} = (x, y) \end{cases}, \quad \bar{x}(\bar{\zeta}, t) = \sum_{k=1}^4 N_k(\bar{\zeta}) \cdot \bar{x}_k(t)$$

حيث إن:

\bar{x}_k : إحداثيات عقد الشبكة

يتم استخدام عنصر مرجعي وذلك لسهولة الحساب، وتعطى مصفوفة التحويل (Jacobian) التي تربط العنصر الحقيقي (x, y) بالعنصر المرجعي (ζ, η) وفق الآتي:

$$J(t) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \left[\frac{\partial N_k}{\partial \zeta} \bar{x}_k \right]$$

بفرض وجود إزاحة خطية للعقد بين اللحظتين الزمنية t^n و t^{n+1}

$$\bar{x}(t) = (1 - \delta(t)) \cdot \bar{x}^n + \delta(t) \cdot \bar{x}^{n+1}$$

$$\delta(t=t^n)=0, \text{ , et } \delta(t=t^{n+1})=1 \text{ مع}$$

من أجل $t=T$:

$$\bar{x}(T) = (1 - \delta(T)) \cdot \bar{x}^n + \delta(T) \cdot \bar{x}^{n+1}$$

$$J(T, \zeta) = J_0(\zeta) + \delta J_1(\zeta) + \delta^2 J_2(\zeta)$$

ويمكن كتابة التابع G وفق مايلي:

$$G(T) = \sum_{ie=1}^{nelt} \int_{V^r} \delta \bar{U}(\zeta) (J_0(\zeta) + \delta \cdot J_1(\zeta) + \delta^2 \cdot J_2(\zeta)) d\zeta$$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{d}{dt} G(T) dT = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \dot{\delta}(T) \frac{d}{d\delta} G(\delta(T)) dT$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\delta} G(\delta(T)) d\delta$$

حيث إن: nelt هو عدد العناصر الكلي.

الحد $\frac{d}{d\delta} G(\delta(T))$ هو تابع خطي بالنسبة لـ $\delta(T)$ وشرط الاستقرار الهندسي يجب أن يتحقق عند تكامل الحد الأخير من المعادلة (7) على الشبكة في اللحظة $t=t^{n+1/2}$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{V(t)} \delta \bar{U} \cdot \bar{F}^c(\bar{U}, \bar{x}, \bar{x}) dV dt = \Delta t \int_{V(x^{n+\frac{1}{2}})} \delta \bar{U} \cdot \bar{F}^c(\bar{U}, \bar{x}^{n+\frac{1}{2}}, \bar{x}^{n+\frac{1}{2}}) dV \quad (11)$$

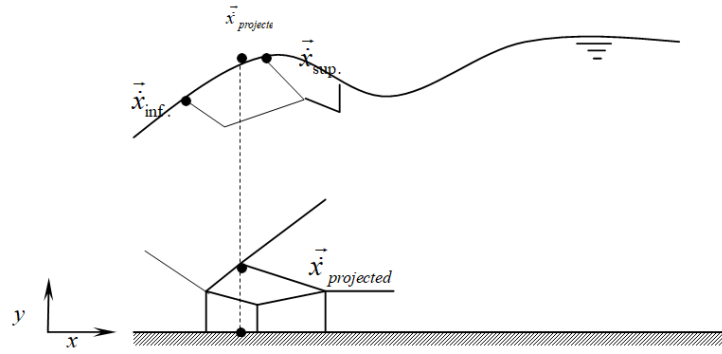
$$\bar{x}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{x}^{n+1} + \bar{x}^n}{2},$$

$$\bar{x}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n}{2},$$

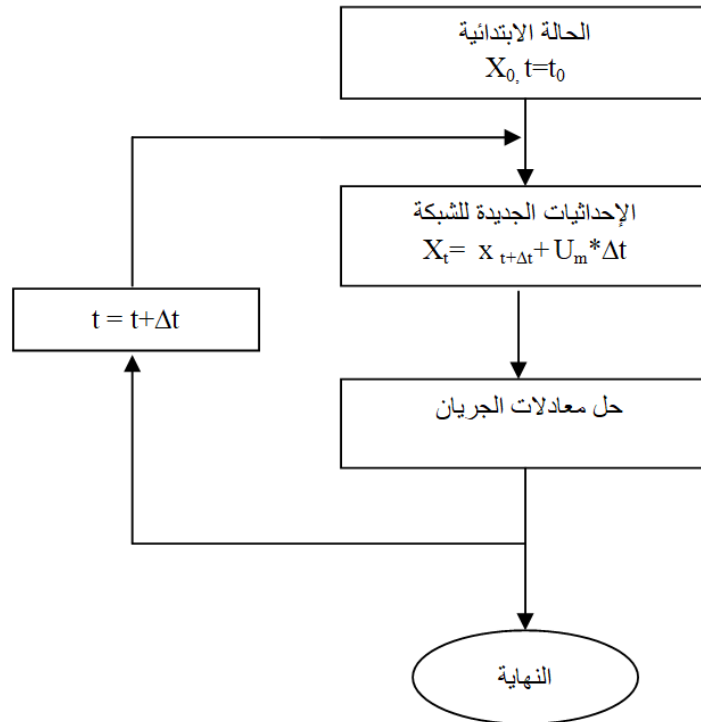
تحديث إحداثيات الشبكة:

يتشوه السطح الذي يحتوي السائل بين لحظتين زمنيتين ويجب تحديث الشبكة من جديد، في المراجع العلمية توجد عدة طرائق مقترحة لحساب سرعة الشبكة، من بينها اعتبار أن الشبكة مسألة مستقلة عن حسابات الجريان يتم ربطها بحسابات الجريان، وبالتالي يتم تحديث الوضع الجديد للشبكة بحل جملة معادلات خاصة بحركة الشبكة فقط. لا يعد استخدام هذه الطرائق في توليد الشبكة الديناميكية فعالاً في حل معادلات جريان مائع نيوتوني ويتطلب زمن حسابي إضافي، في هذا البحث يتم إعادة ضبط الشبكة الديناميكية عن طريق حساب سرعة الشبكة وفق الآتي كما هو موضَّح في الشكل (3):

- 1- يتم تحديد مسقط كل عقدة داخلية من الشبكة على الجدار المتحرك وتحديد العقد المحيطة بذلك المسقط (حيث السرعة معلومة).
- 2- يتم حساب السرعة $\vec{x}_{projected}$ للعقدة التي تم إسقاطها مع سرعة العقد المحيطة بها \vec{x}_{sup} و \vec{x}_{inf} .
- 3- يتم استنتاج سرعة العقدة الداخلية في الشبكة عن طريق الاستيفاء الخطي بين العقدة التي تم إسقاطها ذات السرعة $\vec{x}_{projected}$ والعقدة الموافقة على القاع ذات السرعة المعدومة (شرط الالتصاق). تم توضيح خوارزمية ضبط الشبكة في الشكل (4).



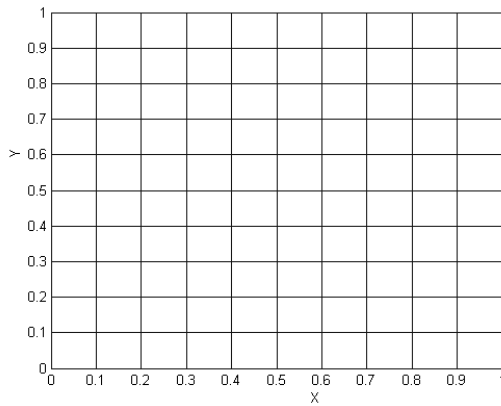
الشكل (3) إعادة ضبط شبكة العناصر المنتهية



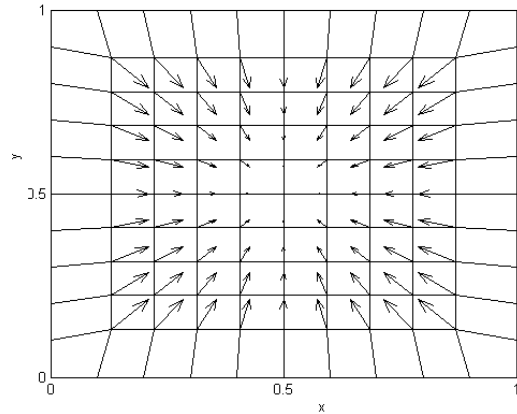
الشكل (4) خوارزمية الحل لتحديث إحداثيات الشبكة

النتائج والمناقشة:

تم التحقق من أهمية إدراج شرط الاستقرار الهندسي عبر الحل الرقمي لمعادلات جريان مائع نيوتوني بسرعة ثابتة (نمط الجريان الموحد $\|\vec{U}\| = Cre$) على مجال للجريان على شكل مستطيل تم تجزئته إلى 10×10 عنصر (انظر الشكل (5)). تم تطبيق حركة عشوائية على الشبكة ونلاحظ أن عقد الشبكة تتزاح نحو مركز المجال مع المحافظة على ثبات حدود المجال كما هو مبين في الشكل (6).

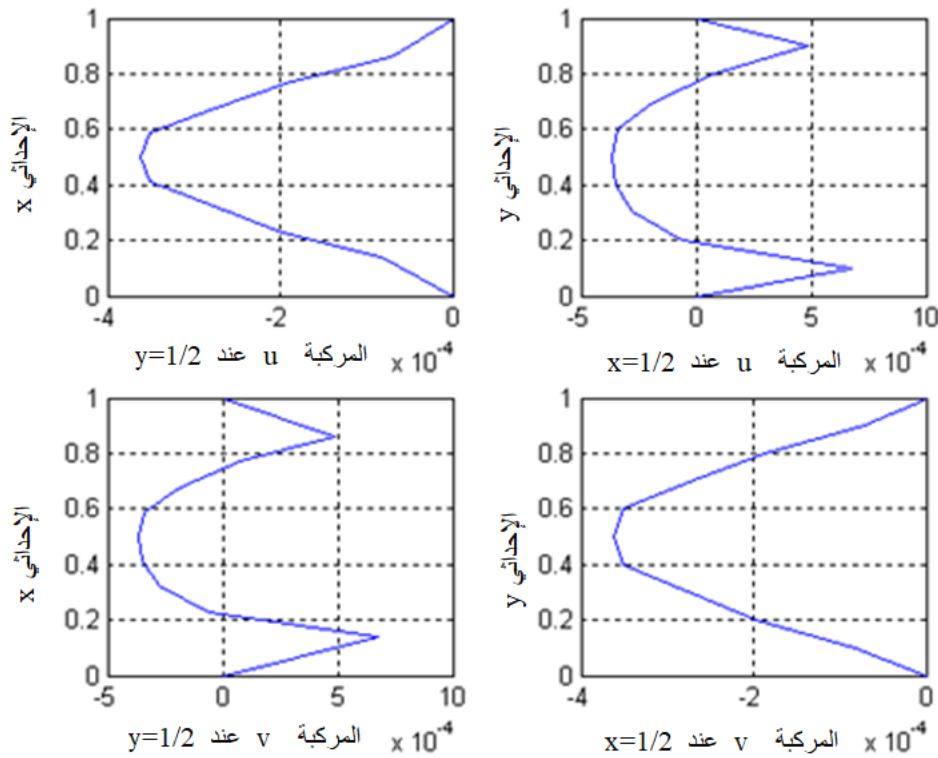


الشكل 5: الشبكة في الوضع الابتدائي

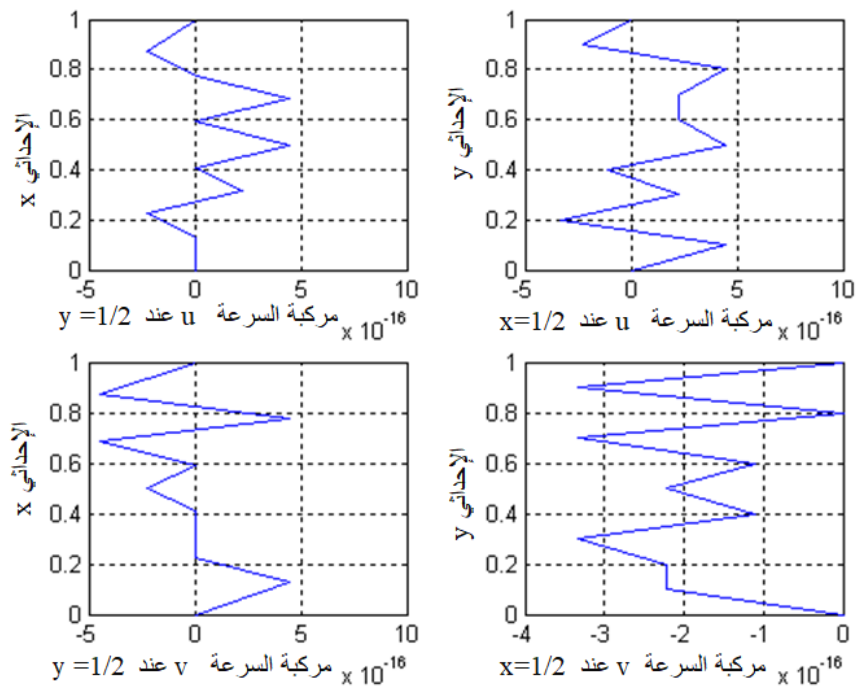


الشكل 6: الشبكة قيد التشوه مع المحافظة على عناصر الحدود

عند إجراء التكامل في اللحظة الزمنية $t=t^n$ يُلاحظ وجود اضطراب في الحل الرقمي يظهر بشكل واضح في التشويش في حقل السرعة كما هو مبين في الشكل (7)، من جهة أخرى عند التكامل في اللحظة الزمنية $t=t^{n+1/2}$ فإن التشويش في حقل السرعة يكاد ينعدم حيث يكون من مرتبة 10^{-16} كما هو مبين في الشكل (8).

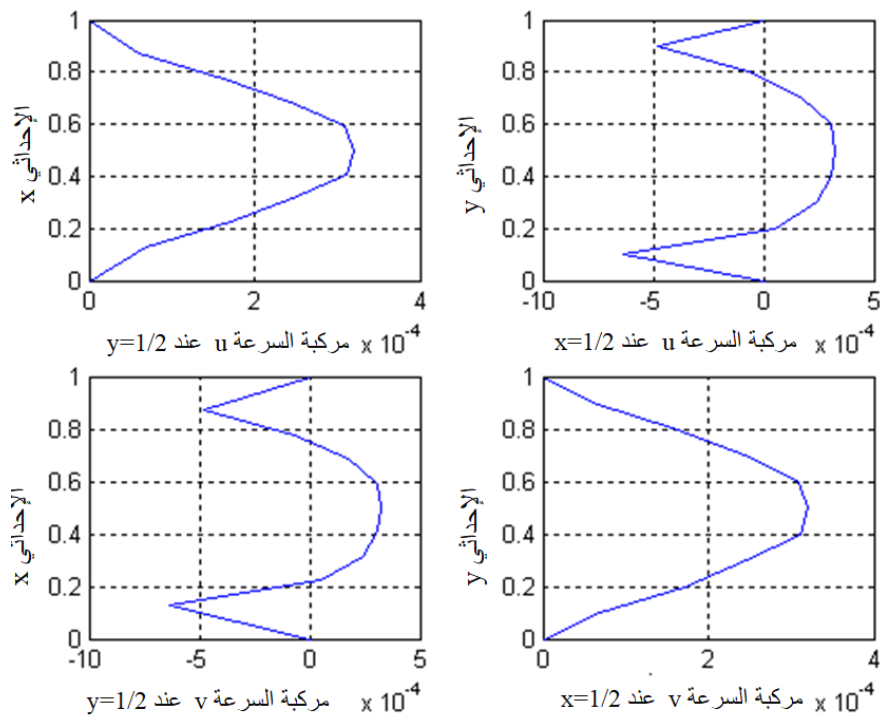


الشكل 7: حقل السرعة عند التكامل في اللحظة $t = t^n$



الشكل 8: حقل السرعة عند التكامل في اللحظة $t=t^{n+1/2}$

يبين الشكل (9) بيين نتائج الحساب الرقمي للتكامل في اللحظة الزمنية $t=t^{n+1}$ حيث يلاحظ وجود تذبذبات في قيم حقل السرعة لا يمكن تجاهلها.



الشكل (9) حقل السرعة التذبذبي التكامل في اللحظة $t=t^{n+1}$

يمكن القول أن عدم أخذ شرط الاستقرار الهندسي بالاعتبار عند إعادة ضبط إحداثيات العقد في الشبكة الديناميكية يؤدي إلى وجود تذبذبات في الحل الرقمي.

الاستنتاجات والتوصيات:

تم في هذا البحث استخراج شرط الاستقرار الهندسي عند حل معادلات الجريان لمائع نيوتوني على شبكة ديناميكية باستخدام طريقة العناصر المنتهية، حيث تم شرح آلية إعادة ضبط الشبكة الديناميكية عن طريق حساب سرعة الشبكة، وبيّن البحث ضرورة أن تحقق سرعة عناصر الشبكة الديناميكية شرط الاستقرار الهندسي وذلك لتجنّب الأخطاء في الحل الرقمي لبارامترات الجريان، ويعد ذلك من القيود الهامة على مستوى الشكل الهندسي للشبكة، وعدم الأخذ بالاعتبار لهذا الشرط يمكن أن يسبب في حالات الإزاحات الكبيرة ظهور اضطرابات وتذبذبات في الحل الرقمي للمعادلات التفاضلية النازمة للجريان، وهذا ما بيّنه التطبيق على شبكة من العناصر المنتهية حيث إنّ التكامل لحدود معادلات الجريان لا يجب أن يتم بتسلسل زمني متتالي وإنما يجب إجراء التكامل عند الخطوة الزمنية $\Delta t^{n+1/2}$. من توصيات هذا البحث التحقّق من فعالية شرط الاستقرار الرقمي في ضوء التداخل الهيدروديناميكي بين جسم متحرك والجريان والحل الرقمي لمعادلات الجريان بعد الأخذ بالاعتبار ضياع الضغط نتيجة اضطراب الجريان.

References:

- [1] LEROYER, A. *Study of Fluid-Structure Interaction of Solid Bodies or With Imposed Deformation by Solving Navier-Stokes Equations Contribution to The Numerical Modeling of Cavitation*. PhD thesis, École Centrale de Nantes, 2004.
- [2] NAYER, G. De. *Mesh Deformation Technique By Pseudo-Elastic Medium Analogy Within A Finite-Volume Navier-Stokes Solver, GDR Interaction Fluide Structure*, Cnam Paris, 14-15, 2007.
- [3] BATINA, J. T. *Unsteady Euler Airfoil Solutions Using Unstructured Dynamic Meshes*. AIAA 27th Aerospace Science Meeting - 89-0115, Reno, Nevada, January 9-12, 1989.
- [4] DEGAND, C., FARHAT, C. *A Three-Dimensional Torsional Spring Analogy Method for Unstructured Dynamic Meshes*. Computers and Structures, Vol. 80, 2002, 305-316.
- [5] JOHNSON, A., TEZDUYAR, T.E. *Mesh Update Strategies In Parallel Finite Element Computations Of Flow Problems With Moving Boundaries And Interfaces*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 119, 1994, 73-94.
- [6] LEFRANÇOIS E. *A Simple Mesh Deformation Technique For Fluid-Structure Interaction Based On A Submesh Approach*. Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol.75, 2008, 1085-1101.
- [7] LEFRANÇOIS, E., YANG, B., KAIDI S., MOHAMAD, N. *Overcoming The Added Mass Effect In FSI Calculations Relating To Dynamic Squat*. Ocean Engineering. Vol. 267, 2023.
- [8] DHATT, G. , TOUZOT, G., LEFRANÇOIS, E. *Finite Element Method*, Lavoisier, Paris, 2005,601.
- [9] MOHAMAD,N. *Using of Dynamic Mesh in Solving Navier Stockes Equations of a Vessel by Finite Elements Method*, Journal of Tishreen University, 2017,