

## An Analytical Study of the Potential Flow around the Ship's Hull using the Finite Element Method

Dr. Nisreen Mohammad\*

(Received 17 / 5 / 2023. Accepted 26 / 6 / 2023)

### □ ABSTRACT □

Solving the flow equations around the ship's hull helps in analyzing many phenomena related to the hydrodynamic interaction between ships and the flow. Considering that these equations are differential and non-linear, it is often difficult to find their mathematical solution. In this paper, a method is presented to find a numerical solution for the equations of the potential flow around the ship's hull in highly restricted waterways. The open source gmsh program is used to generate the finite elements around the ship's hull, and then a weak mathematical expression is obtained for the equation of the potential flow by applying the weighted residual method using a function test of the Galerkin type. In addition, the method for generating elemental matrices is explained, after obtaining the nodal values of the velocity potential in the flow field, the proposed numerical solution is validated by verifying the orthogonality of streamlines with equal values of the velocity potential. Then the results of the velocity potential are used in calculating the velocity field in the flow; this enables evaluating the pressure field based on the energy conservation equation.

**Keywords:** potential flow, weighted residual method, finites elements, gmsh program.

**Copyright**



:Tishreen University journal-Syria, The authors retain the copyright under a CC BY-NC-SA 04

---

\* Associate Professor- Department of Marine Engineering- Faculty of Mechanical and Electrical Engineering- Tishreen University- Lattakia- Syria. NisreenMuhammad@scs-net.org

## دراسة تحليلية للجريان الكموني حول بدن السفينة باستخدام طريقة العناصر المنتهية

د. نسرين محمد\*

(تاريخ الإيداع 17 / 5 / 2023. قُبِلَ للنشر في 26 / 6 / 2023)

### □ ملخص □

يساعد حل معادلات الجريان حول بدن السفينة في تحليل العديد من الظواهر المرتبطة بالتداخل الهيدروديناميكي بين السفن وحقل الجريان، وباعتبار أن هذه المعادلات تتصف بأنها تفاضلية وغير خطية لذلك غالباً ما يكون هناك صعوبة في إيجاد الحل الرياضي لها. في هذا البحث يتم تقديم طريقة لبناء الحل الرقمي لمعادلات الجريان الكموني حول بدن السفينة في القنوات المحدودة على المستوى الأفقي، حيث يتم استخدام برنامج gmsH المفتوح المصدر لتوليد شبكة من العناصر المنتهية حول بدن سفينة، ومن ثم يتم الحصول على التعبير الرياضي الضعيف لمعادلة الجريان الكموني بتطبيق طريقة الرواسب الترجيحية مع اختيار تابع تجريبي من نوع جالبركين، وكذلك يتم شرح آلية توليد المصفوفات العنصرية، وبعد الحصول على القيم العقدية لكمون السرعة في مجال الجريان المدروس يتم معايرة الحل الرقمي المقترح بالتحقق من تعامد خطوط التيار مع القيم المتساوية لكمون السرعة، من ثم يتم استثمار نتائج كمون السرعة في حساب حقل السرعة في مجال الجريان وبالتالي تقييم حقل الضغط في المجال المدروس بالاستناد إلى معادلة انحفاظ الطاقة.

**الكلمات المفتاحية:** جريان كموني، طريقة الرواسب الترجيحية، عناصر منتهية، برنامج gmsH.

حقوق النشر : مجلة جامعة تشرين- سورية، يحتفظ المؤلفون بحقوق النشر بموجب الترخيص



CC BY-NC-SA 04

\* أستاذ مساعد- قسم الهندسة البحرية- كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية- جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.  
NisreenMuhammad@scs-net.org

**مقدمة:**

يساعد حل معادلات الجريان حول بدن السفينة في تحليل العديد من الظواهر المرتبطة بالتداخل الهيدروديناميكي بين السفن [1]، بالإضافة إلى دراسة تأثير الضفة [2]، وظاهرة الهبوط الرأسي للسفينة [3]، وكافة الحسابات المتعلقة بانتزان السفينة [4]، وذلك لارتباطها بحقل الضغط حول بدن السفينة وغير ذلك من الحسابات المتعلقة بالمقاومات أثناء الإبحار [5]. تتصف المعادلات الناظمة للجريان حول بدن السفينة (معادلات نافيه ستوكس) بكونها معادلات تفاضلية معقدة، وذلك بسبب وجود الحدود اللاخطية في بنية هذه المعادلات حيث يدخل مفهوم التسارع المادي الخاص بالجريان في هذه المعادلات، بالإضافة إلى تأثير اللزوجة التي يتم ربطها بحقل السرعة في الجريان، بعد دراسة العلاقة بين التشوهات الزاوية والخطية لجزء من المائع والسرعة النسبية بين طبقات المائع [6]. هذه التعقيدات في إيجاد الحل الرياضي للمعادلات الناظمة للجريان، دفعت الباحثين في مجال علم الهيدروديناميك إلى استخدام برامج تخصصية تتعلق بديناميك الموائع الحسابي [7]، حيث يتم استخدام الطرائق الرقمية المختلفة لحل جملة هذه المعادلات كطريقة العناصر المنتهية [8]، والفروق المنتهية [9]، والحجوم المنتهية [10] وطريقة عناصر الحدود وغيرها [11].

في الوقت الحالي يتم التركيز على استثمار هذه البرامج التخصصية في حل المعادلات التفاضلية للجريان دون الغوص في الآلية التي يتم اتباعها في الحل الرقمي، حيث يمكن أن تنشأ أخطاء لا يمكن إدراك ماهيتها دون وجود المعرفة الكافية للطريقة الرقمية التي تم على أساسها حل المعادلات التفاضلية.

يتم في هذه الدراسة تقديم طريقة لبناء الحل الرقمي لمعادلات الجريان الكموني حول بدن السفينة فيما يُعرف بالقنوات المحدودة على المستوى الأفقي، حيث يتم استخدام برنامج gmsH المفتوح المصدر لتوليد شبكة من العناصر المنتهية حول بدن سفينة، ثم يتم الحصول على التعبير الرياضي الضعيف لمعادلة الجريان الكموني بتطبيق طريقة الرواسب التوجيهية مع اختيار تابع تجريبي من نوع جاليركين، كما يتم شرح آلية توليد المصفوفات العنصرية، ومعايرة الحل الرقمي بعد الحصول على القيم العقدية لكمون السرعة في مجال الجريان المدروس بالتحقق من تعامد خطوط التيار مع القيم المتساوية لكمون السرعة. تستثمر نتائج كمون السرعة في حساب حقل السرعة في مجال الجريان، ثم يتم الاستناد إلى معادلة انحفاظ الطاقة لحساب حقل الضغط في المجال المدروس.

**أهمية البحث وأهدافه:**

تكمن أهمية البحث في تقديمه لحل رياضي لمسألة الجريان الكموني حول بدن سفينة باستخدام طريقة العناصر المنتهية بشروط حدية من نوع Dirichlet و Neumann، الأمر الذي يسهم في تقييم حقل السرعة في مجال الجريان عن طريق حساب تدرج كمون السرعة، ثم يتم تقييم حقل الضغط استناداً إلى معادلة انحفاظ طاقة الجريان، لذلك يمكن القول أنّ هذا البحث يفتح المجال للتحليل الرياضي للحركة الاهتزازية للسفينة ودراسة التداخلات الهيدروديناميكية بين الأجسام والجريان في المياه المحدودة على المستوى الأفقي.

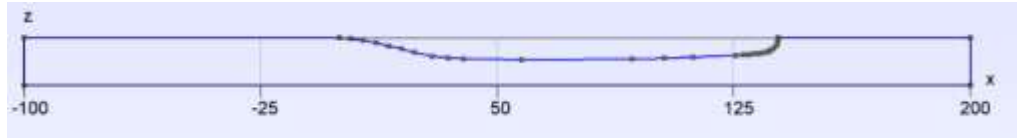
**طرائق البحث ومواده:**

يعتمد هذا البحث المنهج التحليلي الرياضي في دراسة الجريان الكموني باستخدام طريقة العناصر المنتهية التي تم توليدها باستخدام برنامج (208) gmsH، حيث يتم حل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية وهي معادلة لابلاس لكمون السرعة [13]، ومن ثم دراسة توزيع كمون السرعة في الإحداثيات المكانية لمجال الجريان حول بدن السفينة

لمعايرة الحل الرياضي من خلال الحصول على توزيع كموني متعامد مع خطوط التيار وبحساب تدرج كمون السرعة يمكن تقييم توزيع حقل السرعة في مجال الجريان ومن ثم حقل الضغط.

**الموديل الفيزيائي وفرضياته:**

بفرض أن مسقط السفينة على مستوي التناظر في جملة إحداثيات ديكارتية يعطى وفق الشكل (1).



الشكل 1: مقطع طولي في سفينة

بهدف تبسيط الدراسة، نعتد مبدأ انعكاس الجريان حيث يتم تثبيت السفينة في قناة محدودة على المستوى الأفقي بحيث تتعرض لتيار مائي بسرعة تعادل سرعة السفينة، ويتم اعتماد خصائص الجريان الكموني اللاتداوري من نوع أويلر، تعطى بارامترات السفينة والقناة في الجدول (1).

الجدول 1: بارامترات السفينة والقناة	
<i>extrem draft</i>	6.86 m
<i>length of canal (L<sub>canal</sub>)</i>	300 m
<i>length over all (LOA)</i>	139.1691 m
<i>height of canal (H<sub>canal</sub>)</i>	14.96
<i>froud number (F<sub>r</sub>)</i>	0.1651

**الموديل الرياضي لكمون السرعة:**

عند جريان مائع غير قابل للانضغاط نكتب معادلة الاستمرار [13] على الشكل التالي:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \quad \text{حيث إن } \vec{v} \text{ شعاع السرعة:}$$

ومن أجل جريان لا تداوري يكون دوران شعاع السرعة معدوم:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} \quad (2)$$

وبما أن دوران تدرج أي بارامتر سلمي معدوم دائماً، بفرض  $\Phi(x, y, z)$  بارامتر سلمي فهو يحقق العلاقة الآتية:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi) = \vec{0} \quad (3)$$

وبما أن الجريان لا تداوري:

$$\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \Phi) = \vec{0} \quad (4)$$

نسنتج من المعادلتين (2) و (4):

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} \wedge (\vec{v}\Phi) &= \vec{0} \\ \vec{v} \wedge \vec{v} &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}\Phi(x, y, z) \quad (5)$$

$$\vec{v} = \vec{v}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (6)$$

يسمى التابع السلمي  $\Phi(x, y, z)$  كمون السرعة ويكون شعاع السرعة مساوياً تدرج كمون السرعة، وتُعطى مركبات شعاع السرعة الثلاث بدلالة كمون السرعة كما يلي [13]:

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{cases} u(x, y, z) = \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x} \\ v(x, y, z) = \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial y} \\ w(x, y, z) = \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} \end{cases} \quad (7)$$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

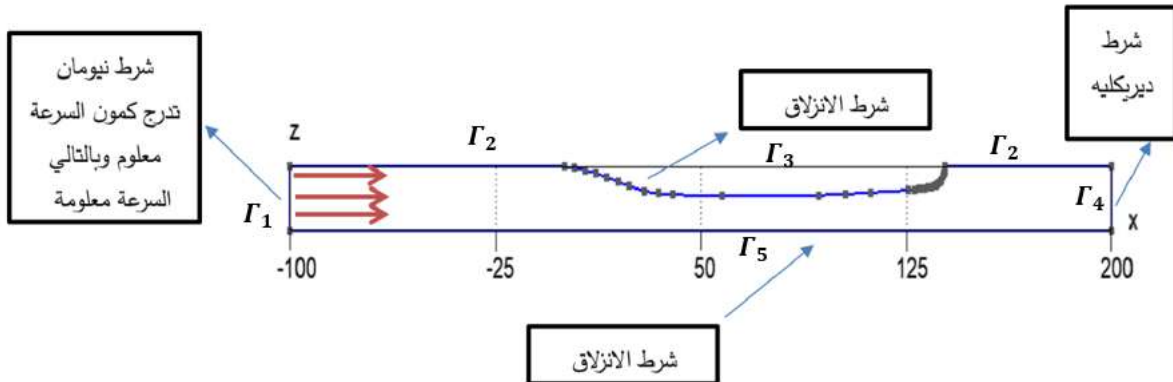
نستنتج أن كمون السرعة يُحقق معادلة لابلاس:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (9)$$

الشروط الحدية:

يوضح الشكل (2) الشروط الحدية التي تم فرضها على حدود المجال المدروس وهي كما يلي:  
 عند مدخل القناة  $\Gamma_1$ : شرط نيومان حيث إن سرعة السفينة تساوي سرعة التيار المائي وبالتالي فإن تدرج كمون السرعة وفق المحور الأفقي يمثل  $V_{ship}$ .

- عند السطح الحر  $\Gamma_2$ : شرط الانزلاق
- على سطح السفينة  $\Gamma_3$ : شرط الانزلاق باعتبار أن جريان أويلر هو الذي تم اعتماده في هذه الدراسة وبتنجم هذا الشرط رياضياً بتدرج معدوم لكمون السرعة.
- عند مخرج القناة  $\Gamma_4$ : شرط ديريكليه باعتبار أن قيمة كمون السرعة معدومة وذلك بهدف إغلاق جملة المعادلات التفاضلية
- عند قاع القناة  $\Gamma_5$ : شرط الانزلاق باعتبار أن الجريان هو من نوع أويلر.



الشكل 2: الشروط الحدية في حدود القناة وعلى بدن السفينة

### الموديل الرقمي:

تتلخص خطوات الموديل الرقمي وفق الآتي:

أولاً: الحصول على التعبير الرياضي الضعيف للمعادلة التفاضلية (8) وذلك باستخدام طريقة الرواسب الترجيحية واختيار تابع تجريبي من نوع جاليركين [12]، نعزف الراسب الترجيحي:

$$R(x, z) = \Delta \Phi^*(x, z) \quad (10)$$

$$\iint_{\Omega} \delta \Phi(x, z) \Delta \Phi^*(x, z) dx = 0 \quad (11)$$

حيث إن  $\delta \Phi(x, z)$  تابع تجريبي، بالتكامل بالتجزئة للعلاقة (11):

$$W = \oint_{\partial \Omega} \delta \Phi(x, z) \vec{V} \Phi^*(x, z) \cdot \vec{n} ds - \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \delta \Phi(x, z) \cdot \vec{V} \Phi^*(x, z) dx dz = 0 \quad (12)$$

والأخذ بالاعتبار للشروط الحدية:

$$W = \oint_{\Gamma_1} \delta \Phi(x, z) \vec{V}_{ship} \cdot \vec{n} ds + \oint_{\Gamma_2} \delta \Phi(x, z) \vec{V}_{fs} \cdot \vec{n} ds + \oint_{\Gamma_3} \delta \Phi(x, z) \vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} ds + \oint_{\Gamma_4} \delta \Phi(x, z) \vec{V}_{bottom} \cdot \vec{n} ds - \iint_{\Omega} \vec{\nabla} \delta \Phi(x, z) \cdot \vec{V} \Phi^*(x, z) dx dz = 0 \quad (13)$$

حيث إن:

$$\vec{\nabla} \Phi^*(x, z) \cdot \vec{n} = \vec{V} \cdot \vec{n} = u \cdot n_x + w \cdot n_z$$

▪  $\vec{V}_{ship}$ : سرعة السفينة وهي سرعة تيار الماء عند مدخل القناة ويكون  $\vec{V}_{ship} \cdot \vec{n} = (-1)$  وذلك

على اعتبار أن الناظم عند مدخل القناة موجه نحو الخارج بعكس اتجاه التدفق المائي.

▪  $\vec{V}_{fs}$ : سرعة الجريان عند السطح الحر (free surface) ويكون وفق شرط الانزلاق  $\vec{V}_{fs} \cdot \vec{n} = 0$ .

▪  $\vec{V}_{\infty}$ : سرعة الجريان عند بدن السفينة ويكون وفق شرط الانزلاق  $\vec{V}_{\infty} \cdot \vec{n} = 0$ .

▪  $\vec{V}_{bottom}$ : سرعة الجريان عند قاع القناة (canal bottom) ووفق شرط الانزلاق  $\vec{V}_{bottom} \cdot \vec{n} = 0$ .

▪ على مخرج القناة:  $\Phi(x, y) = 0$

ثانياً: يتم تجزئة المجال إلى عناصر منتهية باستخدام برنامج gmsh(208) كما هو مبين بالشكل (3).



شكل 3: شبكة العناصر المنتهية في مجال الجريان

يمكن كتابة المعادلة (13) وفق الآتي:

$$W = \sum_{\epsilon} W_{T3}^{\epsilon} + \sum_{\epsilon} W_{Nsu}^{\epsilon} + W_{Dir} = 0 \quad (14)$$

علماً أن:

$$W_{T3}^{\epsilon} = - \iint_{A_{\epsilon}} \vec{\nabla} \delta \Phi(x, z) \vec{\nabla} \Phi^*(x, z) dx dz$$

$$W_{Nsu}^{\epsilon} = \int_0^{L^{\epsilon}} \delta \Phi(x, z) (-V_{ship}) ds$$

لحساب  $\vec{\nabla} \Phi^*(x, z)$  يُعطى التقريب العقدي لكمون السرعة بالعلاقة التالية:

$$\Phi^*(x, z) = \langle N_1(x, z) \ N_2(x, z) \ N_3(x, z) \rangle \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

حيث إن:  $N_1(x, z), N_2(x, z), N_3(x, z)$  هي توابع الشكل التي يتم اختيارها من مثلث باسكال وتعطى للعناصر المنتهية المثلثية الشكل وفق المعادلة الآتية:

$$N_i(x, z) = a_i + b_i x + c_i z, i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

$$N_i(x_j, z_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

وبالتالي تكتب توابع الشكل وفق الآتي:

$$N_1(x, z) = \frac{1}{2A_{\epsilon}} [(z_3 - z_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(z_2 - z)]$$

$$N_2(x, z) = \frac{1}{2A_{\epsilon}} [(z_1 - z_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(z_3 - z)] \quad (16)$$

$$N_3(x, z) = \frac{1}{2A_{\epsilon}} [(z_2 - z_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(z_1 - z)]$$

حيث إن  $A_{\epsilon}$ : مساحة سطح العنصر مثلثي الشكل

$$A_{\epsilon} = \frac{(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (x_3 - x_1)(z_2 - z_1)}{2} \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} \Phi^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x, z)}{\partial x} & \frac{\partial N_2(x, z)}{\partial x} & \frac{\partial N_3(x, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1(x, z)}{\partial z} & \frac{\partial N_2(x, z)}{\partial z} & \frac{\partial N_3(x, z)}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\vec{V}\Phi^* = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} z_2-z_3 & z_3-z_1 & z_1-z_2 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

نعرف المصفوفة  $[B]$  كما يلي:

$$[B] = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} z_2-z_3 & z_3-z_1 & z_1-z_2 \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\vec{V}\Phi^*(x,z) = [B] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

ويعطى التقريب العقدي للتابع التجريبي بالعلاقة:

$$\delta\Phi(x,z) = \langle \delta\Phi_1 \delta\Phi_2 \delta\Phi_3 \rangle \begin{Bmatrix} N_1(x,z) \\ N_2(x,z) \\ N_3(x,z) \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$$\vec{V}\delta\Phi(x,z) = \langle \delta\Phi_1 \delta\Phi_2 \delta\Phi_3 \rangle [B]^T \quad (23)$$

وفقاً لما سبق فإن الحد  $W_{T3}^e$  من المعادلة (14) يكتب على الشكل الآتي:

$$W_{T3}^e = \langle \delta\Phi_1 \delta\Phi_2 \delta\Phi_3 \rangle [K_e] \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$[K_e] = A_e [B^T][B] \quad (25)$$

يكون الحد  $W_{N\epsilon u}^e$  المرتبط بالشروط الحدية من نوع نيومان معدوماً على السطح الحر وقاع القناة وبدن السفينة وذلك وفقاً لشروط الانزلاق، ولهذا الحد قيمة عند مدخل القناة فقط، تعطى بالعلاقة:

$$W_{N\epsilon u}^e = \oint_{\Gamma} \delta\Phi(s) \vec{V} \vec{n} ds \quad (24)$$

يعطى التقريب العقدي للتابع التجريبي  $\delta\Phi(s)$  بالعلاقة:

$$\delta\Phi(s) = \langle \delta\Phi_1 \delta\Phi_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

كما تعطى توابع الشكل وكذلك شعاع السرعة بالعلاقات:

$$N_1 = 1 - \frac{s}{L_e} \quad (26)$$

$$N_2 = \frac{s}{L_e}$$

$$\vec{V} = u \vec{i} + w \vec{k}$$

بالتعويض نحصل على:



$$\oint_{\Gamma_1} \delta \Phi(s) \overrightarrow{V_{s \square ip}} \cdot \vec{n} ds = - \oint_{\Gamma_1} \langle \delta \Phi_1 \quad \delta \Phi_2 \rangle \left\{ \begin{array}{c} 1 - \frac{s}{L_e} \\ s \\ \frac{s}{L_e} \end{array} \right\} V_{s \square ip} ds$$

$$\oint_{\Gamma_1} \delta \Phi(s) \overrightarrow{V_{s \square ip}} \cdot \vec{n} ds = - \langle \delta \Phi_1 \quad \delta \Phi_2 \rangle V_{s \square ip} \frac{L_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (27)$$

$$\{F_e\}_{\Gamma_1} = V_{s \square ip} \frac{L_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$W_e = \langle \delta \Phi_e \rangle ([K_e] \{ \Phi_e \} - \{ F_e \})$$

$$W = \sum_{I=1}^{NELT} W_e = \sum_{I=1}^{NELT} \langle \delta \Phi_e \rangle ([K_e] \{ \Phi_e \} - \{ F_e \}) = 0 \quad (28)$$

حيث إن  $NELT$  يمثل عدد العناصر الكلي في المجال المدروس.

يمكن كتابة المعادلة (28) بعد تجميع المصفوفات العنصرية الخاصة بكل عنصر منته على الشكل الآتي:

$$W = \langle \delta \Phi \rangle ([K] \{ \Phi \} - \{ F \}) = 0 \quad (29)$$

المعادلة (29) محققة مهما تكن قيمة التابع التجريبي  $\langle \delta \Phi \rangle$  إذاً:

$$[K] \{ \Phi \} = \{ F \} \quad (30)$$

في هذه المرحلة من الحل وبعد تجميع المصفوفات العنصرية الخاصة بكل عنصر بمصفوفات كلية يتم الأخذ بالاعتبار لشرط Dirichlet، حيث يتم تحديد العناصر المنتهية أحادية البعد على طول المجال الموافق لمدخل القناة، ومن ثم يتم فرض القيمة صفر في المصفوفة  $\{ F \}$  بعد ضبط القيم في المصفوفة  $[K]$  لتحقيق ذلك.

بعد الأخذ بالاعتبار لشرط Dirichlet يمكن إيجاد قيم كمون السرعة في كل عقد المجال بضرب طرفي المعادلة (30) بمقلوب المصفوفة  $[K]$

$$\{ \Phi \} = [K]^{-1} \{ F \} \quad (31)$$

معايرة النتائج:

للتحقق من صحة الحل الرياضي لمعادلة الجريان الكموني بطريقة العناصر المنتهية والتي تم شرحها سابقاً يتم تحديد معادلة المنحني الموافق للقيم المتساوية لكمون السرعة من أجل جريان في مستوي ثنائي البعد  $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ .

$$\Phi(x, z) = cte \quad (32)$$

وبالتالي يتم البحث عن المنحني الذي يكون فيه الفرق بين قيمتين لتابع الكمون معدوم

$$d\Phi(x, z) = \Phi_2(x, z) - \Phi_1(x, z) = 0$$

أي أن:

$$d\Phi(x, z) = \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} dz = 0 \quad (33)$$

بتعويض المعادلة (7) في المعادلة (33):

$$u(x, z) dx + w(x, z) dz = 0 \quad (33)$$

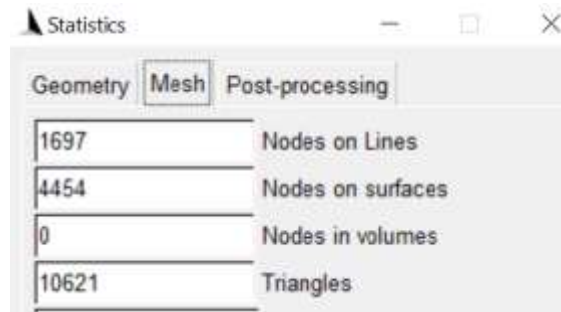
$$dz = -\frac{u(x,z)}{w(x,z)} dx \quad (34)$$

وبما أن معادلة خطوط التيار المتساوية القيمة تعطى بالعلاقة التالية:

$$dz = \frac{w(x,z)}{u(x,z)} dx \quad (35)$$

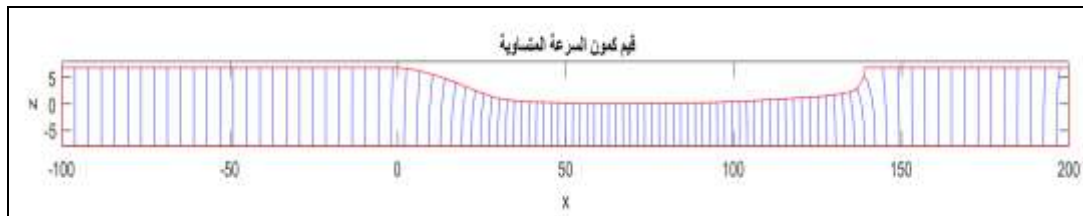
نستنتج من المعادلتين (34) و(35) أن القيم المتساوية لكمون السرعة تعامد القيم المتساوية لخطوط التيار، وبالتالي حتى يكون الحل الرقمي صحيحاً يجب أن يكون المنحني المعطى بالعلاقة (33) عمودياً على قاع القناة ليصبح بذلك متعامداً مع خطوط التيار.

يبين الشكل (4) بارامترات الخرج لبرنامج توليد شبكة العناصر المنتهية، كما يبين الشكل (5) التوزيع المتعامد لخطوط السرعة مع اتجاه الجريان (وفق المحور x) وبالتالي يمكن القول إن الموديل الرياضي المقترح للجريان الكموني يعطي نتائج صحيحة.



Statistics	
Geometry Mesh Post-processing	
1697	Nodes on Lines
4454	Nodes on surfaces
0	Nodes in volumes
10621	Triangles

الشكل 4: بارامترات ملف الخرج لبرنامج gmsh



الشكل 5: توزيع القيم المتساوية لكمون السرعة في المجال المدروس

نتائج الدراسة:

يُعدُّ تقييم حقل السرعة في مجال الجريان من أهم نتائج الحل الرقمي لمعادلات الجريان حول بدن السفينة حيث إن تقييم توزيع حقل السرعة يُمكن من استنتاج حقول الضغط حول بدن السفينة وبمكاملة هذه الأخيرة يمكن تقييم قوى الضغط المؤثرة على البدن وما لذلك من أهمية كبيرة في تحليل السلوك الهيدروديناميكي للسفن.

توزيع حقل السرعة:

يتم حساب مركبات حقل السرعة في المجال المدروس وذلك بحساب مشتقات كمون السرعة، حيث تمّ تقييم تدرج كمون السرعة وفقاً للطريقة المقترحة التالية:

بفرض أن قيم كمون السرعة  $(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  لكل عقدة من عقد العنصر المنتهي معلومة وبالتالي يمكن تقييم تدرج كمون السرعة  $(\vec{\nabla}\Phi^*(x,z))$  عند كل عنصر منتهٍ وفق العلاقة (21).

وبما أن قيم السرعة المحسوبة استناداً إلى العلاقة (21) تكون على مستوى العناصر فقط لذلك يتم حساب المتوسط الحسابي لتقييم كل مركبة من مركبات شعاع السرعة عند كل عقدة من عقد المجال المدروس عن طريق تحديد العناصر التي تتشارك العقدة ذاتها وفق العلاقة التالية:

$$V_{NOD} = \frac{\sum_{i=1}^{neli} V_{ei}(i) \times A_{ei}(i)}{\sum_{i=1}^{neli} A_{ei}(i)}$$

حيث إن:

$A_{ei}$ : مساحة العنصر  $i$ .

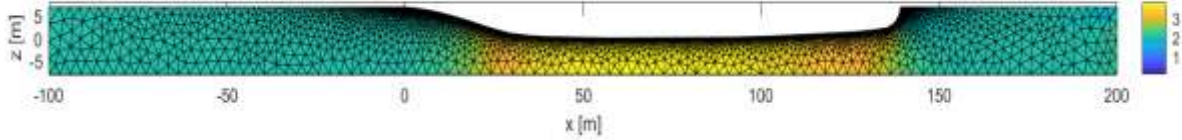
$V_{NOD}$ : مركبة السرعة عند العقدة  $i$ .

$neli$ : عدد العناصر التي تتشارك العقدة  $i$ .

$V_{ei}(i)$ : المركبة الموافقة للسرعة عند العنصر.

ومن ثم يتم حساب السرعة المطلقة بدلالة المركبات.

يبين الشكل (6) توزيع حقل السرعة في مجال الجريان.



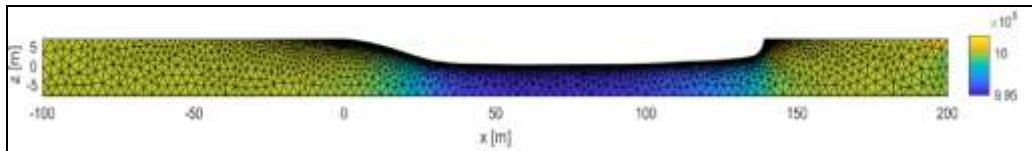
الشكل 6: توزيع حقل السرعة في مجال الجريان

يُلاحظ من خلال التدرج اللوني لحقل السرعة زيادة في السرعة تحت بدن السفينة عن قيمة السرعة التي توافق الشرط الحدّي عند مدخل القناة وهي السرعة  $2 \text{ m/s}$  الموافقة لرقم فرود  $0.1651$  وهذا يتوافق مع معادلة انحفاظ التدفق حيث إن تضيق المقطع تحت بدن السفينة يفرض هذه الزيادة في السرعة. توزيع حقل الضغط الستاتيكي:

يتم حساب توزيع حقل الضغط الستاتيكي حول بدن السفينة وذلك استناداً إلى معادلة برنولي على طول خط التيار:

$$P_i = P_{atm} + \rho g(H - z_i) + \frac{\rho}{2}(V_{ship}^2 - V_i^2)$$

يبين الشكل (7) توزيع حقل الضغط في مجال الجريان، ويُلاحظ انخفاض قيمة الضغط الستاتيكي (اللون الأزرق) تحت بدن السفينة وذلك استناداً إلى معادلة برنولي التي تشرح العلاقة العكسية بين الضغط والسرعة، في حين يكون الضغط على السطح الحر للجريان يساوي الضغط الجوي  $P_{atm} = 10^5 \text{ Pa}$ .



الشكل 7: توزيع حقل الضغط الستاتيكي في مجال الجريان

**الاستنتاجات والتوصيات:**

تم في هذه الدراسة تقديم طريقة لبناء الحل الرقمي لمعادلات الجريان الكموني حول بدن السفينة فيما يعرف بالقنوات المحدودة على المستوى الأفقي، حيث تم توليد شبكة من العناصر المنتهية حول بدن سفينة باستخدام برنامج gmsH المفتوح المصدر، ومن ثم تم استنتاج الشكل الرياضي الضعيف لمعادلة الجريان الكموني بتطبيق طريقة الرواسب الترجيحية مع اختيار تابع تجريبي من نوع جاليركين، وبعد توصيف المصفوفات العنصرية وبناء الموديل الرقمي المتكامل لحل المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية والناظمة للجريان بطريقة العناصر المنتهية، تم التوصل إلى ما يلي:

- 1- تحديد القيم العقدية لكمون السرعة في مجال الجريان المدروس.
  - 2- تم معايرة الحل الرقمي المقترح للتحقق من تعامد خطوط التيار مع القيم المتساوية لكمون السرعة.
  - 3- تم استثمار نتائج كمون السرعة في حساب حقل السرعة في مجال الجريان.
  - 4- تم تقييم حقل الضغط في المجال المدروس بالاستناد إلى معادلة انحفاظ الطاقة.
- من خلال هذه الدراسة يمكن التوجيه للأخذ بالاعتبار للجريان في المياه المفتوحة، واستثمار حقل الضغط المتولد في دراسة الحركات الاهتزازية للجريان وذلك بجعل الموديل الرقمي المقترح يشكل جزءاً من حلقة تدرس التداخل الهيدروديناميكي بين بدن السفينة والجريان.

**References:**

- [1] DUAN, W.Y., LIU, J.Y., CHEN, J.K., WANG, L.J. *Comparison research of ship-to-ship hydrodynamic interaction in restricted water between TEBEM and other computational method*, Ocean Engineering, Vol. 202, 2020.
- [2] Baric, M., Mohovic, R., Mohovic, D., Pavic, V. *The Simulation of Sloped Bank Effect Influence on Container Ship Trajectory*. J. Mar. Sci. Eng, Vol. 9, 2021.
- [3] JACHOWSKI, J. *Assessment of ship squat in shallow water using CFD*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, Vol. 8, 2008.
- [4] HANZU-PAZARA, R., DUSE, A., VARSAMI, C., ANDREI, C. *The influence of ship's stability on safety of navigation*, IOP Conference Series Materials Science and Engineering 145(8), 2016.
- [5] SONG, S., TERZIEV, M., TEZDOGAN, T., DEMIREL, Y.K., MUSCAT-FENECH C. D. M., INCECIK, A. *Investigating roughness effects on ship resistance in shallow waters*, Ocean Engineering, Vol. 270, 2023.
- [6] MARION, M., TEMAM, R., Navier-stokes equations: Theory and Approximation, Handbook of Numerical Analysis, Elsevier, Vol. 6, 503-689, 1998.
- [7] BHATTI, M. M., MARIN, M., ZEESHAN, A., ABDELSALAM, S.I., *Editorial: Recent Trends in Computational Fluid Dynamics*, Frontiers in Physics, Vol. (8), 2020.
- [8] DHATT, G., TOUZOT, G., LEFRANÇOIS, E. *Finite Element Method*, Lavoisier, Paris, 2005.
- [9] Thomée, V. *From Finite Differences to Finite Elements: A short history of numerical analysis of partial differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 128, 1-54, 2001.
- [10] EYMARD, R., GALLOUET, T., HERBIN, R. *Finite Volume Methods Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier, Vol. (7), 713-1018, 2000.

- [11] CHENG, A. H. D., CHENG, D.T. *Heritage and early history of the boundary element method*, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 29, 268-302, 2005.
- [12] SOLSVIK, J., TANGEN, S., JAKOBSEN, H. A. *Evaluation of weighted residual methods for the solution of the pellet equations: The orthogonal collocation, Galerkin, tau and least-squares methods*, Computers & Chemical Engineering, Vol.( 58), 223-259,2013.
- [13] MOHAMAD, N. Fluid Mechanics, Directorate of Books and Publications, Tishreen university,2021.