

## الصياغة العامة لعلاقات التعريف بمجاهيل الخط المرن للجيزان

الدكتور أكرم صقور\*

تاريخ الإيداع 3 / 3 / 2013. قُبل للنشر في 5 / 6 / 2013

### ▽ ملخص ▽

استكشف العلماء والباحثون خلال عقود مضت طرقاً وصيغاً متعددة تحليلية وتخطيطية للتعريف بمجاهيل الخط المرن للجيزان، ومن أبرزها المعادلة التفاضلية وطريقتنا مور وبرس. لقد تبين لنا أنّ أغلب هذه الطرق قد تطابقت في صيغها النهائية، بينما اختلفت، فقط، في المنهجية التحليلية لاشتقاق هذه الصيغ المطلوبة باعتماد مقدماتها على مفاهيم فيزيائية وتعابير رياضية متباينة. يتضمن جوهر هذا العمل العلمي الاستعراض المقتضب لأغلب طرق وصيغ التعريف بمجاهيل الخط المرن، وبلورة صياغة هذه الطرق التحليلية والتخطيطية في صيغ جامعة ومبسطة وفقاً لمنهجية الباحث التحليلية المعتمدة. الأمر الذي يغني العمل الأكاديمي من جهة، ويساعد المحلل الإنشائي في اختيار وسيلة التحليل الأنسب للتعريف بمجاهيل الخط المرن للجملة المدروسة من جهة ثانية.

الكلمات المفتاحية: الخط المرن - الجانز البديل لمور - مساحة - مخطط العزم

\* أستاذ مساعد - قسم الهندسة الإنشائية - كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## General Formulation of the Definition Relations with the Elastic Curve's Unknowns for Beams

Dr. Akram Sakkour\*

(Received 3 / 3 / 2013. Accepted 5 / 6 / 2013)

### ▽ ABSTRACT ▽

Through the last centuries Scientists and Researchers have created analytic and geographic multi-methods and formulas for the definition of elastic curve's unknowns of beams. We have seen that most of these methods had matched in their end formulas, while they only differed by the analytic basis for the differentiating of these formulas, that their introductions depended on different physic expressions and mathematic relations. This scientific work contains a concise preview for the definition relations and methods of elastic Curve's unknowns of beams available, so that the expression about these in an easy and collective expression with agreement of the depended analytic method by the Researcher. That can avail of the academic job on the first hand, and it helps the structural analyzer choose the proper and easier device for his structural analysis for the definition of elastic Curve's unknowns of studied structural system.

**Key words:** elastic Line (curve) – Mohr's alterative Beam-Area- moment Plane

---

\*Associate Professor, Structural Engineering Department, Civil Engineering Faculty, Tishreen University, Lattakia, Syria.

## مقدمة:

يتجلى عمل الأكاديمي في مجال ما، بشكل عام، بالسعي من جهة إلى صقل أساليب التفكير والابتكار العلمي لأسلافه في إنصاجهم وإرسائهم للطرق والنظريات والمفاهيم التي أغنوا من خلالها مقومات استمرار الابتكار العلمي وتطويره، ومن جهة ثانية استثمار مايمكن استثماره من هذه النظريات والمفاهيم العلمية المستمدة في إنصاج إنتاجه العلمي لابتداع الممكن، وإغناء هذه المفاهيم والنظريات، أو تسخير مضامينها لفلسفته ومداركه العلمية، فيتأثر بها ويؤثر عليها لإخراجها، إن أمكن ذلك، بحلة جديدة من المفاهيم أو الصيغ الرياضية والهندسية، فيكسبها أهمية ديناميكية أكثر من ناحية، ومن جهة أخرى تساهم في صقل مكنوناته العلمية للانطلاق بها إلى آفاق أرحب، فيتحرر بما أمكن على الأقل من ركوده الأكاديمي في التبعية المطلقة للنمطية العلمية المستوحاة من أسلافه، ويبلور حافزه لطرق أبواب علمية ربما لاتزال موصدة كونياً، أو مفاتيحها غير متوافرة في محيطه.

إن خير دليل على ذلك ماسمي في المجال الهندسي بنظرية بيتي للعمل المتبادل للقوى المؤثرة على جملة إنشائية، والتي أدرك من خلالها مكسويل: أنه إذا كانت هذه القوى متساوية، فإن الانتقال المتبادل بينها متساوٍ أيضاً، فُسبت النظرية عندها إلى بيتي - مكسويل [7].

لقد تمحور جوهر عملنا العلمي هذا حول الطرق والصيغ الرياضية المعدة لإيجاد الخط المرن للجيزان، وحساب مجاهيله من انتقالات لنقاطه، ودورانات لمماساته في هذه النقاط المختلفة لتقييم الصلابات الهندسية لهذه الجيزان من جهة، ولاستثمار نتائجها في التحليل الإنشائي للجمل الإنشائية من جهة أخرى بشكل عام.

إذا كانت المعادلة التفاضلية للخط المرن قد شكلت المصدر الأساس الذي لاينضب لإيجاد مجاهيل هذا الخط وفقاً لطبيعة التحميل المؤثرة وشروط استتاده، إلا أن اهتمام الباحثين لم يتوقف عن السعي لإغناء هذا المصدر بصيغ وطرق تحليلية، أو تخطيطية تبسط البحث عن قيم هذه المجاهيل للخط المرن، خاصة عند تعدد المجالات المتشكلة. لقد تبين لنا من خلال عملنا الأكاديمي، أن هذه المساعي قد استمدت مرجعيتها لبلوغ أهدافها، أيضاً، وقبل كل شيء من المعادلة التفاضلية، إضافة لمبدأ العمل الوهمي أو الافتراضي وعلاقة الطاقة لمور Mohr.

هكذا استطاع أوتو مور ( Otto Mohr 1868 ) من جامعة دريسدن في ألمانيا أن يحقق أول نجاح في هذا الإطار لإغناء المعادلة التفاضلية في تبسيط إيجاد مجاهيل الخط المرن، وذلك من خلال ماتوصل إليه من إمكانية لاستبدال الجائز الأصلي بحمولاته الحقيقية بجائز مرافق أو بديل محمل بحمولات وهمية تمثل تخفيض مخطط العزم  $M$  للجائز الأصلي بالمقدار  $EI$ ، بحيث تتقابل فيه شروط استتاده واستمراره مع شروط الانتقال والدوران للجائز الأصلي [5].

لاحقاً تمكن مور نفسه من صياغة طريقة تخطيطية، أيضاً، للحصول على مجاهيل الخط المرن من خلال مقارنته منحنى الانعطاف للجائز بالمنحني الحبلي المحمل بالحمولات العزمية المخفضة أيضاً، والمرتبطة ارتباطاً وثيقاً بمفهوم الجائز البديل، بحيث يمكن حساب هذه المجاهيل تخطيطياً من خلال إنشاء المضلع الحبلي المعروف بالمجسد لمقادير الانتقالات والدورانات [2]، حيث تعد هذه الطريقة أقرب ماتكون لطريقة الفروقات المحددة.

سنوات عدة بعد ذلك استطاع تشارلز إي. غرين ( Charles E. Greene 1873 ) من جامعة متشغن في أمريكا اتباع نهج آخر للاستفادة من المضمون الرياضي للمعادلة التفاضلية ومخطط العزم المخفض المعتمد في طريقة الجائز البديل، أي المخطط  $M/EI$ ، وذلك بإجراء التكاملات المحدودة على صيغة المعادلة التفاضلية للحصول بشكل تخطيطي - تحليلي على مجاهيل الخط المرن في النقاط المميزة منه اعتماداً على مساحة المخطط  $M/EI$ ، وعزم هذا

المخطط حول النقطة المطلوب حساب الانتقال أو الدوران فيها على الترتيب، كما الحال عليه في طريقة مور. لقد أسندت هذه الطريقة في أمريكا إلى أعمال غرين العلمية نظراً لمنهجيته التحليلية المتبعة المتباينة إلى حد ما عن نهج مور [6].

لاحقاً، ورغم أن مساعي نافيه-برس في فرنسا للبحث عن حل لهذه المسألة قد قادت، أيضاً، إلى صيغة متطابقة مع الصيغ المذكورة أعلاه، إلا أنها عرّفت بمعادلات نافيه-برس [1].

يهدف عملنا العلمي هذا إلى إغناء المنهجيات العلمية التحليلية القائمة، واستدراك التعقيدات الممكنة أحياناً لمستلزمات الحل التخطيطي بالجائز البديل وسواه من الطرق الأخرى، إلا أنه ظلّ دائراً صيغةً ومضموناً في فلك طرق عزم المساحة، أيضاً، حيث سنستعرض في مقدمة هذا العمل المنجز أغلب طرق التحليل المذكورة أعلاه.

### 1. طريقة الجائز البديل لمور

يعرف الجائز البديل بالجائز الوهمي المرافق للجائز الحقيقي المدروس، الذي تتقابل فيه شروط العزم والقص مع شروط الانتقال والدوران على الترتيب في الجائز الحقيقي، والمحمل بالحمولات العزمية الممثلة لتخفيض مخطط العزم للجائز الحقيقي بمقدار صلابات الانعطاف  $EI$  للمجالات المختلفة لهذا الجائز.

وضع شروط التوافق بين الجائز البديل والجائز الأصلي العالم الألماني مور انطلاقاً من المطابقة بين المشتق الثاني للمعادلة التفاضلية للخط المرن للجائز الحقيقي والمشتق الثاني للعزم في الجائز الوهمي أو البديل والتي تعطى بالصيغ [7]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad ; \quad \frac{d^2 \bar{M}}{dx^2} = -\bar{q} = -\frac{M}{EI}$$

حيث إنّ:  $\bar{q} = \frac{M}{EI}$  الحمولة الوهمية على الجائز البديل الموجهة باتجاه محور الانتقال، أو المعاكسة له بحسب إشارة العزم في المجال المعني.

بما أنّ الطرف الثاني من المعادلتين متساوٍ، فإنّ الطرف الأول وتكاملاته متساوٍ أيضاً. هكذا أثبت مور أنّ:

$$w = \bar{M} \quad ; \quad \varphi = w' = \bar{Q}$$

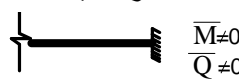


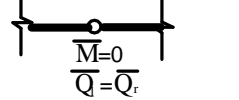
إذ أنّ:  $w$  و  $w'$  هما الانتقال والدوران في الجائز الحقيقي على الترتيب.

$\bar{Q}$  ,  $\bar{M}$  هما العزم والقص في الجائز البديل.

لذلك أمكن لأجل كل جائز حقيقي إيجاد جائز بديل تتوافق بينهما الشروط المذكورة أعلاه.

بالتالي تتقابل أشكال الاستناد والشروط الطرفية المختلفة في الجائز الحقيقي مع الشروط الموافقة لها للحصول

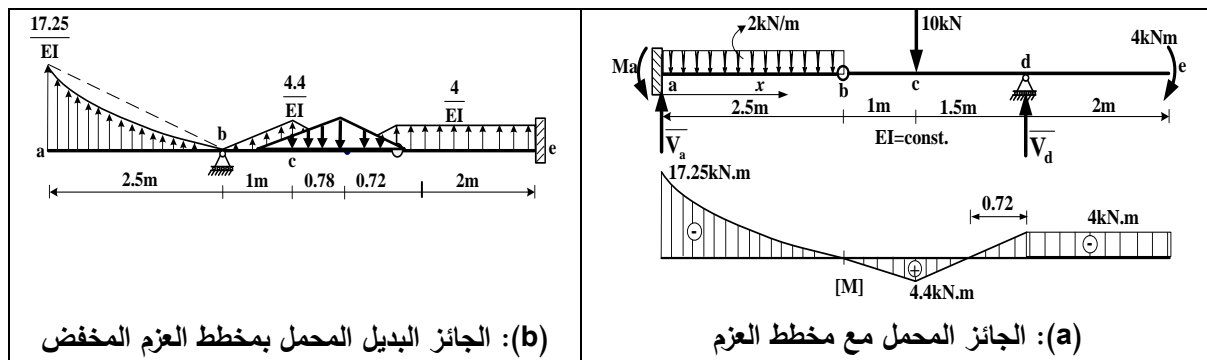
على الجائز البديل، والمبيّنة في الشكل (1):

الجائز البديل	الجائز الأصلي
	طرف حر $w \neq 0$ $\phi \neq 0$
	مسند طرفي مفصلي $w = 0$ $\phi \neq 0$
	وثاقة ثابتة $w = 0$ $\phi = 0$
	مسند داخلي $w = 0$ $\phi_l = \phi_r$

شكل (1) أشكال الاستناد المتقابلة للجائز الحقيقي والجائز البديل [7]

من خلال هذا التقابل بين شروط الجائز الحقيقي والجائز البديل يمكن الحصول على شكل الجائز البديل لأي جائز معطى [7].

يبين الشكل (2a) أنموذجاً من نماذج الجيزان، المحمل بالحمولات المبينة المولدة لمخطط العزم المرفق، بينما يظهر الشكل (2b) الجائز البديل المرافق مع حمولاته الممثلة لتخفيض مخطط العزم في الجائز الحقيقي المدروس بالمقدار  $EI$ .



شكل (2) الجائز الأصلي والبديل [7]

تطبق، بالتالي، شروط التوازن الستاتيكية على الجائز البديل الجديد، التي تتطلب إيجاد مساحات مخطط الحمولة العزمية عليه وعزم هذه المساحات، لحساب العزم والقص في أي مكان من الجائز إما تحليلياً، أو تخطيطياً، واللذان سيمثلان قيم الانتقال والدوران في الجائز الحقيقي. لذلك سميت هذه الطريقة بطريقة عزم المساحة لمور أيضاً [moment area method].

هكذا قدمت هذه الطريقة تسهياً كبيراً لكثير من الحالات في الحصول على القيم المميزة للخط المرن للجائز قياساً لاستخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن بحد ذاتها [7]، خاصة عند تعدد الحمولات وتغير الصلابات على الجائز، والتي تتطلب إيجاد معادلات العزم للمجالات المختلفة أيضاً، ثم إجراء التكاملات المطلوبة ضمن هذه المجالات وتطبيق الشروط الطرفية والاستمرارية للحصول على المعادلات الكافية لإيجاد ثوابت المعادلات، ومن ثم الحصول على القيم المميزة للخط المرن للجائز أو معادلات هذا الخط المرن لمجالات الجائز.

إلا أنه يقابل سلبيات هذا التعقيد والإطالة أحياناً باستخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن، أيضاً، بعض السلبيات لدى المحلل الإنشائي عند الرغبة باستخدام الجائز البديل. نذكر منها:

1- القدرة على الاحتفاظ دوماً بالشروط المتقابلة بين الجائز الحقيقي والبديل لأجل تحديد الجائز البديل الصحيح.

2- ضرورة رسم هذا الجائز وتحميله بالحمولات العزمية منسوبة إلى صلابات المجالات.

3- أهمية مراعاة اتجاه تأثير حملاته العزمية السالبة والموجبة على الجائز.

4- غالباً إعادة دراسة توازن الجائز الجديد لإيجاد ردود الأفعال لمسانده.

5- تقسيم المخطط إلى أشكال هندسية يمكن معرفة مساحتها ومراكز ثقلها بشكل واضح، إذ يبدو ذلك أكثر تعقيداً لأجل مخططات عزوم لتتابع صحيحة من مراتب عالية [4].

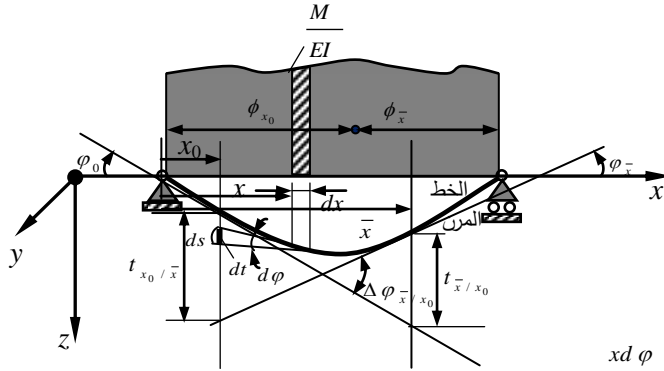
6- إضافة لهذا وذلك حتمية المعرفة المسبقة لقيم مخطط العزم للجيزان غير المقررة بتأثير الحمولات أو الانتقالات والدورانات المسانده.

إن ذلك يستلزم من المحلل الإنشائي المزيد من الوقت والجهد والتصاقه دوماً بالمراجع المختصة المتشعبة المتضمنة لهذه المعطيات، التي تمكّنه عندئذٍ من الوصول إلى الغاية المطلوبة.

## 2. طريقة غرين Greene (مور - غرين)

قابل غرين في هذه الطريقة مخطط العزم المخفض المعتمد في طريقة مور  $M/EI$  للجائز مع الخط المرن له، كما في الشكل (3)، وذلك بغية الحصول على علاقات ترابط الانتقال والدوران بين نقطتين من الجائز محددين بالإحداثيين  $x_0, \bar{x}$ ، والتي تساعد على الحساب التخطيطي للانتقال، أو الدوران في نقاط مميزة منه، كما في طريقة الجائز البديل.

لقد اعتمد غرين في منهجيته التحليلية على مفهوم المعادلة التفاضلية للخط المرن، أيضاً. حيث إن:



$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \right) = -\frac{M}{EI} \Rightarrow$$

$$d\phi = -\frac{M}{EI} dx \quad (1)$$

بضرب طرفي هذه العلاقة بـ  $x$  تتحول إلى:

$$xd\phi = -x \frac{M}{EI} dx = ds$$

بما أنّ  $\phi$  مقيسة بالراديان وصغيرة، فإنّ  $dt \approx ds$ . لذلك يكون:

$$xd\phi = -x \frac{M}{EI} dx = dt \quad (2)$$

بإجراء الكامل على العلاقتين (1) و (2) بين  $x_0$  و  $\bar{x}$  ينتج أنّ:

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} d\phi = \Delta \phi_{\bar{x}/x_0} = -\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx \quad (3)$$

$$\int_{x_0}^{\bar{x}} dt = t_{\bar{x}/x_0} = \int_{x_0}^{\bar{x}} x d\varphi = - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} x dx = \int_{\bar{x}}^{x_0} \frac{M}{EI} x dx \quad (4)$$

تمثل صيغة التكامل في الطرف اليميني من العلاقة (3) مساحة مخطط العزم المخفض  $M/EI$ ، بينما تعبر صيغة التكامل في الطرف اليميني من العلاقة (4) عزم مساحة مخطط العزم المخفض  $M/EI$ . بالتالي:

$$\varphi_{\bar{x}} - \varphi_{x_0} = - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx \quad (5)$$

$$t_{\bar{x}/x_0} = \phi_{\bar{x}} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx \quad ; \quad t_{x_0/\bar{x}} = \phi_{x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx \quad (6)$$

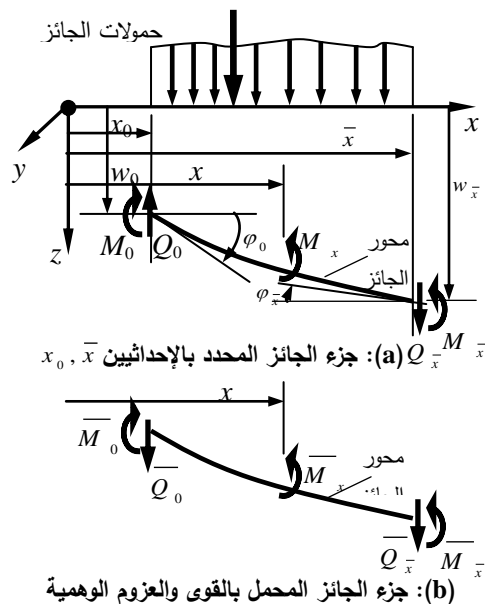
لذلك، يستنتج أن هذه الصيغ متوافقة مع علاقات مور المعبرة عن مفهوم الجائز البديل، حيث تعني العلاقة (5)، أن فرق الدوران للمماسين في نقطتين من الخط المرن يساوي مساحة مخطط العزم المخفض بين النقطتين، حيث يؤخذ في الحسبان الاتجاه الموجب والسالب لكل من الدوران والانتقال. كما تعني العبارتان للعلاقة (6) أن الفرق بين نقطة تقاطع الشاقول مع الخط المرن المار في النقطة بالإحداثي  $x_0$  وتقاطعه مع المماس للخط المرن في النقطة المحددة بالإحداثي  $\bar{x}$  يساوي العزم الستاتيكي لمساحة مخطط العزم المخفض المحدد بهاتين النقطتين بالنسبة لهذا الشاقول، والعكس صحيح، أيضاً، بالنسبة للشاقول المار بالنقطة المحددة بالإحداثي  $x_0$ . تساعد الصيغتان السابقتان على إيجاد الانتقال والدوران لنقاط الجائز المختلفة تخطيطياً، عندما تكون إحدى زوايا الدوران لنقاط الخط المرن معلومة على الأقل، كما الحال عليه في الجائز البديل.

### 3.1 طريقة نافيه-برس Navier -Press

اقتطع في هذه الطريقة جزءاً من جائزٍ محدد بالإحداثيين  $x_0, \bar{x}$ ، كما هو مبين في الشكل (4a)، حيث يلاقي طرفاه عند هذين الإحداثيين الانتقالين  $w_0, w_{\bar{x}}$  والدورانين للمماسين للخط المرن  $\varphi_0, \varphi_{\bar{x}}$  على الترتيب، وذلك نتيجة تأثير التحميل الخارجي على هذا الجائز، والذي سيتولد عنه العزم  $M_x$  المؤثر على المقطع بالإحداثي  $x$ .

افتراض في المنهجية التحليلية لهذه الطريقة أن هذه المجاهيل لقيم تعريف الخط المرن على هذا الجزء من الجائز قد نتجت عن تطبيق القوى والعزوم الوهمية المبينة في الشكل (4b) على طرفيه، وهي:  $\bar{M}_0, \bar{Q}_0, \bar{M}_{\bar{x}}, \bar{Q}_{\bar{x}}$ . لذلك سوف يعطي تطبيق معادلات التوازن على القوى

الوهمية هذه أن:



شكل (4)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0 &= -\bar{Q}_{\bar{x}} \\ \bar{M}_0 - \bar{Q}_0(\bar{x} - x_0) + \bar{M}_{\bar{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

ويكون العزم على المقطع بالإحداثي  $x$  نتيجة تأثير هذه القوى الوهمية هو:

$$\bar{M}_{(x)} = \bar{M}_0 - \bar{Q}_0(x - x_0) \quad (8)$$

ينتج عن تطبيق مبدأ العمل الوهمي أو الافتراضي على القوى الوهمية وانتقالاتها أن:

$$\sum F_i \delta_i = \bar{Q}_0 w_0 + \bar{M}_0 \varphi_0 + \bar{Q}_{\bar{x}} w_{\bar{x}} + \bar{M}_{\bar{x}} \varphi_{\bar{x}}$$

هكذا يقود الأخذ في الحسبان للعلاقات (7) إلى أن:

$$\sum F_i \delta_i = \bar{Q}_0 (w_0 - w_{\bar{x}}) + \bar{M}_0 \varphi_0 + \bar{M}_{\bar{x}} \varphi_{\bar{x}} \quad (9)$$

أما علاقة الطاقة لمور بعد إهمال تأثير قوى القص على طاقة التشوهات للجيزان الطولية فتكون:

$$\sum F_i \delta_i = \int_{x_0}^{\bar{x}} \bar{M} \frac{M}{EI} dx$$

بإدخال صيغة العزم  $\bar{M}$  في المعادلة (8) إلى العلاقة السابقة والإصلاح تصبح:

$$\sum F_i \delta_i = \bar{M}_0 \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx - \bar{Q}_0 \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M(x - x_0)}{EI} dx \quad (10)$$

يقود التساوي في مبدأ حفظ الطاقة بين عمل القوى الخارجية والداخلية إلى التساوي بين طرفي المعادلتين (9)

و(10). أي:

$$\bar{M}_0 \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx - \bar{Q}_0 \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M(x - x_0)}{EI} dx = \bar{Q}_0 (w_0 - w_{\bar{x}}) + \bar{M}_{\bar{x}} \varphi_{\bar{x}} \quad (11)$$

هكذا نجد أنه لأجل  $\bar{Q}_0 = 0$ ، ينتج أن:  $\bar{M}_0 = -\bar{M}_{\bar{x}}$

كذلك يتطلب انعدام العزم  $\bar{M}_{\bar{x}}$  أن يكون:  $\bar{M}_0 = \bar{Q}_0(\bar{x} - x_0)$

بالتالي، سوف تنتج عن تعويض كل من هاتين الصيغتين للعزم  $\bar{M}_0$  على حدة في العلاقة (11)، والإصلاح

لها صيغتا تغير ميل المماس والانتقال على وجهي القطع إلى:

$$\varphi_{\bar{x}} - \varphi_{x_0} = - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx \quad (12)$$

$$w_{\bar{x}} = w_0 + \varphi_0(\bar{x} - x_0) - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} (\bar{x} - x) dx \quad (13)$$

تسمى المعادلتان (12) و(13) بمعادلتى نافيهه- برس لحساب الانتقالات وميول المماسات (زوايا الدوران)

للخط المرن في نقاط مميزة منه.

يلاحظ أن هاتين العلاقاتين متطابقتان مع مضمون الجائز البديل أو الصيغتين (5) و (6).

### أهمية البحث وأهدافه:

تتجلى أهمية هذا البحث في الاستثمار المناسب للمفاهيم الرياضية وطرق التحليل الهندسية المتداولة ضمن منهجية علمية مستقلة بالباحث لاشتقاق صيغ مبسطة عامة للتعريف بمجاهيل الخط المرن في الجيزان المقررة وغير المقررة، التي تتطابق في مضامينها تحليلياً وتخطيطياً مع الطرق الأخرى المتداولة في هذا المجال، وتهدف إلى إغناء



وتوسيع آفاق اختيار التحليل المبسط لحساب قيم التعريف بمجاهيل الخط المرن المتوافق مع طبيعة الجملة المدروسة ومجالاتها.

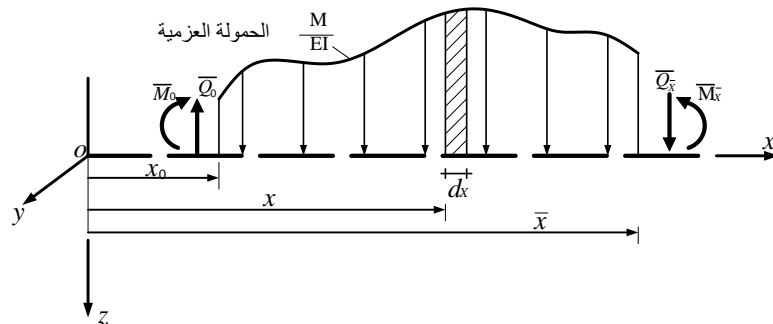
### طرائق البحث ومواده:

لقد ساعدنا تبلور المنهجيات التحليلية لبعض طرق التعريف بمجاهيل الخط المرن المعروضة أعلاه في السعي للبحث عن صيغة عامة تؤطر من خلالها مضامين تلك الطرق في منهجية علمية تحليلية موحدة، تمكن من الحصول الدقيق على قيم التعريف المميزة للخط المرن بشكل عام، وقيمة التعريف الأعظمية ضمن المجال المدروس بشكل خاص، وتعميم ذلك للأخذ في الحسبان تحليلياً لأي دوران، أو انتقال أولي حاصل في مساند الجائز، كما الحال عليه باستخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن.

لقد اعتمدنا لتحقيق هذا الهدف على المفاهيم الأساسية المستمدة من طريقة الجائز البديل والمبدأ العام المتعلق بتوازن أجزاء المنشأة بتأثير الحملات الخارجية والداخلية، وذلك لاستنتاج الصيغة التي تربط الدورانات والانتقالات في أجزاء الجائز موضوع بحثنا المذكور أعلاه.

#### أ- منهجية الباحث لاشتقاق صيغ التعريف بمجاهيل الخط المرن

لإدراك هذا الاشتقاق ندرس جزءاً مقتطعاً، ومحددًا بالإحداثيين  $\bar{x}$ ,  $x_0$  من جائز بديل متوازن، ومحمل بحمولاته العزمية المخفضة (لاحظ الشكل 2)، الذي ينطبق فيه محوره الطولي على المحور  $x$  في جملة الإحداثيات  $xyz$ ، ويحصل الانعطاف فيه حول المحور الرئيس للعتالة  $y$ ، وتؤثر عليه القوى الداخلية الموضحة في الشكل (5).



شكل (5): الجزء المقتطع من الجائز البديل

سيكون، بالتالي، هذا الجزء المقتطع متوازناً، أيضاً، بتأثير القوى الداخلية والحملات العزمية  $M/EI$  المؤثرة عليه كحمولات خارجية.

نحدد على الجزء المقتطع عنصراً تفاضلياً بطول  $dx$  على بعد  $x$ ، فتكون قيمة العزم عند هذه الفاصلة هي  $M_x$ ، وبالتالي الحملات العزمية  $M_x/EI$ .

لذلك، ينتج من خلال تطبيق معادلة الإسقاط وفق المحور  $z$ ، ومعادلة العزم عند الإحداثي  $\bar{x}$  أن:

$$\bar{Q}_x = \bar{Q}_0 - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx \quad (14)$$

$$\bar{M}_{\bar{x}} = \bar{M}_0 + \bar{Q}_0(\bar{x} - x_0) - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI}(\bar{x} - x) dx \quad (15)$$

كما يمكن التعبير عن العلاقة (14) بالصيغة:

$$\bar{M}_{\bar{x}} = \bar{M}_0 + \bar{Q}_0(\bar{x} - x_0) - \bar{x} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx + \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} x dx \quad (16)$$

تمكننا العلاقاتان السابقتان من حساب العزم والقص في أي جائزٍ بديلٍ ولأي مجالٍ منه، حيث يتعلق الأمر، كما نلاحظ، برد الفعل لحمولة الجائز البديل ومخطط العزم للجائز الأصلي.

إلا أن شروط التقابل بين الجائز الحقيقي والجائز البديل تعطي:

$$w' = \varphi = \bar{Q} \quad ; \quad w = \bar{M}$$

إذ إن:  $w, w'(\varphi)$ , الانتقال والدوران أو ميل المماس في الجائز الحقيقي.

بالتعويض في العلاقاتين (14) و (15) نحصل على:

$$\varphi_{\bar{x}} = \varphi_0 - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx \quad (17)$$

$$w_{\bar{x}} = w_0 + \varphi_0(\bar{x} - x_0) - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI}(\bar{x} - x) dx \quad (18)$$

نلاحظ من هاتين المعادلتين، أنهما تتطابقان مع معادلتى برس (12) و (13).

يمثل التكامل  $\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx$  في العلاقة (17) مساحة مخطط الحمولة العزمية بين الإحداثيين المعترضين، الذي

يعبر عن فرق الميلين للخط المرن بين بداية ونهاية المجال المدروس. بينما يمثل  $\int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI}(\bar{x} - x) dx$  في العلاقة

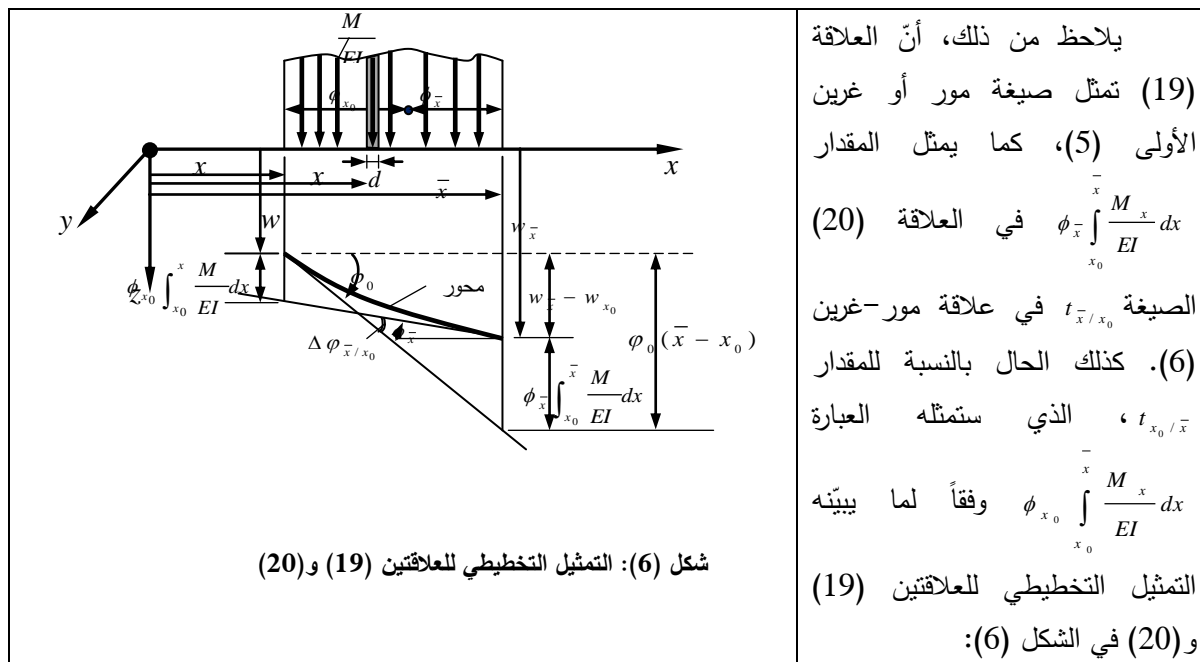
(18) العزم الستاتيكي لهذه المساحة بالنسبة للمقطع بالإحداثي  $\bar{x}$ .

هكذا يفرض أن بعد مركز ثقل مساحة مخطط العزم عن المقطع من الجائز بالإحداثي  $\bar{x}$  هو  $\phi_{\bar{x}}$ ، فإن إدخال

ذلك على العلاقاتين (17) و (18) والإصلاح لهما يعطي:

$$\Delta \varphi_{\bar{x}/x_0} = \varphi_{\bar{x}} - \varphi_0 = - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx \quad (19)$$

$$w_{\bar{x}} - w_0 = \varphi_0(\bar{x} - x_0) - \phi_{\bar{x}} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx \quad (20)$$



يلاحظ من ذلك، أنّ العلاقة (19) تمثل صيغة مور أو غرين الأولى (5)، كما يمثل المقدار  $\phi_{x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx$  في العلاقة (20) الصيغة  $t_{\bar{x}/x_0}$  في علاقة مور-غرين (6). كذلك الحال بالنسبة للمقدار  $t_{x_0/\bar{x}}$  الذي ستمثله العبارة  $\phi_{x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx$  وفقاً لما بيّنه التمثيل التخطيطي للعلاقتين (19) و(20) في الشكل (6):

هكذا يمكن الاستنتاج من الشكل (6)، أنّ عزم مساحة مخطط الحمل العزمية  $\phi_{x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx$  بالنسبة للمقطع

بالإحداثي  $\bar{x}$  يساوي لمسافة نقطة تقاطع المماس في النقطة من الجائز بالإحداثي  $x_0$  مع الشاقول المار من النقطة بالإحداثي  $\bar{x}$  عن نقطة تقاطع هذا الشاقول مع منحنى الجائز (الخط المرن للجائز). كذلك الأمر، سيكون الفرق بين نقطة تقاطع الشاقول المار بالإحداثي  $x_0$  مع الخط المرن والمماس المرسوم من النقطة الأخرى على منحنى الجائز

$$\text{مساوياً للمقدار } \phi_{x_0} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M}{EI} dx.$$

بالتالي، تمكّن معرفة قيمتين للانتقال أو الدوران لأي من نقاط الجائز حساب الانتقال والدوران في أي نقطة أخرى منه، وذلك من خلال الاستعانة بهذا التمثيل التخطيطي التقريبي لتشوه محور الجائز المتوافق مع إشارة الحمل العزمية عليه، حيث سيكون الانتقال موجباً (أي نحو الأسفل) في المجال الموجب للعزم أو الحمل العزمية، وسالباً (أي أعلى محور الجائز) عكس ذلك.

لتسهيل الحساب بالطرق التخطيطية فقد أعطي في العديد من المراجع مساحات ومراكز ثقل بعض مخططات

العزوم [7].

#### ب- تعميم صيغ التعريف بمجاهيل الخط المرن

يقدم الحل التخطيطي، أو التحليلي باستخدام مفاهيم العلاقات المعطاة في الفقرة السابقة حلاً ميسراً، وأقل تعقيداً في أغلب الأحيان من المعادلة التفاضلية لحساب الانتقالات والدورات في نقاط مميزة من الجيزان المتعددة المجالات. إلا أنّ هناك بعض السلبات والتعقيد والحاجة دوماً لبذل مزيدٍ من الجهد لتحقيق الهدف المأمول من قبل المحلل الإنشائي، وخاصة عند الحاجة لإيجاد معادلة الخط المرن للجائز وتحديد الانتقالات الأعظمية على مجالته، ولاسيما في الجيزان الخاضعة لحمولات متغيرة الموضع على الجائز.

من خلال إجراء الإصلاح على العلاقتين (17) و(18) نحصل على:

$$\varphi_x^- = \varphi_0 - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx \quad (21)$$

$$w_x^- = w_0 + \varphi_0 (\bar{x} - x_0) - \left( \bar{x} \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x}{EI} dx - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x \cdot x}{EI} dx \right) \quad (22)$$

بإدخال العلاقة (21) إلى المعادلة (22) ينتج أن:

$$w_x^- = w_0 + \varphi_0 (\bar{x} - x_0) - \left[ (-\bar{x}(\varphi_x^- - \varphi_0)) - \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x \cdot x}{EI} dx \right]$$

بالإصلاح لهذه العلاقة تتحول إلى الشكل:

$$w_x^- = w_0 + \bar{x}\varphi_x^- - x_0\varphi_0 + \int_{x_0}^{\bar{x}} \frac{M_x \cdot x}{EI} dx \quad (23)$$

بذلك يمكن استخدام المعادلتين (21) و(22) لحساب الانتقال والدوران لأي نقطة من الجائز، بعد الأخذ في الحسبان لشروطين متوافرين على هذا الجائز من انتقالات، أو دورانات لأي نقطة منه. من ناحية ثانية، وبما أن  $\bar{x}$  تمثل قيمة نهاية المجال للمتحول  $x$ ، فإنه يمكن الحصول من العلاقتين (22) و(23) على معادلات الخط المرن للجائز من خلال استبدال  $\bar{x}$  بالمتحول  $x$ ، حيث نحصل على الصيغ العامة الآتية:

$$\varphi_x = \varphi_0 - \int_{x_0}^x \frac{M_x}{EI} dx \quad (24)$$

$$w_x = w_0 + x\varphi_x - x_0\varphi_0 + \int_{x_0}^x \frac{M_x \cdot x}{EI} dx \quad (25)$$

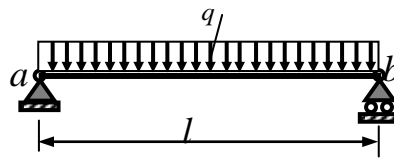
يمكن للقيمة  $x_0$  أن تمثل بداية الجائز أو أي مجال مدروس بعد تحديد قيمة الانتقال والدوران عند هذه البداية، وذلك بحسب مبدأ الإحداثيات المعتمد للمجال المدروس، حيث سترتبط معادلة العزم بهذا المبدأ المعتمد. تطبق المعادلات (24) و(25) على الخط المرن المستمر للجائز. أما عندما يلاقي هذا الخط انقطاعاً كحالة وجود مفصل في الجائز، إذ يتغير الميل يمين ويسار المفصل، يحدد هذا الانقطاع نهاية تطبيق المعادلات على الجزء اليساري وبداية تطبيقها على الجزء اليميني من الجائز، مع حتمية تساوي الانتقالين يمين ويسار المفصل. سوف يتبين لنا من خلال استخدام العلاقات السابقة في التطبيقات العملية، أن إيجاد معادلات الخط المرن وحساب الانتقالات والدورانات سوف يكون غالباً أكثر يسراً وبعمليات حسابية أقل تعقيداً من استخدام الطرق التخطيطية نفسها أو المعادلة التفاضلية للخط المرن. كما أنها ستأخذ مباشرة في الحسبان أي انتقال أو دوران حاصل في مساند الجائز.

#### ب- تطبيقات استخدام الطرق والصيغ المذكورة

سوف نتعرض إلى نماذج مبسطة من الجيزان، والتي تمثل الحالات الأساسية لنظام الجمل الإنشائية بشكلٍ عام. حيث يمكن من خلال ذلك إجراء المقارنة العملية المباشرة لطبيعة التباين العام القائم بين الطرق المختلفة في معالجتها للتعريف بمجاهيل الخط المرن، وتعميم ذلك على حالة الجيزان متعددة المجالات.

### مثال 1:

جائز محمل بحمولة موزعة  $q$  ومستند على مسندين مفصليين (الشكل 7):



شكل (7) جائز بسيط

رغم تأثير حمولة موزعة واحدة فقط، إلا أننا سنتبع في الحل المراحل اللازمة فيما لو أثرت حمولات مختلفة على الجائز.

في الحال هذه يجب إما إيجاد حمولات الجائز البديل المستقلة لأجل كل حالة تحميل مؤثرة على الجائز الحقيقي المدروس، ثم البحث عن مجاهيل الخط المرن المطلوبة بتتضيد قيمها الناتجة عن استخدام الجائز البديل، حيث سيطيل ذلك إنجاز المطلوب، أو اعتماد التأثير المشترك لتراكب الحمولات في مخطط تحميل واحد على الجائز البديل، الذي سيفرض، حينئذٍ، لإيجاد أي من مجاهيل الخط المرن حساب الحمولة العزمية لموضع المقطع المدروس، ليتم بعدئذٍ تقسيم مخطط الحمولة للجزء المدروس من الجائز البديل إلى أشكال هندسية معلومة المساحة (قطع ومثلث)، والذي سنعتمده هنا لأجل مقارنة مراحل الحل العامة وإن كان المطلوب للجائز المدروس في هذا المثال البسيط يمكن بلوغه بشكلٍ أيسر بقليل مما هو معروض فيما يلي.

لذلك، يلاحظ أن الحل بشكلٍ عامٍ يتطلب حساب شدة الحمولة العزمية لأجل  $x = \frac{l}{4}$ ، كي يمكن تقسيم المخطط المعطى أعلاه إلى قطع ومثلث بمساحة ومركز ثقلٍ معلومين، فنجد أن:

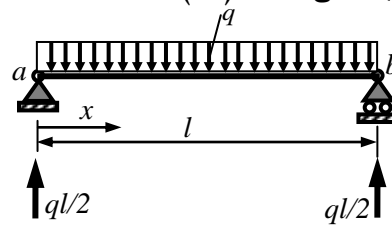
$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{ql^2}{32} \right) = \frac{3ql^2}{32EI}$$

عندها تكون قيمة الحمولة لذروة القطع هي:

$$\frac{3ql^2}{32EI} - \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ql^2}{32EI}$$

### طريقة الجائز البديل

يعطي تطبيق معادلات التوازن على الجائز ردود الأفعال المبينة على الشكل (7a).

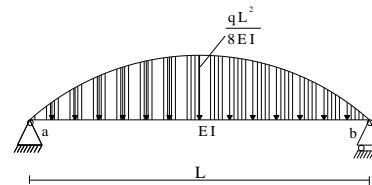


شكل (7a): ردود أفعال الجائز

لذلك تكون معادلة العزم بدلالة  $x$ :

$$M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

الجائز البديل والحمولة العزمية في الشكل (7b):



شكل (7b): الجائز البديل والحمولة العزمية

حساب الانتقال والدوران في منتصف الجائز:

حساب ردود الأفعال للجائز:

$$\sum M, b = 0$$

$$V_a \cdot l - \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{l}{2} = 0$$

بالتالي:

$$V_a = \frac{ql^3}{24EI} \quad ; \quad V_b = \frac{ql^3}{24EI}$$

يبين الشكل (7d) قوى القطع في وسط الجائز البديل.

بالتالي تطبيق معادلات التوازن يعطي:

$$\bar{Q} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2ql^2}{3 \cdot 32EI} \cdot \frac{l}{2}$$

$$\varphi_{1/2} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{32EI} - \frac{ql^3}{96EI} = 0$$

**الحل بالمعادلات (1) و (2)**

إن تطبيق المعادلة (2) عند نهاية الجانز يعطي:

$$0 = 0 + \bar{Q}_0(l) - \frac{2l}{3} \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{Q}_0 = \varphi_0 = \frac{ql^3}{24EI} = \bar{V}_a$$

كما ينتج من المعادلة (1) أن:

$$0 = 0 + \bar{Q}_0(l) - \frac{2l}{3} \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\bar{Q}_l = \varphi_l = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{2l}{3} \frac{ql^2}{8EI} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{ql^3}{24EI} = \bar{V}_b$$

الدوران والانتقال في منتصف الجانز:

$$\bar{Q}_{1/2} = \varphi_{1/2} = \frac{ql^3}{24EI} - \int_0^{l/2} \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) dx$$

$$\bar{M}_{1/2} = w_{1/2} = 0 + \frac{ql^3}{24EI} (l/2 - 0)$$

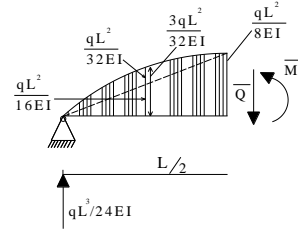
$$- \int_0^{l/2} \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) (l/2 - x) dx$$

بالتالي:

$$\varphi_{1/2} = \frac{ql^3}{24EI} - \left[ \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} \right]_0^{l/2}$$

$$w_{1/2} = \frac{ql^3}{24EI} (l/2 - 0)$$

$$- \frac{l}{2} \left[ \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} \right]_0^{l/2} + \left[ \frac{qlx^3}{6EI} - \frac{qx^4}{8EI} \right]_0^{l/2}$$



شكل (7d): نصف الجانز البديل

$$\bar{M} = \frac{ql^3}{24EI} \cdot \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{6EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{32EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

بالإصلاح نجد أن:

$$\bar{M} = \frac{ql^4}{48EI} - \frac{ql^4}{192EI} - \frac{ql^4}{384EI} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

بالتالي:

$$w_{(1/2)} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

إيجاد معادلات الخط المرن:

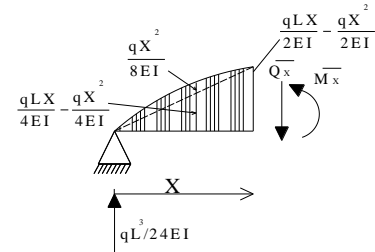
لإيجاد هذه المعادلات نعتمد أيضاً حالة الأخذ في

الحساب للتأثير الكلي للحمولات، حيث نجري قطعاً على

بعد  $x$  من المسند، كما يظهره الشكل (7c)، فتكون الحمولة

العزمية على بعد  $x/2$ :

$$\frac{ql}{2} \cdot \frac{x}{2EI} - \frac{qx^2}{8EI}$$



شكل (7c): جزء بطول  $x$  من الجانز البديل

تكون بالتالي قيمة الحمولة لذروة القطع عند  $x/2$ :

$$\frac{ql}{4} \cdot \frac{x}{EI} - \frac{qx^2}{8EI} - \frac{1}{2} \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) = \frac{qx^2}{8EI}$$

ومنه نجد أن:

$$\bar{M} = \frac{ql^3}{24EI} x - \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3} x - \frac{2qx^2}{3 \cdot 8EI} x \cdot \frac{x}{2}$$

إذاً:

$$\varphi_{l/2} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{48EI} = 0$$

$$w_{l/2} = \frac{l}{2} \left( \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{48EI} \right) + \left( \frac{ql^4}{48EI} - \frac{ql^4}{128EI} \right) = \frac{5ql^4}{384EI}$$

معادلتا الخط المرن:

$$\overline{Q}_x = \varphi_x = \frac{ql^3}{24EI} - \int_0^x \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) dx$$

$$\overline{M}_x = w_x = 0 + \frac{ql^3}{24EI} (x-0) - x \int_0^x \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) dx + \int_0^x \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) x dx$$

لذلك يكون:

$$t_{l/2/a} = \frac{3l}{8} \frac{l}{2} \left( \frac{2}{3} + \frac{ql^2}{8EI} \right) \frac{l}{2} = \frac{ql^4}{128EI}$$

ملاحظة: لقد كان ممكناً أن يتم الحصول على قيم  $t$

بإجراء التكامل المباشر للعلاقة (6)، الأمر الذي سيكون

أيسر عند تعدد التحميل على الجائز.

هكذا سينتج أن:

$$w_{l/2} = w_{\max} =$$

$$\varphi_a \frac{l}{2} - t_{l/2/a} = \frac{ql^3}{24EI} \frac{l}{2} - \frac{ql^4}{128EI} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

**الحل بالمعادلتين (17) و (18) المتوافقتين مع**

**معادلتى برنس (12) و (13):**

نعتمد في الحل الحالة العامة لعدم تناظر الجائز

والتحميل، التي لانعلم فيها أن الدورانيين في المسندين متساويان في القيمة ومتعاكسان في الإشارة.

لذلك، ينتج عن استخدام العلاقة (18) بين

المسنيين أن:

$$0 = 0 + \varphi_a (l-0) - \int_0^l \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) (l-x) dx$$

$$\overline{M} = \frac{ql^3}{24EI} x - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{qx^4}{12EI} - \frac{qx^4}{24EI}$$

$$\overline{M} = \frac{ql^3}{24EI} x - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{qx^4}{24EI}$$

$$w_x = \frac{ql^3 x}{24EI} - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{qx^4}{24EI}$$

كذلك نستخلص أن:

$$\overline{Q} = \varphi_x = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{1}{2} \left( \frac{qlx}{2EI} - \frac{qx^2}{2EI} \right) x - \frac{2}{3} \frac{qx^2}{8EI} x$$

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{qlx^2}{4EI} + \frac{qx^3}{4EI} - \frac{qx^3}{12EI}$$

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{qlx^2}{4EI} + \frac{qx^3}{6EI}$$

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24EI} - \left[ \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} \right]_0^x$$

$$w_x = \frac{ql^3}{24EI} (x-0)$$

$$- x \left[ \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} \right]_0^x + \left[ \frac{qlx^3}{6EI} - \frac{qx^4}{8EI} \right]_0^x$$

إذاً:

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{qlx^2}{4EI} + \frac{qx^3}{6EI}$$

$$w_x = \frac{ql^3 x}{24EI} - \frac{qlx^3}{12EI} + \frac{qx^4}{24EI}$$

**طريقة مور - غرين**

حساب الانتقال والدوران في منتصف الجائز:

يبين الشكل (7e) الجائز مع مخطط عزمه

المخفض  $M/EI$  وشكل خطه المرن.

إن رسم المماس للخط المرن في المسند  $a$  سوف

يحدد المقدار  $t_{b/a}$  على الشاقول في  $b$ ، وكذلك المماس في

المسند  $b$  سوف يحدد المقدار  $t_{a/b}$  على الشاقول في  $a$ ،

كما يتبين ذلك على الشكل (7e).

بالتالي، فإن:

$$\varphi_a l = -l \left[ \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} \right]_0^l + \left[ \frac{qlx^3}{6EI} - \frac{qx^4}{8EI} \right]_0^l$$

ومنه:

$$\varphi_a = \frac{ql^3}{24EI}$$

تعويض ذلك في المعادلة (17) يبين أن:

$$\varphi_b = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{1}{EI} \int_0^l \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = -\frac{ql^3}{24EI}$$

هكذا نجد أنه باستخدام العلاقتين (3) و (4) من

جديد، فإن:

$$\varphi_{1/2} = \varphi_a - \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx =$$

$$\frac{ql^3}{24EI} - \frac{1}{EI} \left[ \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right]_0^{l/2} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{48EI} = 0$$

$$w_{1/2} = 0 + \frac{ql^3}{24EI} (l/2 - 0) - \frac{1}{2} \left[ \frac{qlx^2}{4EI} - \frac{qx^3}{6EI} \right]_0^{l/2} + \left[ \frac{qlx^3}{6EI} - \frac{qx^4}{8EI} \right]_0^{l/2} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

هكذا نستنتج من المعادلة (24) أن:

$$\varphi_{1/2} = \varphi_1 + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

$$\varphi_{1/2} = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{1}{EI} \left( \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right) \Big|_{l/2}^l$$

$$\varphi_{1/2} = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{ql^3}{12EI} - \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{48EI} = 0$$

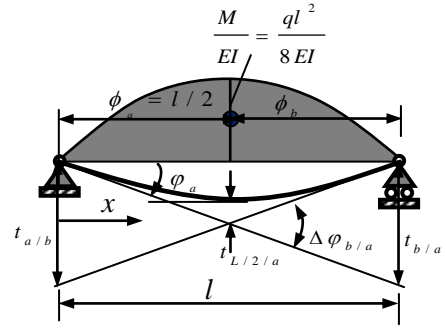
استخدام المعادلة (25) من جديد يبين أن:

$$\delta_{1/2} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

$$w_{1/2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{8} \right) \Big|_0^{l/2} = \frac{ql^3}{48EI} - \frac{ql^4}{128EI} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^l \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right]_0^l = \frac{ql^3}{12EI}$$

تطبيق المعادلة (20) على المجال بين المسندين يعطي،



شكل (7e): الجائز مع مخطط العزم المخفض

إن استخدام العلاقات (5) و (6) يؤدي إلى أن:

$$-2\varphi_a = -\frac{2}{3} \left( +\frac{ql^2}{8EI} \right) l \Rightarrow \varphi_a = +\frac{ql^3}{24EI}$$

$$t_{b/a} = \frac{l}{2} \left( \frac{2}{3} \left( +\frac{ql^2}{8EI} \right) l \right) = \frac{ql^4}{24EI}$$

أو أن:

$$\varphi_a = \frac{t_{b/a}}{l} = +\frac{ql^4}{24EI}$$

كذلك:

$$t_{a/b} = \frac{l}{2} \left( -\frac{2}{3} \left( +\frac{ql^2}{8EI} \right) l \right) = -\frac{ql^4}{24EI}$$

$$\varphi_b = \frac{t_{a/b}}{l} = -\frac{ql^3}{24EI}$$

لذلك نجد أن:

**الحل بالمعادلتين (19) و (20):**

نلاحظ أن هاتين المعادلتين مرتبطتان بالعبارة

$$\int_{x_0}^x \frac{M_x}{EI} dx$$

ضمن المجال المدروس.

لذلك، نحسب أولاً هذا المقدار للمجال بين مسندي

الجائز، فنجد أن:



**معادلات الخط المرن:**

تطبيق المعادلة (24) يعطي أن:

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24 EI} - \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24 EI} = \frac{qlx^2}{2 EI} + \frac{qx^3}{6 EI}$$

تعويض ذلك في المعادلة (25) يبين أن:

$$w_x = 0 + x \left( \frac{ql^3}{24 EI} - \frac{qlx^2}{2 EI} - \frac{qx^3}{6 EI} \right) + 0 + \int_0^x \left( \frac{qlx}{2 EI} - \frac{qx^2}{2 EI} \right) dx$$

بإجراء التكامل المطلوب في العلاقة والإصلاح نجد

أن:

$$w_x = \frac{ql^3 x}{24 EI} - \frac{qlx^3}{2 EI} + \frac{qx^4}{6 EI} + \frac{qlx^3}{6 EI} - \frac{qx^4}{8 EI} \Rightarrow$$

$$w_x = \frac{ql^3 x}{24 EI} - \frac{qlx^3}{3 EI} + \frac{qx^4}{24 EI}$$

حساب الانتقال والدوران في منتصف الجائز:

تطبيق معادلة الانتقال بين بداية ونهاية الجائز

يعطي:

$$w_l = w_0 + l\varphi_l - 0 \cdot \varphi_0 + \frac{1}{EI} \int_0^l \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

$$\varphi_l = -\frac{1}{EI} \left( \frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{8} \right)_0^l$$

$$\varphi_l = -\frac{1}{EI} \left( \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8} \right) = -\frac{ql^3}{24 EI}$$

$$\varphi_{l/2} = \varphi_l + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24 EI} - \frac{1}{EI} \int_0^x \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

بعد الأخذ في الحسبان لشكل مخطط العزم على الجائز وبعد مركز ثقل هذا المخطط عن المسند  $b$ ، أن:

$$0 = 0 + \varphi_0 (l - 0) - \frac{l}{2} \frac{ql^3}{12 EI} \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \varphi_a = \frac{ql^3}{24 EI}$$

تعويض ذلك في المعادلة (19) يقود إلى:

$$\varphi_b = \frac{ql^3}{24 EI} - \frac{ql^3}{12 EI} \Rightarrow \varphi_b = -\frac{ql^3}{24 EI}$$

بذلك، نجد باستخدام المعادلة (19) أن:

$$\varphi_a = \frac{ql^3}{24 EI}$$

$$\varphi_{l/2} = \varphi_a - \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) dx =$$

$$\frac{ql^3}{24 EI} - \frac{1}{EI} \left[ \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right]_0^{l/2} = \frac{ql^3}{24 EI} - \frac{ql^3}{16 EI} + \frac{ql^3}{48 EI} = 0$$

تطبق المعادلة (20) من جديد لنجد أن:

$$w_{l/2} - 0 = \frac{ql^3}{24 EI} \left( \frac{l}{2} - 0 \right) - \frac{3l}{8} \frac{1}{EI} \left[ \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} \right]_0^{l/2}$$

$$w_{l/2} = w_{\max} = \frac{5ql^4}{384 EI}$$

**الحل بالمعادلتين (24) و (25):**

تطبيق معادلة الانتقال (25) بين بداية ونهاية

الجائز يعطي:

$$0 = 0 + l\varphi_l - 0 \cdot \varphi_0 + \frac{1}{EI} \int_0^l \left( \frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

$$\varphi_l = -\frac{1}{EI} \left( \frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{8} \right)_0^l$$

$$\varphi_l = -\frac{1}{EI} \left( \frac{ql^3}{6} - \frac{ql^4}{8} \right) = -\frac{ql^3}{24 EI}$$

$$\varphi_{l/2} = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{1}{EI} \left( \frac{qlx^2}{4} - \frac{ql^3}{6} \right) \Big|_0^{l/2}$$

$$w_{l/2} = \frac{1}{EI} \left( \frac{qlx^3}{6} - \frac{qx^4}{8} \right) \Big|_0^{l/2}$$

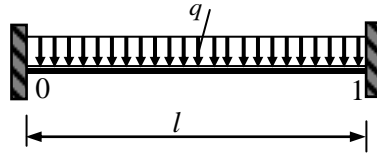
$$w_{l/2} = \frac{ql^3}{48EI} - \frac{ql^4}{128EI} = \frac{5ql^4}{384EI}$$

$$\varphi_{l/2} = -\frac{ql^3}{24EI} + \frac{ql^3}{12EI} - \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{48EI} = 0$$

$$\delta_{l/2} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

## مثال 2:

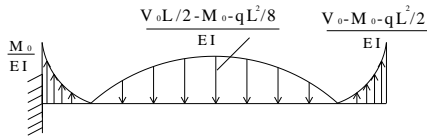
جائز موثوق من الطرفين صلابته  $EI$  ، ومحمل بحمولة موزعة  $q$  (الشكل 8).



شكل (8): جائز موثوق من الطرفين

المطلوب : إيجاد معادلات الخط المرن وحساب الانتقال الأعظمي وإيجاد مخطط العزم والقص.

بالتالي يكون الجائز البديل مع الحمولة العزمية السالبة والموجبة عليه هو المبين في الشكل (8c).

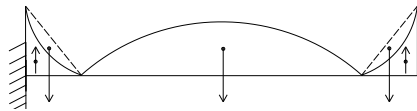


شكل (8c): الجائز البديل والحمولة العزمية

وهنا نلاحظ أنّ تحصيل السطوح يتطلب حل معادلة

العزم لمعرفة مكان انعدام هذا العزم.

ثم إنّ هذا التحصيل يتطلب تقسيم هذا المخطط إلى أشكال هندسية معلومة السطوح ومراكز الثقل، كما في الشكل (8d)، ومعرفة القيم اللازمة لحساب هذه السطوح كما تبين ذلك من الأمثلة السابقة.



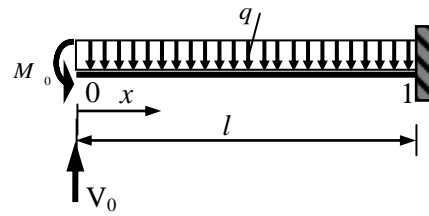
شكل (8d): المحصلات الجزئية للحمولات العزمية

عندئذٍ تتوفر الإمكانية لمطابقة معطيات الجائز البديل مع الجائز الحقيقي للحصول على المعادلات التي تمكننا من إيجاد المطلوب.

## طريقة الجائز البديل

تقرير الجملة وكتابة معادلة العزم:

يبين الشكل (8a) الجملة المقررة مع ردود الأفعال.



شكل (8a): الجملة المقررة والمجاهيل

معادلة العزم:

$$M = V_0x - M_0 - q \frac{x^2}{2}$$

إيجاد الجائز البديل ومخطط الحمولة العزمية:

$$x = 0 : M = M_0$$

$$x = \frac{l}{2} : M = V_0 \frac{l}{2} - M_0 - q \frac{l^2}{8}$$

$$x = l : M = V_0l - M_0 - q \frac{l^2}{2}$$

هكذا نلاحظ أنّ رسم مخطط العزم الكلي المناسب وفق هذه المعطيات يتطلّب توافر الخبرة من قبل الطالب والمهندس.

يتضح من ذلك حجم العمليات المتعددة المعقدة نسبياً التي يجب إجراؤها للحصول على حل المسألة المطروحة، والتي تجعل إمكانية التعرض للأخطاء أثناء الإجراء اليدوي لهذه العمليات متوافرة جداً. هذا سيجعلنا ندرك بكل يعطي إجراء التوازن على القطع في جوار المسند 0 لكل حالات التحميل المستقلة المؤثرة على الجائز البديل القوى الداخلية الآتية:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_0 &= \frac{V_0 l^2}{2EI} - \frac{M_0 l}{EI} - \frac{ql^3}{6EI} = 0 \\ \overline{M}_0 &= -\frac{V_0 l^3}{3EI} + \frac{M_0 l^2}{2EI} + \frac{ql^4}{8EI} = 0 \end{aligned}$$

الإصلاح لهاتين العلاقتين يعطي:

$$V_0 l - 2M_0 - \frac{ql^3}{3} = 0$$

$$V_0 l - 1,5M_0 - \frac{3ql^3}{8} = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن:

$$V_0 = \frac{ql}{2} \quad ; \quad M_0 = \frac{ql^2}{12}$$

الانتقال الأعظمي للخط المرن:

في الحالة العامة يجب إيجاد معادلة الدوران للخط المرن بناءً على الجائز البديل، الأمر الذي سيكون معقداً إلى حد ما، كما بيّننا ذلك في الجائز المعطى في المثال 1. إلا أنه وبسبب التناظر للجملة والحمولات يتضح أن هذا الانتقال الأعظمي سوف يحصل في وسط الجائز المعطى هنا في هذا المثال.

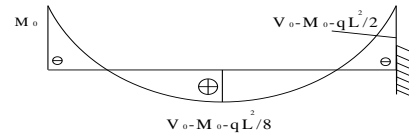
لذلك، نجد، بعد تعويض قيم  $V_0, M_0$  في صيغ حمولات الجائز البديل، أن:

$$\overline{M}_{\frac{l}{2}} = w_{\max} = \frac{ql^3 l}{4EI \cdot 2} - \frac{ql^4}{6EI} - \frac{ql^2 l}{2 \cdot 2EI} - \frac{1 \cdot 1 \cdot l}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2}$$

بالتالي

$$\begin{aligned} & -\frac{ql^3 l}{12EI \cdot 2} + \frac{ql^4}{24EI} + \frac{ql^2 l}{12EI \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} - \frac{ql^3 l}{6EI \cdot 2} \\ & + \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^2 l}{8EI \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} - \left( \frac{ql^2 l}{16EI} - \frac{ql^2 l}{32EI} \right) - \frac{2 \cdot 1 \cdot l}{3 \cdot 2 \cdot 4} \end{aligned}$$

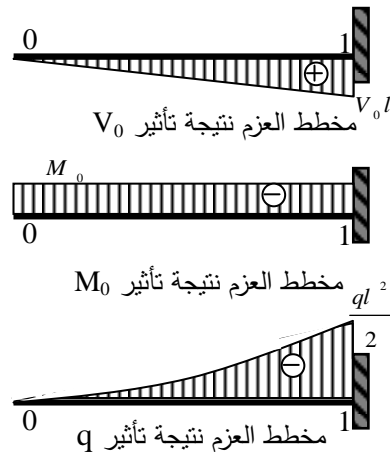
إذا اعتبرنا إمكانية توافر هذه الخبرة سنجد أنّ المخطط سيأخذ الشكل (8b).



شكل (8b): مخطط العزم نتيجة الحمولات والمجاهيل

تأكيد أن حجم التعقيد سيزداد أكثر عند تعدد مجالات التحميل على الجائز، الأمر الذي لانستطيع تبياناه هنا بسبب قيود الصفحات المتاحة.

أما إذا اعتمدنا مبدأ استقلال تأثير القوى لتسهيل وتوضيح مسار العمل أكثر، كما في الشكل (8e)، فإن ذلك يتطلب رسم الجائز مرات متعددة، وتطبيق معادلات التوازن على كل جائز، وإيجاد محصلات السطوح ومراكز ثقلها وتجميع نتائجها، ومقارنتها مع شروط الجائز الحقيقي للحصول على المطلوب، والذي لن يخلو من التعقيد، أيضاً، إذا ما قورن باستخدام الصيغ المشتقة.



شكل (8e): مخطط العزم للتأثير المستقل للقوى

هكذا، يبين الشكل (8f) الجائز البديل مع الحمولات العزمية المخفضة وردود الأفعال لحالات التحميل المستقلة.

$$w_{\max} = \frac{ql^4}{384 EI}$$

ي:

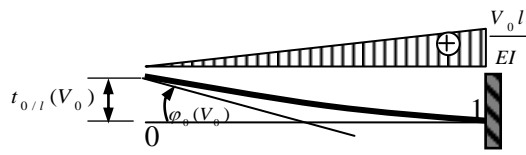
**الحل بالمعادلتين (14) و (15)**

إنّ تطبيق المعادلتين عند بداية الجائز يعطي:

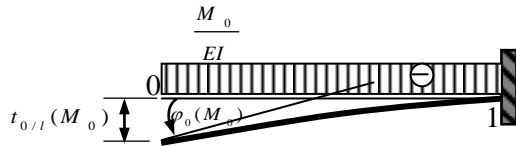
$$\bar{Q}_0 = \frac{V_0 l^2}{2 EI} - \frac{M_0 l}{EI} - \frac{ql^3}{6 EI} - 0 = 0$$

$$\bar{M}_0 = -\frac{V_0 l^3}{3 EI} + \frac{M_0 l^2}{2 EI} + \frac{ql^4}{8 EI} - \bar{Q}_0(0 - 0) - 0 = 0$$

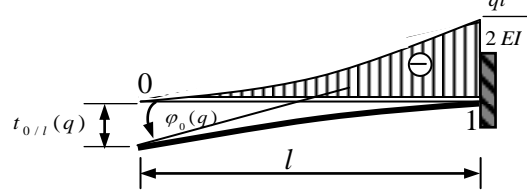
يستخلص من الإصلاح لهاتين العلاقاتين أن:



الخط المرن ومخطط العزم المخفض نتيجة تأثير  $V_0$



الخط المرن ومخطط العزم المخفض نتيجة تأثير  $M_0$



شكل (8g): الخط المرن ومخطط العزم المخفض نتيجة تأثير  $q$

للتأثير المترابك المذكور يؤدي إلى أن:

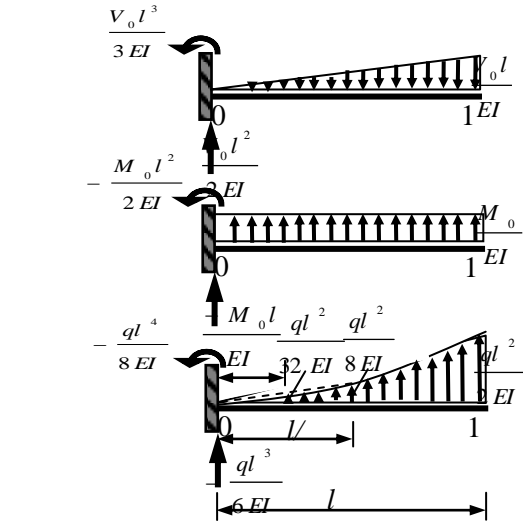
$$\bar{Q}_0 = \frac{V_0 l}{EI} - \frac{M_0}{EI} - \frac{ql^2}{2 EI} = 0$$

$$\bar{M}_0 = -\frac{2l V_0}{3 EI} + \frac{l M_0}{2 EI} + \frac{3l^2 ql^2}{4 \cdot 3 \cdot 2 EI} = 0$$

الإصلاح لهاتين العلاقاتين يعطي:

$$V_0 l - 2 M_0 - \frac{q l^3}{3} = 0 \quad \bar{Q}_{1/2} = \varphi_{1/2} = 0 - \int_0^{1/2} \left( \frac{ql}{2 EI} x - \frac{ql^2}{12 EI} - \frac{qx^2}{2 EI} \right) dx$$

$$V_0 l - 1,5 M_0 - \frac{3q l^3}{8} = 0 \quad \bar{M}_{1/2} = w_{1/2} = 0 + 0(l/2 - 0) - \int_0^{1/2} \left( \frac{ql}{2 EI} x - \frac{ql^2}{12 EI} - \frac{qx^2}{2 EI} \right) \left( \frac{l}{2} - x \right) dx$$



شكل (8f): الحمولات العزمية على الجائز البديل وردود الأفعال

$$V_0 l - 2 M_0 - \frac{q l^3}{3} = 0$$

$$V_0 l - 1,5 M_0 - \frac{3q l^3}{8} = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن:

$$V_0 = \frac{q l}{2} \quad ; \quad M_0 = \frac{q l^2}{12}$$

الدوران والانتقال في منتصف الجائز:

نعيد استخدام المعادلتين بين بداية ووسط الجائز

لنجد أن:

$$\bar{Q}_{1/2} = \varphi_{1/2} = 0 - \int_0^{1/2} \left( \frac{ql}{2 EI} x - \frac{ql^2}{12 EI} - \frac{qx^2}{2 EI} \right) dx$$

$$\bar{M}_{1/2} = w_{1/2} = 0 + 0(l/2 - 0) - \int_0^{1/2} \left( \frac{ql}{2 EI} x - \frac{ql^2}{12 EI} - \frac{qx^2}{2 EI} \right) \left( \frac{l}{2} - x \right) dx$$

بإجراء التكاملات اللازمة والإصلاح نحصل على:

$$\frac{qll^2}{16 EI} - \frac{ql^2 l}{24 EI} - \frac{ql^3}{48 EI} = 0$$

$$\frac{l}{2} \left( \frac{qll^2}{16 EI} - \frac{ql^2 l}{24 EI} - \frac{ql^3}{48 EI} \right) - \left( \frac{qll^3}{48 EI} - \frac{ql^2 l^2}{96 EI} - \frac{ql^4}{128 EI} \right)$$

بحل المعادلتين نجد أن:

$$V_0 = \frac{q l}{2} ; M_0 = \frac{q l^2}{12}$$

وتكون ميول المماسات هي:

$$\varphi_0(V_0) = \frac{q l^3}{4 E I}, \varphi_0(M_0) = -\frac{q l^3}{12 E I}, \varphi_0(q) = -\frac{q l^3}{6 E I}$$

الانتقال الأعظمي للخط المرن:

تحتسب أولاً المقادير  $t$ ، فنجد أن:

$$t_{1/2/0}(V_0) = \frac{l}{3 \cdot 2} \frac{q l^2}{4 E I} \frac{l}{2} \frac{1}{2} = \frac{q l^4}{96 E I}$$

$$t_{1/2/0}(M_0) = -\frac{l}{2 \cdot 2} \frac{q l^2}{12 E I} \frac{l}{2} = -\frac{q l^4}{96 E I}$$

$$t_{1/2/0}(q) = -\frac{l}{3 \cdot 2} \frac{q l^2}{8 E I} \frac{l}{2} \frac{1}{2} + \frac{l}{4} \left( \frac{q l^2}{16 E I} - \frac{q l^2}{32 E I} \right) \frac{2}{3} \frac{l}{2} = -\frac{q l^4}{384 E I}$$

$$V_0 l - 2 M_0 - \frac{q l^3}{3} = 0$$

$$V_0 l - 1,5 M_0 - \frac{3 q l^3}{8} = 0$$

بحل المعادلتين نجد أن:

$$V_0 = \frac{q l}{2} ; M_0 = \frac{q l^2}{12}$$

الانتقال الأعظمي للخط المرن:

$$w_{1/2} - 0 = +0 \left( \frac{l}{2} - 0 \right) - \frac{l}{3 \cdot 2} \frac{V_0 l^2}{2 \cdot 4 E I} + \frac{l}{2 \cdot 2} \frac{M_0 l}{2 E I} + \frac{l}{4 \cdot 2} \frac{q l^3}{6 \cdot 8 E I}$$

هكذا نجد أن:

$$w_{1/2} = -\frac{l}{3 \cdot 2} \frac{q l^2}{2 \cdot 2 \cdot 4 E I} + \frac{l}{2 \cdot 2} \frac{q l^2 l}{12 \cdot 2 E I} + \frac{l}{4 \cdot 2} \frac{q l^3}{6 E I}$$

ومنه:

$$w_{\max}$$

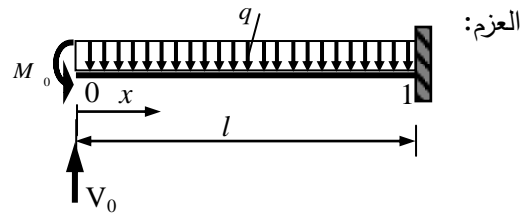
$$w_{\max} = w_{l/2} = \frac{q l^4}{384 E I}$$

بالتالي:

$$w_{\max} = w_{l/2} = \frac{q l^4}{384 E I}$$

طريقة مور - غرين

تقرير الجملة كما في الشكل (8g) وكتابة معادلة العزم:



شكل (8g): الجملة المقررة والمجايل

$$M = V_0 x - M_0 - q \frac{x^2}{2} \quad \text{معادلة العزم:}$$

ينتج عن التأثير المستقل لكل حد من حدود هذه

المعادلة للعزم الخط المرن ومخطط العزم المخفض على

الجانز، كما يتبين ذلك في الشكل (8h):

لذلك سوف يكون ميل المماس النهائي  $\varphi_0$ ، والمقدار

$t_{0/1}$  للتأثير المتراكب هما:

$$\varphi_0 = \varphi_0(V_0) + \varphi_0(M_0) + \varphi_0(q)$$

$$t_{0/1} = t_{0/1}(V_0) + t_{0/1}(M_0) + t_{0/1}(q)$$

إن استخدام العلاقتين (5) و (6) عند الأخذ في

الحسبان

هكذا سيكون:

$$w_{1/2} = w_{\max} = \varphi_0(V_0) \frac{l}{2} - t_{1/2/0}(V_0) + \varphi_0(M_0) \frac{l}{2} - t_{1/2/0}(M_0) + \varphi_0(q) \frac{l}{2} - t_{1/2/0}(q)$$

بالتالي:

$$\frac{q l^3}{4 E I} \frac{l}{2} - \frac{q l^4}{96 E I} - \left( \frac{q l^3}{12 E I} \frac{l}{2} - \frac{q l^4}{96 E I} \right)$$

$$- \left( \frac{q l^3}{6 E I} \frac{l}{2} - \frac{q l^4}{384 E I} \right) = \frac{q l^4}{384 E I}$$

لذلك، نجد باستخدام المعادلة (5) أن:

$$\varphi_{1/2} = \varphi_a - \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} \right) dx =$$

$$\frac{ql^3}{24EI} - \frac{1}{EI} \left[ \frac{qlx^2}{4}x - \frac{qx^3}{6} \right]_0^{l/2} = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{ql^3}{16EI} + \frac{ql^3}{48EI} = 0$$

ملاحظة: لقد كان ممكناً، أيضاً، الاكتفاء بحساب  $\varphi_a$ ، ثم اللجوء لإيجاد المطلوب تخطيطياً وفق الشكل (6).

### الحل بالمعادلتين (24) و (25)

تطبيق معادلة الانتقال (25) بين بداية ونهاية

الجائز يعطي:

شروط الاستناد:

$$x = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 ; w_0 = \delta_0 = 0$$

$$x = l \Rightarrow \varphi_1 = 0 ; w_1 = \delta_1 = 0$$

تطبيق العلاقات لإيجاد رد الفعل والعزم:

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{1}{EI} \int_0^l \left( V_0x - M_0 - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

$$0 = V_0 \frac{l^2}{2} - M_0 l - \frac{ql^3}{6}$$

$$0 = V_0 l - 2M_0 - \frac{ql^2}{3} \quad (1)$$

حساب الانتقال الأعظمي:

$$\varphi_x = 0 \Rightarrow -\frac{ql}{4}x + \frac{ql^2}{12} + \frac{qx^2}{6} = 0$$

$$x^2 - \frac{6}{4}lx + \frac{l^2}{2} = 0$$

$$x = \frac{1.5l \pm \sqrt{\left(\frac{6}{4}\right)^2 l^2 - 4 \frac{l^2}{2}}}{2}$$

مرفوض

$$x_1 = \frac{1.5l + l\sqrt{2.25 - 2}}{2} = l$$

$$x_2 = \frac{1.5l - 0.5l}{2} = 0.5l$$

$$w_{\max} = \frac{1}{EI} \left( \frac{ql}{48} l^3 - \frac{ql^2}{96} l^2 - \frac{ql^4}{128} \right)$$

### الحل بالمعادلتين (19) و (20) المتوافقتين مع

#### معادلتين برس (13) و (14):

نلاحظ أن هاتين المعادلتين مرتبطتان بالعبار

$$\int_{x_0}^x \frac{M_x}{EI} dx$$

التي تمثل مساحة مخطط العزم المخفض

ضمن المجال المدروس.

لذلك، نحسب أولاً هذا المقدار للمجال الممثل

لطول الجائز المقرر، فنجد أن:

$$\frac{1}{EI} \int_0^l \left( V_0x - M_0 - q \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{V_0x^2}{2} - M_0x - \frac{qx^3}{6} \right]_0^l$$

$$= \frac{V_0l^2}{2EI} - \frac{M_0l}{EI} - \frac{ql^3}{6EI}$$

تطبيق المعادلة (19) على المجال لطول الجائز يعطي،

بعد الأخذ في الحسبان لشكل مخطط العزم على الجائز،

وبعد مركز ثقل هذا المخطط عن المسند  $b$ ، ومطابقة

الدوران والانتقال للطرف الحر للجائز المقرر مع حالة

الجائز غير المقرر، أن:

$$0 - \varphi_0 = - \left( \frac{V_0l^2}{2EI} - \frac{M_0l}{EI} - \frac{ql^3}{6EI} \right) \Rightarrow$$

$$\varphi_0 = \left( \frac{V_0l^2}{2EI} - \frac{M_0l}{EI} - \frac{ql^3}{6EI} \right) = 0$$

تعويض ذلك في المعادلة (6) يقود إلى:

$$0 - w_0 = + \left( \frac{V_0l^2}{2EI} - \frac{M_0l}{EI} - \frac{ql^3}{6EI} \right) (l - 0) - \frac{l}{3} \frac{V_0l^2}{2EI}$$

$$+ \frac{l}{2} \frac{M_0l}{EI} + \frac{l}{4} \frac{ql^3}{6EI} = 0$$

إصلاح العلاقات السابقتين يعطي:

$$\delta_1 = \delta_0 + l \cdot 0 + \int_0^l \frac{1}{EI} \left( V_0x - M_0 - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

$$0 = V_0 \frac{l^3}{3} - M_0 \frac{l^2}{2} - \frac{ql^4}{8}$$

$$0 = V_0 l - 1.5M_0 - \frac{3ql^2}{8} \quad (2)$$

<p>بالتالي:</p> $w_{\max} = \frac{qL^4}{384 EI}$ <p>هكذا يمكن الحصول على مخطط العزم والقص للجائز بالتعويض المباشر في معادلة العزم المعطاة ومشتق هذه المعادلة.</p>	<p>حل المعادلتين (1) و (2) يعطي:</p> $0.5 M_0 - \frac{ql^2}{24} = 0 \Rightarrow M_0 = \frac{ql^2}{12}$ $V_0 = \frac{ql}{3} + \frac{2ql}{12} = \frac{ql}{2}$ <p>باستخدام المعادلتين (24) و (25) مرة ثانية نستنتج أن:</p> $EI \varphi_x = - \int_0^x \left( \frac{ql}{2} x - \frac{ql^2}{12} - \frac{qx^2}{2} \right) dx$ $EI \varphi_x = - \frac{ql}{4} x^2 + \frac{ql^2}{12} x + \frac{qx^3}{6}$ $EI \delta_x = \int_0^x \left( \frac{ql}{2} x - \frac{ql^2}{12} - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$ $EI \delta_x = \frac{ql}{6} x^3 - \frac{ql^2}{24} x^2 - \frac{qx^4}{8}$
---	---

### النتائج والمناقشة:

لقد تبين لنا من خلال منهجية التحليل التي اعتمدها للتعريف ببارامترات الخط المرن والتطبيقات العملية لنتائجها على بعض نماذج الجيزان المدروسة أعلاه في البند السابق، أن العمل الأكاديمي التحليلي أو التطبيقي بموجب ذلك أشمل مضموناً وأبسط تداولاً، خاصة وأن هذه المنهجية متمتعة بالعديد من الإيجابيات، وأهمها:

1- تشمل ضمناً في مراحلها المتتالية محتويات جميع الطرق السابقة المعروضة أعلاه. إذ يمكن استخدام مراحلها الأولية في الحل التخطيطي لإيجاد قيم التعريف للخط المرن في نقاط مميزة منه بما يتوافق وطريقة مور أو غرين، بينما تستخدم علاقاتها النهائية لإيجادها تحليلياً بما يتوافق ومعادلات نافيه- برس. متجاوزة هذه الطرق بإمكانية استخدام المعادلتين (24) و (25) للتعريف الدقيق بالخط المرن وتعيين القيم الأعظمية ضمن المجال المدروس.

2- تؤدي إلى الحل المطلوب بشكل أكثر يسراً وسهولة من استخدام المعادلات التفاضلية للخط المرن للجيزان متعددة المجالات.

3- تتجاوز جميع السليبات المذكورة سابقاً والتي يمكن أن ترافق استخدام الجائز البديل أو طريقة مور- غرين، إذ تعتمد بعد إيجاد معادلات العزم والصلابة في المجالات المختلفة على إجراء تكاملات بسيطة على هذه المعادلات للمسألة المطروحة.

4- أخذ تأثير أي انتقال أو دوران حاصل في مساند الجائز، دون الحاجة لاستخدام مبدأ تنضيد الآثار، كما الحال عليه عند اعتماد الجائز البديل في الحل، أو طريقة مور- غرين التخطيطية.

5- تمكنا معادلاتها النهائية من حل الجيزان غير المقررة ببسر، إذا ما قورنت باستخدام الطرق الأخرى المعروضة أعلاه كطرق للحل.

**الاستنتاجات والتوصيات:****الاستنتاجات:**

1. يتبين من خلال مقارنة نتائج منهجية التحليل التي اعتمدها مع المنهجيات المتشعبة المنسوبة بنتائجها لمنشئ كل منها، أن بلوغنا المطلوب قد اقتصر على مفاهيم أبسط مما هو معتمد في بعض المنهجيات الأخرى.
2. إن هذا التعبير الجامع يبلور للمحلل الإنشائي الاختيار المباشر لطريقة التحليل المناسبة للجملة المدروسة.
3. إن بلوغ المطلوب في حل هذه الجيزان يمكن أن يتم بشكل أيسر عموماً باستخدام المعادلات المذكورة وأخص منها المعادلتين (24) و (25)، وغالباً، بعمليات حسابية أقصر وأقل تعقيداً من استخدام بعض الطرق الأخرى المتداولة المذكورة.
4. يمكن وضع مخطط نهجي واضح لمراحلها المختلفة لأي حالة من حالات الجيزان وبرمجتها بيسر باللغة المتوافرة لدى المحلل الإنشائي وإمكانية استثمارها ضمن برنامج كلي لحل الجيزان بالطرق المعروفة واعتماد المنهجية نفسها بالحل اليدوي بشكل واضح دون صعوبات تذكر، إذا ما قورنت بطرق الحل الأخرى.
5. تتميز بديناميكية سريعة في حساب العزوم والقص والانتقالات والدورانات في نقاط الجائز المختلفة عند تحرك الحمولة الحية على هذا الجائز من مجال إلى آخر.

**التوصيات:**

إشارة لما تقدم، وبرغم المزايا الجامعة المذكورة أعلاه للطريقة المعروضة بصياغتها المبسطة، وشموليتها في مضامينها لمفاهيم الحل بالطرق الأخرى كنتاج لمسعى النهج العلمي المستقل، فإننا نأمل أن يقدم هذا المنتج غنى إضافياً للعمل الأكاديمي، ويمهد السبل للاستمرار في تطوير طرق ووسائل مساعدة في حل مسائل الجيزان المختلفة، وتوسيع إمكانيات الحساب لهذه الجيزان من قبل المحلل الإنشائي وفقاً للمعرفة المتوافرة لديه وبالطريقة التي يرغبها في الحل، خاصةً، وأن سهولة هذا الحل يمكن أن يتباين بين هذه الطريقة أو تلك بحسب نوع الجملة المدروسة وحمولاتها ومجالاتها.

**المراجع:**

- 1- COURBON, J. – *Resistance de materiaux*, Dunod- Paris, 1971
- 2- DREYER, G. – *Festigkeitslehre und Elastizitätslehre*, Fachbuchv. GMBH- Leipzig 1952
- 3- HIBBELER, R. – *Structural Analysis*, 6. Edition: Printice/Hall International, Inc. 2006
- 4- HIRSCHFELD, K. – *Baustatik*. 3. Aufl. Bd. I u . II, Berlin, Newyork -Tokyo: Spinger Verlag 1984
- 5- MOHR , O. – *Abhandlungen aus dem gebiet der technischen Mechanik*, 3. Aufl. , Berlin : W. Ernst u. sohn 1928
- 6- POPOV, E. – *Mechanics of materials*, 2. Edition: Printice/Hall International, Inc. 1978
- 7- صقور، أكرم – ميكانيك المواد: الجزء الثاني – جامعة تشرين 2011 (SAKKOUR, A. – *Mechanics of materials*, vol 2: Tishreen University 2011)