

استخدام شبكة ديناميكية لحل معادلات نافيه ستوكس حول بدن السفينة بطريقة العناصر المنتهية

الدكتور سائر صليبه*

الدكتورة نسرين محمد**

(تاريخ الإيداع 3 / 1 / 2017. قُبِلَ للنشر في 3 / 19 / 2017)

□ ملخص □

في المسائل العملية لميكانيك السوائل نادراً ما يكون المجال الذي يحيط بالمائع ثابتاً. حيث أن حدود المجال الذي يحوي المائع يمكن أن تكون متحركة كتابع للزمن، الدراسات التي تعالج هذا النوع من المسائل يمكن تصنيفها تحت مسمى مسائل المجالات المتغيرة غير المستقرة مع الزمن التي تصنف بدورها إلى:

1- مسائل السطح الحر: في هذا النوع من المسائل تمثل حدود المجال جزءاً كبيراً من الصعوبات في إيجاد حل رياضي ونذكر منها مسائل الهيدروليك المرتبطة بتدفق الأنهار وأمواج السطح الحر.

2- مسائل الأجسام المتحركة ضمن الموائع: في هذا النوع من المسائل يتم ربط علم ميكانيك الموائع مع إحدى الظواهر الفيزيائية نذكر على سبيل المثال: دراسة التداخل بين المائع وبدن السفينة المتحرك أو الجريان متعدد الأطوار. معظم المسائل المتعلقة بإبحار السفن تتبع التصنيفين السابقين حيث تتطلب الدراسة الرقمية:

1-الأخذ بالاعتبار لجريان مائع باستخدام شبكة ديناميكية

2- السطح الحر

3- التوازن الديناميكي لبدن السفينة

يعد حل معادلات الجريان اللزج ممثلة بمعادلات نافيه ستوكس باستخدام شبكة ديناميكية من أهم المشاكل

المرتبطة بالنمذجة الرقمية للظواهر الفيزيائية غير المستقرة في علم هيدروديناميك السفن لذلك غالباً ما يتم إهمال السطح الحر أو اعتماد مبدأ انعكاس الجريان للتخلص من ديناميكية الشبكة. ولكن عند الأخذ بعين الاعتبار لديناميكية الحركة للسفينة كالدرفلة الطولية والعرضية فإن اعتماد مبدأ انعكاس الجريان لا يعطي نتائجاً موثوقة. يمثل هذا البحث مساهمة فعالة في حل معادلات نافيه ستوكس حول بدن السفينة باستخدام طريقة العناصر المنتهية وبعتماد شبكة ديناميكية متحركة مع إظهار الحدود الرياضية التي تضيفها هذه الشبكة على معادلات الجريان. تم التحقق من صحة المعادلات المقترحة بتطبيق شبكة ديناميكية على إبحار سفينة في قناة.

الكلمات المفتاحية: معادلات نافيه ستوكس - طريقة العناصر المنتهية - الشبكة الديناميكية - بدن السفينة.

* أستاذ مساعد - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

** مدرس - قسم الهندسة البحرية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية

Using of dynamic mesh in solving Navier Stokes equations for vessel by finite elements method

Dr. Sayr Saliba*
Dr. Nisrine Mohamad**

(Received 3 / 1 / 2017. Accepted 19 / 3 / 2017)

□ ABSTRACT □

In practical problems of fluid mechanics, the area containing the fluid is rarely fixed. Indeed the contour delimiting the fluid can be deformed over time, studies that trait this kind of problems can be appointed to as evolutionary problems areas. These problems can basically be classified to:

1. Free surfaces problems: in this type of problems the determination of the location of moving contour is a part of the problem, and the flow is called open channel flow.
2. Problems with moving interfaces: in this type of problems the classical fluid mechanics is coupled with other physical phenomena.

Most of the problems related to sailing ships are considered as a part of evolutionary problems for which the solution by using numerical methods requires the following considerations:

- Taking into account a fluid flow over dynamic mesh
- Free surface
- Dynamic equilibrium of the vessel.

The solution of Navier-Stokes equations by using dynamic mesh is one of the most important problems associated with numerical modeling of unsteady physical phenomena in ships Hydrodynamic. Therefore, the free surface is neglected or we adopt the principle of flow reflection (ship is fixed) in order to avoid the dynamic mesh but that will not give accurate results when ship dynamic is taken into account. Thus, this research can be considered as an effective contribution in solving the Navier-Stokes equations by using the finite elements method on dynamic mesh. The proposed mathematical model in this paper shows the new terms that are added to the flow equations by using the dynamic mesh. An application related to ship motion in a channel is presented.

Key Words: Navier-Stokes equations – Finite Elements Method – Dynamic mesh – Vessel.

* Associate Professor at Marine Engineering Department Mechanical & Electrical Engineering Faculty, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Assistant Professor at Marine Engineering Department, Faculty of Mechanical & Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة

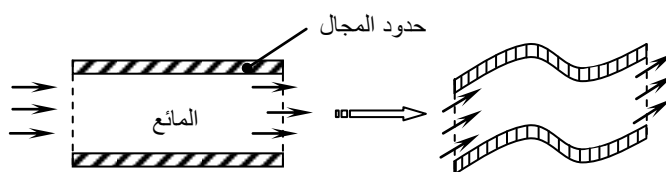
يُعتبر حل المسائل العملية لجريان الموائع بطريقة العناصر المنتهية محور اهتمام الباحثين منذ عدة سنوات وبشكل خاص جريان الموائع غير القابلة للانضغاط. حيث أثبتت طريقة العناصر المنتهية فعاليتها في حل المسائل المعقدة في المجالات الهندسية المختلفة وذلك بسبب قدرتها على الأخذ بالاعتبار لأشكال هندسية معقدة ولشروط حدية مختلفة. يمكن القول إن نمذجة جريان الموائع بطريقة العناصر المنتهية بدأت في السبعينيات من القرن الماضي نذكر من الباحثين الأوائل الذين اهتموا بهذا المجال:

▪ تايلور و هود [1] (Taylor and Hood)

▪ كوشيه [2] (Cochet)

▪ هوبيرت [3] (Hubert)

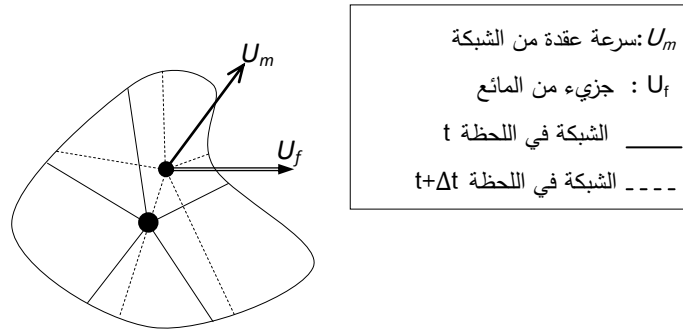
من بين الطرق المستخدمة في نمذجة المسائل ثنائية البعد للجريانات استخدام متحولين افتراضيين للضغط والسرعة حيث تكمن أهمية هذه الطريقة بإمكانية تطويرها بسهولة باتجاه موديل ثلاثي البعد. حيث تم استخدام هذه الطريقة منذ عام 1970م ومع ذلك فإن معظم طرق النمذجة الحديثة لجريان الموائع المستخدمة في وقتنا الحالي تعتمد عليها سواء أكانت في حالة دراسة جريان السطح الحر أو الجريان ضمن الأنابيب. من جهة أخرى إن معظم الطرق التي تستخدم متحولات افتراضية عند حل معادلات نافيه ستوكس هي من النوع المختلط حيث تكون مركبات السرعة والضغط متحولات (مجاهيل المسألة). ولكن اختيار نفس التابع التقريبي عند إجراء التقريب العقدي لحقل السرعة والضغط يولد حقل ضغط وسرعة متذبذب وبالتالي فإن عملية اختيار المتحولات الافتراضية تعد من الصعوبات التي تواجه الباحثين في هذا النوع من المسائل. لمعالجة هذه المشكلة يمكن استخدام طريقة رقمية مطورة تسمى الطريقة المختلطة من نوع Galerkin حيث يتم استخدام حقل سرعة غني بالقيم العقدية مقارنة مع حقل الضغط. هناك أيضاً طريقة المعايير [4] حيث تعتمد هذه الطريقة على إدخال متحول الضغط مقسوماً على معامل يسمى معامل المعايير في معادلة انحفاظ التدفق (معادلة الاستمرار) وتعويض علاقة بارامتر الضغط في معادلات نافيه ستوكس يتم استبعاده وبالتالي فإن المعادلات الناتجة تحتوي فقط على مركبات السرعة. وبما أن جملة المعادلات الجبرية الناتجة ستكون غير خطية فإن الحل الرقمي يتطلب طريقة تكرارية كطريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson) المستخدمة في هذا البحث. وبالتالي يتركز هدف البحث بتطوير طريقة رقمية لحل معادلات الجريانات الصفحية لموائع غير قابلة للانضغاط حول بدن السفينة باستخدام شبكة ديناميكية. لذلك لا بد من تقديم شرح مفصل عن مفهوم الشبكة الديناميكية. في العديد من مسائل ميكانيك الموائع تكون الإحداثيات المكانية لحدود المجال التي تمثل نقاط التماس مع السائل تابعة للزمن وبالتالي يتطلب هذا النوع من المسائل القدرة على الأخذ بالاعتبار لحركة وتغير شكل حدود المجال حيث كان هذا محورياً للعديد من الأبحاث الحديثة وبشكل خاص المسائل المرتبطة بالتداخلات الناجمة بين المائع والهيكلمتحرك (Fluid-Structure Interaction) [5] ومسائل السطح الحر.



الشكل (1) مثال عن جريان مائع مع حدود مجال متحركة كتابع للزمن

يعتبر مجال تطبيق المسائل التي تكون فيها حدود المجال متحركة (كما في الشكل (1)) واسعاً جداً. نذكر على سبيل المثال الأبحاث التالية التي اعتمدت على توصيف أويلر-لاغرانش عند دراسة التداخلات الناجمة بين المائع والهيكـل:- في مجال الأيرونوتيك أبحاث فرحات (Farhat) [6] وليفغانسوا [7] (Lefrancois) - في مجال الهندسة الطبية وجريان الدم في الأوعية الدموية أبحاث زانغ [8] (Zhang) - في مجال الهندسة المدنية أبحاث كاجوموتو [9] (Kageomoto) - في مجال العمليات الصناعية لتشكيل المعادن والجريانات متعددة الأطوار [14] - في مجال الهيدروليك النهري والمسائل المتعلقة بنمذجة السطح الحر نذكر الأبحاث التالية: Ramaswam و [10] Kawahara وأبحاث [11] Souli و [12] Soulaimani و [13] Braess.

من المعلوم أنه في ميكانيك الموائع يتم عادة استخدام توصيفين عند بناء الموديل الرياضي للجريانات. توصيف أويلر وتوصيف لاغرانش ولكل من هذين التوصيفين حدود لمجال الاستخدام. حيث يأخذ توصيف أويلر بالاعتبار التشوهات الكبيرة التي يتعرض لها المائع أثناء حركته ولكن عند الأخذ بالاعتبار لحدود المجال المتحركة كتابع للزمن فإن الموديل الرياضي وفقاً لتوصيف أويلر يعد الأكثر تعقيداً وهذا ما يؤدي في غالب الأحيان إلى نتائج خاطئة. فيما يتعلق بتوصيف لاغرانش فإنه يسمح بمعالجة المسائل التي تكون فيها حدود المجال متحركة ولكن ضمن إطار محدود جداً أي في مجالات الحركة الصغيرة نسبياً. يمكن القول أنه في مجال المسائل المتعلقة بجريان السطح الحر أو مسائل حدود المجال المتحركة من الضروري استعمال توصيف يسمح للشبكة الرقمية بتتبع حركة حدود المجال دون حدوث تشوه في شكل العناصر المنتهية المستخدمة وهذا يتم من خلال ما يسمى "وصف أويلر لاغرانش العشوائي (ALE)" الذي تم تطويره لمعالجة مسائل الجريانات غير القابلة للانضغاط [15] وتم استخدامه في العديد من الأبحاث الحديثة [16]. حيث أنه في هذا النوع من الوصف تتحرك عقد العناصر المنتهية بشكل مستقل عن المائع كما في الشكل (2) من هنا يأتي مفهوم الشبكة الديناميكية الذي يرتبط مباشرة بوصف أويلر لاغرانش العشوائي.



الشكل (2) عقدة من الشبكة في حالة حركة عشوائية

تم تطبيق مفهوم الشبكة الديناميكية في العديد من الأبحاث في مجال الأيرونوتيك نذكر منها [6] و [17] و [18]. كما ذكرنا سابقاً تتحرك عقد الشبكة في توصيف ALE بشكل عشوائي وبالتالي يعتبر اختيار السرعة التي يجب أن تتحرك بها هذه العقد أحد أهم المشاكل لهذا النوع من توصيف الجريان. في مسائل الجريانات المعرّفة ضمن مجال هندسي بسيط يمكن استنتاج سرعة عقد المجال من سرعة حدود المجال المتحركة وتم استخدام هذه الطريقة عند دراسة النمذجة الرقمية للأمواج العالية [15]. في الحالة العامة يمكن اعتبار الشبكة كمسألة مستقلة مع موديل خاص بها يرتبط

بحلقة مع الموديل الفيزيائي لجريان المائع ويتم استنتاج حقل السرعة لعقد الشبكة بحل جملة من المعادلات التفاضلية التي توصف حركة الشبكة الديناميكية. تم اعتماد هذه الطريقة من قبل [6] Batina و [17] Farhat حيث تم اعتبار كل ضلع من أضلاع العنصر المنتهي المستخدم في الشبكة نابض له ثابت صلابة خاص به وبالتالي فإن إعادة ضبط الشبكة الديناميكية في اللحظة الزمنية التالية يعتمد على حل معادلات التوازن المطبقة على كل نابض. من الطرق المستخدمة أيضاً لضبط الشبكة الديناميكية اعتبار شبكة العناصر المنتهية جسم لدن قابل للتشوه يخضع للمعادلات التفاضلية الخطية للدونة [11]. لقد تم استخدام الشبكة الديناميكية من قبل العديد من الباحثين في المسائل التي تكون فيها حدود المجال متحركة ولكن قليل جداً من الأبحاث استخدمت مفهوم الشبكة الديناميكية عند حل مسائل الجريانات غير القابلة للانضغاط وبشكل خاص المسائل المتعلقة بالهيدروليك البحري والنهري. لذلك يعد هذا البحث مساهمة بتطبيقات رقمية لاستخدام الشبكة الديناميكية لمعالجة مسائل الجريان حول بدن السفينة.

يتألف البحث من أربعة مقاطع بعد المقدمة التي تتناول الأبحاث التي تعالج جريان الموائع القابلة وغير القابلة للانضغاط على شبكات ديناميكية. تم في المقطع الأول شرح الموديل الرياضي الذي يوصف المعادلات التفاضلية لجريان مائع لزج والذي يعتبر التعبير الرياضي القوي بلغة العناصر المنتهية على مجال غير مستقر ثم تم استنتاج التعبير الرياضي الضعيف لهذه المعادلات تمهيداً لحلها بطريقة العناصر المنتهية. أما المقطع الثاني فقد تم تكريسه للنمذجة بطريقة العناصر المنتهية حيث تم اختيار نموذج Galerkin وعنصر منتهي بأربع عقد Q4 أما من حيث التقريب الرقمي للحد غير المستقر فقد تم اختيار تقريب أولر الضمني. في المقطع الثالث عرض ألوغوريتم حل جملة المعادلات الجبرية غير الخطية باستخدام طريقة Newton-Raphson. أما المقطع الرابع فقد خصص للتطبيقات الرقمية حيث في البداية تم عرض نتائج الحسابات الرقمية على شبكة ستاتيكية مستقرة بهدف التأكد من صحة البرنامج المستخدم ومن ثم تم إجراء الحسابات على شبكة ديناميكية ويختم البحث بملخص ومجموعة من التوصيات.

أهمية البحث وأهدافه:

تكمن أهمية البحث في معالجته لإحدى المسائل المهمة المتعلقة بالمشاكل التي تواجه الباحثين عند استخدام النمذجة الرقمية في مجال حل معادلات الجريان حول بدن السفينة وهي مسألة بناء شبكة ديناميكية تأخذ بالاعتبار حركة السفينة عند استخدام طريقة العناصر المنتهية. فعند حل معادلات الجريان حول البدن غالباً ما يلجأ الباحثون إلى استخدام مبدأ انعكاس الجريان لتجنب استخدام الشبكة الديناميكية نظراً لعدم توفر الأبحاث الكافية التي تشرح كيفية ارتباط الشبكة الديناميكية بالموديل الرياضي للحل ونتيجة لذلك غالباً ما يتم إهمال تأثير السطح عند دراسة ديناميكية السفينة أو بالعكس. لذلك فإن هذا البحث يمثل مساهمة فعالة في توسيع مجال استخدام طريقة العناصر المنتهية لتشمل حل معادلات الجريان حول بدن السفينة مع الأخذ بالاعتبار لديناميكية السفينة الموافقة لحدود مجال غير مستقرة دون اللجوء لمبدأ انعكاس الجريان والقيود التي يفرضها.

طرائق البحث ومواده:

تم تحليل الموديل الرياضي الذي يوصف معادلات الجريان لمائع لزج حول بدن السفينة ومن ثم تم إدخال مفهوم الشبكة الديناميكية في هذا الموديل بسرعة عقد مختلفة عن سرعة الجريان عند عقد الشبكة وبالتالي تم بناء المعادلات التفاضلية التي تمثل التعبير الرياضي القوي بلغة العناصر المنتهية على مجال غير مستقر ومن ثم تم استنتاج التعبير

الرياضي الضعيف لهذه المعادلات تمهيداً لحلها بطريقة العناصر المنتهية. حيث تم اختيار نموذج Galerkin وعنصر منتهي بأربع عقد Q4 حيث تم اختيار تقريب أولير الضمني للحد غير المستقر (التابع للزمن) ومن ثم تم استنتاج جملة المعادلات الجبرية وكتابتها بشكل مصفوفي بوجود متحولي الضغط والسرعة. بعد ذلك تم تطوير ألوغريتم لحل جملة المعادلات الجبرية غير الخطية باستخدام طريقة Newton- Raphson. وتمت معايرة نتائج الموديل الرياضي المقترح باستخدام شبكة ستاتيكية مستقرة بهدف التأكد من منطقية النتائج وصحة الشروط الحدية. ومن ثم تم إجراء حسابات على شبكة ديناميكية موافقة لتقدم سفينة في وسط مائي مع أخذ إجهادات القص المرتبطة بلزوجة المائع بالاعتبار وتمثيل وتحليل حقلي الضغط والسرعة الموافقين.

الموديل الرياضي لجريان لموائع غير القابلة للانضغاط:

يُعطى قانون مصونية الكتلة بالعلاقة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} \rho \cdot dV + \oint_{\partial V(t)} \rho \cdot (\vec{U} - \vec{U}_m) dV = 0 \quad (1)$$

بتطبيق نظرية التفرق (نظرية أوستراغرادسكي) نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot J(t)) + J(t) \cdot \text{Div}_{\vec{x}} (\rho \cdot (\vec{U} - \vec{U}_m)) = 0 \quad (2)$$

حيث أن:

$\vec{X}(\hat{x}, \hat{y})$: جملة إحداثيات مرتبطة بالمجال المدروس.

\vec{U} : سرعة الجريان في لحظة زمنية معينة t عند نقطة معينة.

\vec{U}_m : سرعة حجم المراقبة عند نقطة معينة من سطح اعتباطي لا على التعيين.

$$[J] = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \hat{x}_r}$$

\vec{U}_m وبسرعة $V(t)$ ويحيط به

يعطى قانون انحفاظ شعاع كمية الحركة لسائل داخل حجم مراقبة متحرك

السطح $S(t) = \partial V(t)$ بالعلاقة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} (\rho \vec{U}(\hat{x}, t)) dv + \oint_{\partial V(t)} \overline{\overline{Q}}_f (\vec{U} - \vec{U}_m) \cdot \vec{n} \cdot dS + \oint_{\partial V(t)} \overline{\overline{Q}}_s \vec{n} \cdot dS + \int_{V(t)} \overline{\overline{Q}}_v dV = 0 \quad (3)$$

حيث أن:

ρ : الكتلة الحجمية للمائع

\vec{U} : سرعة المائع

\vec{U}_m : سرعة حدود المجال الذي يحيط بالمائع

$\overline{\overline{Q}}_f$: مصفوفة التدفقات الخارجية

$\overline{\overline{Q}}_s$: مصفوفة التدفقات الانتشارية

$\overline{\overline{Q}}_v$: مصدر ماص للتدفق في الجملة

بتطبيق نظرية التفوق (Ostragradsky) على المعادلة السابقة نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}(t)} \left(\rho \vec{U}(\hat{x}, t) \right) dV + \int_{\hat{V}(t)} \text{Div}_{\hat{x}} (\vec{Q}_f (\vec{U} - \vec{U}_m)) dV + \int_{\hat{V}(t)} \text{Div}_{\hat{x}} (\vec{Q}_s) dV + \int_{\hat{V}(t)} \vec{Q}_v dV = 0 \quad (4)$$

يعطى الشكل التفاضلي للمعادلة السابقة كمايلي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \vec{U}(\hat{x}, t) \right) + \text{Div}_{\hat{x}} (\vec{Q}_f (\vec{U} - \vec{U}_m) + \vec{Q}_s) + \vec{Q}_v = \vec{0} \quad (5)$$

حيث أن:

$$\vec{Q}_f = \rho \vec{U} \otimes (\vec{U} - \vec{U}_m) \quad (6)$$

الحد \vec{Q}_v يتألف من مجموع القوى الحجمية الخارجية بوحدة الحجم

$$\vec{Q}_v = \rho \cdot \vec{f}_e \quad (7)$$

\vec{Q}_s : يمثل القوى السطحية التي تعتمد على طبيعة الجريان والعلاقة بين الإجهادات الداخلية (إجهادات القص

والضغط)

$$\vec{Q}_s = -\hat{P} \cdot \vec{I} + \vec{\hat{\tau}} \quad (8)$$

حيث أن \vec{I} : مصفوفة واحدة $\hat{P} \cdot \vec{I}$: مصفوفة الضغط (الإجهادات الناعمة) $\vec{\hat{\tau}}$: مصفوفة إجهادات اللزوجة

تصبح معادلة انحفاظ كمية الحركة على الشكل التالي:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}(t)} \left(\rho \vec{U}(\hat{x}, t) \right) dV + \int_{\hat{V}(t)} \text{Div}_{\hat{x}} (\rho \vec{U} \otimes (\vec{U} - \vec{U}_m) + \hat{P} \cdot \vec{I} - \vec{\hat{\tau}}) dV - \int_{\hat{V}(t)} \rho \cdot \vec{f}_e dV = 0 \quad (9)$$

بفرض المائع نيوتوني وبالتالي تكون العلاقة بين الإجهاد والانفعال علاقة خطية [19]:

$$\vec{\hat{\tau}} = \lambda \cdot \text{Div}_{\hat{x}} (\vec{U} \cdot \vec{I}) + 2 \cdot \mu \cdot \vec{\hat{\epsilon}} \quad (10)$$

حيث أن مركبات مصفوفة التشوهات الزاوية تعطى كمايلي:

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}_i} \right] \quad (11)$$

تمثل μ اللزوجة الديناميكية و $\lambda = -\frac{2}{3} \cdot \mu$

نسقط المعادلة (9) على مجال مرجعي ثابت V^r ينطبق على المجال $V(t)$ في اللحظة $t=0$ حيث:

$$\frac{\partial J}{\partial t} \neq 0 \quad J(t=0)=1 \quad \text{ولكن } \vec{\hat{x}} = \vec{\hat{x}}(\vec{x}_r, t), \quad d\vec{\hat{x}} = [J(t)] \cdot d\vec{x}_r \quad [J] = \frac{\partial \vec{\hat{x}}}{\partial \vec{x}_r} \quad J = \det[J]$$

ونبدل المتحولات كمايلي: $\int_{\hat{V}(t)} (\dots) dv = \int_{V^r} (\dots) J(t) dV^r$

بالتالي تصبح معادلة انحفاظ كمية الحركة (9) كمايلي:

$$\int_{V^r} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(J(t) \cdot \rho \vec{U} \right) \right]_{\hat{x}} + J(t) \cdot \text{Div}_{\hat{x}} (\rho \vec{U} \otimes (\vec{U} - \vec{U}_m) + \hat{P} \cdot \vec{I} - \vec{\hat{\tau}}) - J(t) \cdot \rho \cdot \vec{f}_e \cdot dV^r = 0 \quad (12)$$

الشكل التفاضلي للمعادلة السابقة:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(J(t) \cdot \rho \cdot \vec{U} \right) \Big|_{\hat{x}} + J(t) \cdot \text{Div}_{\hat{x}} (\rho \cdot \vec{U} \otimes (\vec{U} - \vec{U}_m) + \hat{P} \cdot \vec{I} - \vec{\tau}) - J(t) \cdot \rho \cdot \vec{f}_e = \vec{0} \quad (13)$$

لمعالجة شرط عدم الانضغاط نستخدم تقريب خاص بطريقة العناصر المنتهية بهدف إلى ترجيح معادلة

الاستمرار

التعبير الترجيحي:

تسمح هذه الصيغة الرياضية بتحويل مسألة ذات شروط مقيدة (شرط عدم الانضغاط) إلى مسألة حرة من القيود

[20]

بداية نكتب معادلة الاستمرار على الشكل التالي بعد إضافة الحد $\frac{\hat{P}}{\lambda}$ الذي يمثل مقدار صغير جداً لأن عامل

الترجيح $10^8 > \lambda > 10^6$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot J(t)) + J(t) \cdot \text{Div}_{\hat{x}} (\rho \cdot (\vec{U} - \vec{U}_m)) + J(t) \cdot \frac{\hat{P}}{\lambda} = 0 \quad (14)$$

تمثل معادلة ان حفظ الكتلة مع معادلة الاستمرار جملة معادلات نافيه ستوكس التي تعطي بوجود سرعة

لحدود المجال الذي يحوي المائع كمايلي:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(J(t) \cdot \rho \cdot \vec{U} \right) \Big|_{\hat{x}} + J(t) \cdot \text{Div}_{\hat{x}} (\rho \cdot \vec{U} \otimes (\vec{U} - \vec{U}_m) + \hat{P} \cdot \vec{I} - \vec{\tau}) - J(t) \cdot \rho \cdot \vec{f}_e = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot J(t)) + J(t) \cdot \text{Div}_{\hat{x}} (\rho \cdot (\vec{U} - \vec{U}_m)) + J(t) \cdot \frac{\hat{P}}{\lambda} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

بمقارنة معادلات نافيه ستوكس التقليدية مع معادلات نافيه ستوكس الموافقة لحدود مجال متحركة نلاحظ أن

الشبكة الديناميكية قد أضافت الحد التالي $-\nabla(\rho U; U_m)$ إلى معادلة انحفاظ كمية الحركة والحد $-\nabla(\rho U_m)$ إلى معادلة الاستمرار.

الموديل الرقمي باستخدام العناصر المنتهية

لاستخدام طريقة العناصر المنتهية نبدأ بإضعاف جملة المعادلات (15) باستخدام طريقة الرواسب الترجيحية

حيث نضرب جملة المعادلات بتابع تجريبي ونكامل على طول المجال فنحصل على العلاقة التالية:

$$W_{N-S} = \int_{V^r} \delta \vec{U} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot \vec{U}) + J(t) \cdot \text{Div}_x (\rho \cdot \vec{U} \otimes (\vec{U} - \vec{U}_m) + P \cdot \vec{I} - \vec{\tau}) - J(t) \cdot \rho \cdot \vec{f}_e \right] dV^r = 0 \quad (16)$$

$$W_{inc} = - \int_{V^r} \delta P \cdot \left[J \cdot \text{Div} (\rho \cdot \vec{U}) + J \cdot \frac{P}{\lambda} \right] dV^r = 0 \quad (17)$$

حيث: $\delta \vec{U}$: تابع تجريبي للسرع δP : تابع تجريبي للضغط

إسقاط المعادلتين (16) و (17) على إحداثيات جملة محاور ديكارتية من أجل جريان ثنائي البعد يعطي مايلي:

$$\begin{aligned}
 W_{N-S} = & \int_{V^r} \delta u \cdot \frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot u) dV^r + \int_{V^r} \delta u \cdot [(\rho \cdot u \cdot u)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v)_{,y}] JdV^r + \int_{V^r} \delta u \cdot P_{,x} \cdot JdV^r \\
 & + \int_{V^r} \delta u \cdot [2\mu \cdot u_{,xx} + \mu \cdot (u_{,y} + v_{,x})_{,y}] JdV^r - \int_{V^r} \delta u \cdot (\rho \cdot f_{ex}) \cdot JdV^r - \int_{V^r} \delta u \cdot [(\rho \cdot u \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v_m)_{,y}] JdV^r \\
 & + \int_{V^r} \delta v \cdot \frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot v) dV^r + \int_{V^r} \delta v \cdot [(\rho \cdot u \cdot v)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v)_{,y}] JdV^r + \int_{V^r} \delta v \cdot P_{,y} \cdot JdV^r \\
 & + \int_{V^r} \delta v \cdot [2\mu \cdot v_{,yy} + \mu \cdot (u_{,y} + v_{,x})_{,x}] JdV^r - \int_{V^r} \delta v \cdot (\rho \cdot f_{ey}) \cdot JdV^r - \int_{V^r} \delta v \cdot [(\rho \cdot v \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v_m)_{,y}] JdV^r
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$W_{mc} = - \int_{V^r} \delta P (u_{,x} + v_{,y}) JdV^r + \int_{V^r} \delta P \cdot \frac{P}{\lambda} JdV^r = 0 \tag{19}$$

نستخدم التكامل بالتجزئة لإدخال الشروط الحدية وتخفيض درجة الاشتقاق:

$$\begin{aligned}
 W_{N-S} = & \int_{V^r} \delta u \cdot \frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot u) dV^r + \int_{V^r} \delta u \cdot [(\rho \cdot u \cdot u)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v)_{,y}] JdV^r \\
 & - \int_{V^r} \delta u_{,x} \cdot P \cdot JdV^r + \int_{V^r} \delta u_{,x} \cdot (2\mu \cdot u_{,x}) \cdot JdV^r + \int_{V^r} \delta u_{,y} \cdot [\mu \cdot (u_{,y} + v_{,x})] JdV^r \\
 & - \int_{V^r} \delta u \cdot (\rho \cdot f_{ex}) \cdot JdV^r - \int_{V^r} \delta u \cdot [(\rho \cdot u \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v_m)_{,y}] JdV^r + \oint_{sf} \delta u \cdot P \cdot n_x \cdot dS \\
 & - \oint_{sf} \delta u \cdot (2\mu \cdot u_{,x}) \cdot n_x \cdot dS - \oint_{sf} \delta u \cdot (u_{,y} \cdot n_y + v_{,x} \cdot n_x) \cdot dS + \int_{V^r} \delta v \cdot \frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot v) dV^r + \\
 & \int_{V^r} \delta v \cdot [(\rho \cdot u \cdot v)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v)_{,y}] JdV^r - \int_{V^r} \delta v_{,y} \cdot P \cdot JdV^r + \int_{V^r} \delta v_{,y} \cdot (2\mu \cdot v_{,y}) \cdot JdV^r + \\
 & \int_{V^r} \delta v_{,x} \cdot [\mu \cdot (u_{,y} + v_{,x})_{,x}] JdV^r - \int_{V^r} \delta v \cdot (\rho \cdot f_{ey}) \cdot JdV^r - \int_{V^r} \delta v \cdot [(\rho \cdot v \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v_m)_{,y}] JdV^r + \\
 & \oint_{sf} \delta v \cdot P \cdot n_y \cdot dS - \oint_{sf} \delta v \cdot (2\mu \cdot v_{,y}) \cdot n_y \cdot dS - \oint_{sf} \delta v \cdot (u_{,y} \cdot n_y + v_{,x} \cdot n_x) \cdot dS
 \end{aligned} \tag{20}$$

حيث أن δu و δv مركبات التابع التجريبي وفق المحاور x و y على التابع.

δP : التابع التجريبي للضغط.

الشروط الحدية:

من أجل الموائع اللزجة تكون الشروط الحدية على نوعين:

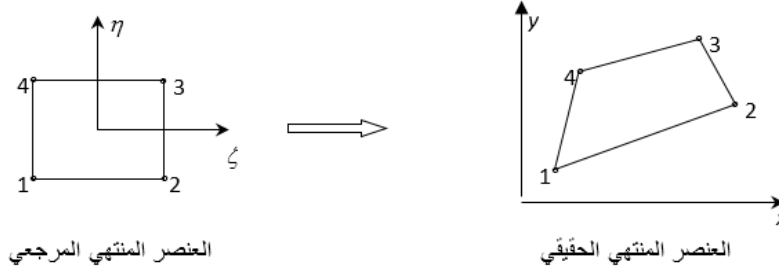
- سرعة مطبقة على السطح S_u تمثل شرط Dirichlet: $U = \bar{U}$
 - إجهادات مطبقة على السطح S_f تمثل شرط Neumann $\bar{f} = \bar{\tau} \cdot \bar{n}$
- حيث أن \bar{n} الناظم على السطح S

بعد أخذ الشروط الحدية بالاعتبار تصبح المعادلات على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
 & W_{N-S} + W_{Inc} = \\
 & \int_{V^r} \delta u \cdot \frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot u) dV + \int_{V^r} \delta u \cdot [(\rho \cdot u \cdot u)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v)_{,y}] J dV - \int_{V^r} \delta u_{,x} \cdot P \cdot J dV + \int_{V^r} \delta u_{,x} \cdot (2\mu \cdot u_{,x}) J dV \\
 & + \int_{V^r} \delta u_{,y} \cdot [\mu \cdot (u_{,y} + v_{,x})] J dV - \int_{V^r} \delta u \cdot (\rho \cdot f_{ex}) J dV - \int_{V^r} \delta u \cdot [(\rho \cdot u \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v_m)_{,y}] J dV \\
 (21) \quad & + \int_{V^r} \delta v \cdot \frac{\partial}{\partial t} (J(t) \cdot \rho \cdot v) dV + \int_{V^r} \delta v \cdot [(\rho \cdot u \cdot v)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v)_{,y}] J dV - \int_{V^r} \delta v_{,y} \cdot P \cdot J dV + \int_{V^r} \delta v_{,y} \cdot (2\mu \cdot v_{,y}) J dV \\
 & + \int_{V^r} \delta v_{,x} \cdot [\mu \cdot (u_{,y} + v_{,x})_{,x}] J dV - \int_{V^r} \delta v \cdot (\rho \cdot f_{ey}) J dV - \int_{V^r} \delta v \cdot [(\rho \cdot v \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v_m)_{,y}] J dV \\
 & - \int_{V^r} \delta P \cdot (u_{,x} + v_{,y}) J dV - \int_{V^r} \delta P \cdot \frac{P}{\lambda} dV - \int_{V^r} \delta P \cdot (u_{m,x} + v_{m,y}) J dV - \int_{V^r} \delta P \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot J(t)) dV = 0
 \end{aligned}$$

باختيار شكل العنصر المحدود من نوع Q_4 واعتماد مفهوم العنصر المرجعي لتبسيط الحل كما هو مبين في

الشكل (3)



الشكل (3) العنصر المنتهي

نجد أن تقريب كافة المتحولات على هذا العنصر المرجعي يؤدي إلى جملة معادلات جبرية تمثل الشكل الرياضي النهائي المطلوب حله. يعطى تقريب حقل السرعة والتابع التجريبي الموافق على العنصر المرجعي Q_4 كما يلي:

$$\vec{U}(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) \cdot \{u_i\} \quad (22)$$

$$\delta \vec{U}(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\zeta, \eta) \cdot \{\delta u_i\}$$

$$-1 \leq \zeta \leq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1$$

حيث أن $N_i(\zeta, \eta)$ توابع التقريب (توابع الشكل) وتعطى بالعلاقة التالية:

$$i=1,4 \quad N_i(\zeta, \eta) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \zeta_i \zeta) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot \{u_i\} \quad (23)$$

حيث أن:

$$\left. \begin{matrix} \zeta = \pm 1 \\ \eta = -1 \end{matrix} \right\} \text{for: } i=1,2 \quad \left. \begin{matrix} \zeta = \mp 1 \\ \eta = +1 \end{matrix} \right\} \text{for: } i=3,4$$

فيما يتعلق بتقريب بارامتر الضغط نستخدم تقريب عقدي علماً أن العقد متوضعة داخل العنصر المحدود.

$$\delta P = \delta P^e \text{ و } P(\zeta, \eta) = P^e$$

حيث أن:

P^e : الضغط على مستوى العنصر بدرجة حرية واحدة.

δP^e : التابع التجريبي للضغط على مستوى العنصر.

معالجة الحد غير المستقر

من الطرق المختلفة الموجودة في المراجع العلمية للتقريب الرقمي للحد غير المستقر تم اختيار طريقة أويلر الضمنية [21]. تهدف هذه الطريقة لكتابة جملة المعادلات (21) في اللحظة الزمنية $(t+\Delta t)$ باستخدام التعبير الرياضي الموافق للتقريب الرقمي باستخدام طريقة الفروق المنتهية أي باستخدام منشور تايلور - يونغ كمايلي:

$$\{\dot{U}_{t+\Delta t}\} \approx \frac{1}{\Delta t} \cdot (\{U_{t+\Delta}\} - \{U_t\}) \quad (24)$$

التعبير الرياضي الجبري

يمكن كتابة جملة المعادلات (21) على شكل مصفوفات كمايلي:

$$\langle \delta U_i^e \rangle, P^e \rangle \left\{ \begin{bmatrix} [M^e] & \{0\} \\ \langle 0 \rangle & 0 \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{matrix} \{U^e\} \\ \{\dot{P}^e\} \end{matrix} \right\} + \left[\begin{matrix} [C_{uu}^e] - [C_{uum}^e] + [D_{u}^e] & -\{K_{up}^e\} \\ \langle K_{up}^e \rangle & \frac{V^e}{\lambda} \end{matrix} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \{U_i^e\} \\ \{P^e\} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \{f_i^e\} \\ 0 \end{matrix} \right\} \right\} = 0 \quad (25)$$

$[M^e]$, $[C^e]$, $[D^e]$: مصفوفات عنصرية تعطى كمايلي:

حساب المصفوفة $[M^e]$

يتم حساب مصفوفة الكتلة $[M^e]$ بحل التكامل التالي:

$$I_M = \int_{V^e} \left(\delta U_j \frac{\partial U_j}{\partial t} \right) dV = \int_{Q_4} \left(\delta U_j \frac{\partial U_j}{\partial t} \right) \det(J) d\zeta d\eta \quad \text{for } j=1,2 \quad (26)$$

باستخدام التقريب الرقمي للسرع وللتابع التجريبي للسرع بإجراء التكامل الرقمي على نقاط غوص الأربعة فإن المصفوفة العنصرية $[M^e]$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$[M^e] = \sum_{IPG=1}^4 [N^{Q_4}]^T [N^{Q_4}] VCPG(IPG) \det(J) \quad (27)$$

حيث أن $[J]$: مصفوفة جاكوبيان لتغيير المتحول

IPG : العدد الكلي لنقاط غوص

$VCPG(IPG)$: إحداثيات نقاط غوص وفقاً للعنصر المرجعي.

حساب المصفوفة $[C^e]$

بنفس الطريقة نحصل على المصفوفة $[C^e]$ من حل التكامل التالي بعد أخذ التقريبات العقدية بعين الاعتبار:

$$I_C = \int_{V^e} \left(\delta U_j U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) dV = \int_{V^e} \left(\delta U_j U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \det(J) d\zeta d\eta \quad j, i = 1, 2$$

$$i=1,2 \quad j=1,4 \quad [C_{uu}^e] = \sum_{IPG=1}^4 \left([N_u^{Q_4}]^T \cdot [N_u^{Q_4}] \cdot \{U_i^e\} \cdot [N_{u,j}] \cdot VCPG(IPG) \cdot \det(J) \right) \quad (28)$$

حساب المصفوفة العنصرية $[D^e]$

نحصل على هذه المصفوفة بحل التكامل التالي:

$$I_D = \int_{V^e} \langle \delta u_{,x} \quad \delta v_{,y} \quad \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \rangle \cdot [H] \cdot \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} dV \quad (29)$$

وبالتالي:

$$I_D = \langle \delta U^e \rangle \left(\int_{Q_4} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \det(J) d\zeta d\eta \right) \{U^e\} \quad (30)$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad [B] = [N_{,\zeta}^{Q_4}] \cdot [J]^{-1}$$

حيث أن:

وبالتالي فإن المصفوفة $[D^e]$ تعطى بالعلاقة التالية:

$$[D^e] = \sum_{IPG}^4 \left([B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot VCPG(IPG) \cdot \det(J) \right) \quad (31)$$

أما فيما يتعلق بمصفوفة الترجيح $[PE^e]$ فتعطى بالعلاقة التالية:

$$[PE^e] = \frac{\lambda}{V^e} \{K_{up}^e\} \langle K_{up}^e \rangle$$

حيث أن λ : عامل الترجيح

V^e : حجم العنصر المنتهي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$V^e = \int_{V^e} dV^e = \int_{Q_4} \det(j) d\zeta d\eta = \sum_{IPG=1}^4 (VCPG(IPG) \det(j)) \quad (32)$$

K_{up}^e : مصفوفة الارتباط سرعة-ضغط

يتم الحصول على مصفوفة الارتباط سرعة-ضغط كمايلي:

$$I_{up} = \int_{V^e} \delta U_{,j} P dV = \langle \delta U^e \rangle \cdot \left(\int_{V^e} \{N_{,j}^{Q_4}\} \det(J) P^e d\zeta d\eta \right) \quad (33)$$

التكامل الرقمي يعطي:

$$\langle K_{up}^e \rangle = \sum_{IPG}^4 \left(\langle N_{u,j}^{Q_4} \rangle \cdot VCPG(IPG) \det(J) \right) \quad (34)$$

حساب شعاع التحريض العنصري:

شعاع التحريض العنصري أو ما يسمى بشعاع القوى يعطى بصيغة تكاملية على الشكل التالي:

$$\{f^e\} = \int_{V^e} \{N_u^{Q_4}\} \cdot f^e \cdot dV = \int_{Q_4} \{N_u^{Q_4}\} \cdot f^e \cdot \det(J) d\zeta d\eta \quad (35)$$

والتكامل يعطي العلاقة التالية:

$$\{f^e\} = \sum_{IPG}^4 \left(\{N_u^{Q_4}\} \cdot VCPG(IPG) \cdot f^e \cdot \det(J) \right) \quad (36)$$

الضغط العنصري: تم اعتماد درجة حرية واحدة للضغط على كل عنصر محدود P^e .

من معادلة انحفاظ الكتلة نستنتج العلاقة التالية التي تسمح باستبعاد الضغط ومن ثم إعادة حسابه بعد حساب

حقل السرعة كمايلي:

$$P^e = -\frac{\lambda}{V^e} \cdot \langle K_{up}^e \rangle \cdot \{U^e\} \quad (37)$$

وبالتالي فإن التعبير المصفوفي في العلاقة (25) يكتب على الشكل التالي:

$$\langle \delta U^e \rangle = \left([M^e] \{ \dot{U}^e \} + \left([C_{uu}^e] - [C_{uum}^e] + [D_u^e] + [PE^e] \right) \{ U^e \} - \{ f_e^e \} \right) \quad (38)$$

الشكل النهائي لجملة المعادلات الناتجة يتضمن درجة حرية واحدة للسرعة الأمر الذي يؤدي إلى اختصار كبير

في زمن الحسابات وتقارب أسرع للحل.

ملاحظات:

- أضافت ديناميكية الشبكة المصفوفة $[C_{uum}^e]$ إلى جملة المصفوفات المعتمدة عند الحل بشبكة ثابتة.
- يتم فرض حقل الضغط على جزء من حدود المجال وهذا الأمر يتطلب عناصر منتهية أحادية البعد بعقدتين حيث أن التقريب الرقمي لحقل الضغط يبقى ثابتاً على هذه العناصر.
- الضغط غير مستمر من عنصر لآخر على اعتبار أن تقييمه يتم على مستوى كل عنصر وبالتالي لاستخراج حقل الضغط عند العقد لا بد من اللجوء إلى تقنية التنعيم التي تستند إلى طريقة Least Squares Method يعطي تجميع كل الصيغ المصفوفية العنصرية المعادلة التالية التي يمكن حلها من تقييم حقل السرعة في الجريان:

$$[M] \{ \dot{U} \} + [K_u] \{ U \} = \{ F \} \quad (39)$$

يجب أن يساوي تغير حجم (مساحة) العناصر المنتهية بين اللحظتين t^n و t^{n+1} الحجم (المساحة) التي يتم

تكنيسها من قبل محيط المجال خلال الزمن $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ هذا يوافق المعادلة التالية:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{V}(t)} dV = \oint_{\partial \hat{V}(t)} \vec{U}_m \cdot \vec{n} \cdot ds \quad (40)$$

حيث أن V يمثل حجم المراقبة وبالمكاملة على حجم لاعلى التعيين وتطبيق نظرية التفرق (Ostragradsky)

يتم الحصول على العلاقة التالية:

$$\frac{\Delta \hat{V}}{\Delta t} = \int_{\hat{V}(t)} \nabla \cdot \vec{U}_m \cdot dV \quad (41)$$

بما أن المائع غير قابل للانضغاط ومع الأخذ بالاعتبار لمعادلة انحفاظ الشكل الهندسي يمكن كتابة معادلة

الاستمرار على الشكل التالي:

$$Div_x \vec{U} + \frac{\hat{P}}{\lambda} = 0 \quad (42)$$

الغوريتم الحل: بعد التقريب الرقمي بطريقة العناصر المنتهية يتم توضيح خطوات الحل الرقمي في كل خطوة

زمنية للمعادلة (39) بعد استخدام منشور تايلور بالطريقة الضمنية. بسبب وجود الحد غير الخطي في جملة هذه

المعادلات لا بد من استخدام طريقة تكرارية عوضاً عن الحل المباشر والطريقة التي تم اختيارها في هذا البحث

هي طريقة نيوتن-رافسون لحل المعادلة التالية:

$$([M_{t+\Delta t}] + \Delta t \cdot [K(U)_{t+\Delta t}]) \cdot \{U_{t+\Delta t}\} - \Delta t \cdot [M_t] \cdot \{U_t\} - \Delta t \cdot \{F_{t+\Delta t}\} = \{R(U_{t+\Delta t})\} = 0 \quad (43)$$

حيث أن: $\{R\}$ الراسب بفرض أنه في الخطوة التكرارية رقم (i-1) حصلنا على الحل التقريبي $\{U^{i-1}\}$ بحيث أن قيمة الراسب لم تتعدم أي أن $\{R(U^{i-1})\} \neq 0$ في الخطوة التكرارية رقم (i) نبحث عن الحل التقريبي $\{U^i\}$ بحيث أن $\{R(U^i)\} = \{R(U^{i-1} + \Delta U)\} \approx 0$ ويكتابة سلسلة تايلور بجوار U^{i-1} نحصل على العلاقة التالية:

$$\{R(U^{i-1} + \Delta U^i)\} = \{R(U^{i-1})\} + \left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U^{i-1}} \cdot \{\Delta U^i\} + \dots = 0 \quad (44)$$

وبإهمال الحدود من مرتبة الاشتقاق أعلى من (1):

$$-\left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U^{i-1}} \cdot \{\Delta U^i\} = \{R(U^{i-1})\} \quad (45)$$

تكتب المعادلة (45) على الشكل التالي:

$$[K_t(U_{i-1})] \{\Delta U_i\} = \{R(U_{i-1})\} \quad (46)$$

حيث أن $[K_t] = -\left[\frac{\partial R}{\partial U} \right]_{U^{i-1}}$ والمعادلة (46) تعطي قيمة $\{\Delta U^i\}$ ومنه نستنتج $\{U^i\}$ كما يلي:

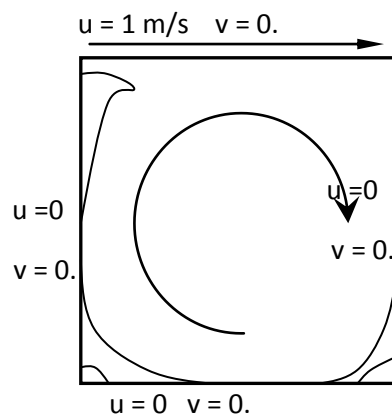
$$\{U^i\} = \{U^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \quad (47)$$

ألغوريتم الحل بطريقة العناصر المنتهية لمسألة الجريان تم تمثيله في المخطط التالي:

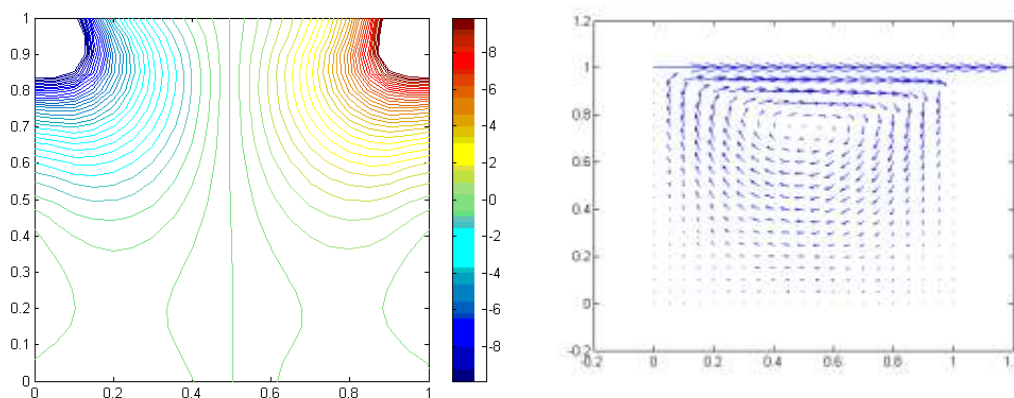


النتائج والمناقشة:

للتحقق من صحة معادلات الجريان بوجود شبكة ديناميكية تم إجراء تجربة معايرة معتمدة في علم النمذجة الرقمية لجريان السوائل وهي تجربة الـ *CAVITY* حيث تعتمد على حل معادلات جريان مائع لزج ضمن تجويف مستطيل الشكل ويتم توليد الجريان بتحريك السطح العلوي للتجويف حركة أفقية مستقيمة بسرعة $u=1\text{m/s}$ حيث تكون سرعة المائع على باقي المحيط معدومة (شرط الالتصاق) انظر الشكل (3). تم إجراء الحسابات الرقمية على شبكة متجانسة مؤلفة من 30×30 عنصراً تبدأ الحل الابتدائي في اللحظة $t=0$ بحقل سرع معدوم على كامل المجال بعدها تجري الحسابات بطريقة تكرارية حتى يتقارب الحل وفق الشرط التالي: $\|n\| = \frac{\|\Delta U^i\|}{\|U^{i-1}\|} \leq 10^{-9}$. ويوضح الشكل (3) الشروط الحدية في تجربة الـ *CAVITY* أما حقل السرع فيتم تمثيله على الشكل (4) حيث تم ملاحظة توافق حقل السرع مع حقل الجريان لهذه التجربة أما حقل الضغط فتتم تمثيله على الشكل (5).



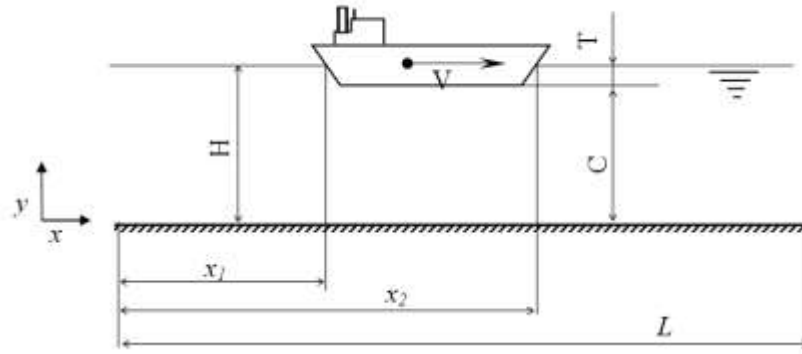
الشكل (3) الشروط الحدية في تجربة *Cavity*



الشكل (4) حقل السرع الشكل (5) حقل الضغط

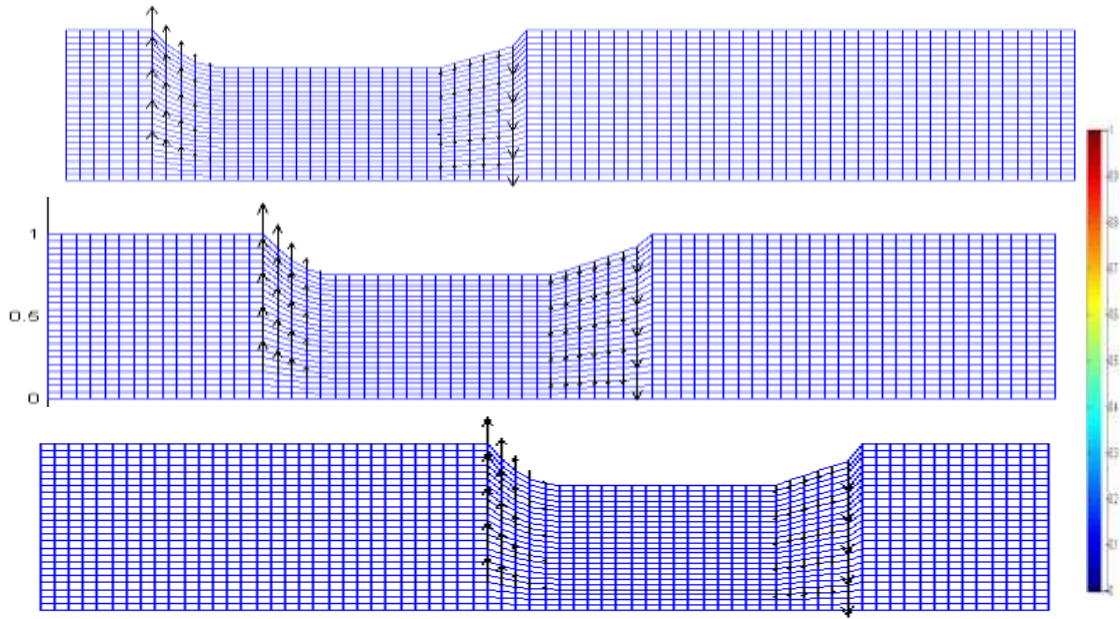
تطبيق على الشبكة الديناميكية

يهدف هذا التطبيق إلى حل معادلات نافيه ستوكس على شبكة ديناميكية لسفينة تبحر بسرعة V ضمن قناة ثنائية البعد الشكل (6).

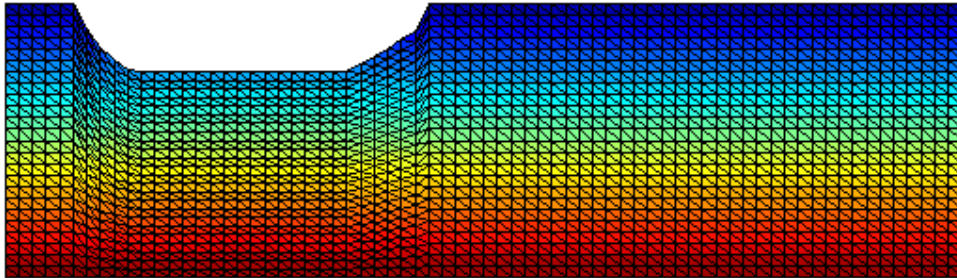


الشكل (6) نموذج لسفينة تبحر ضمن قناة

تتقدم السفينة ضمن شبكة ديناميكية مؤلفة من 90×20 عنصراً كما هو مبين في الشكل (7) بسرعة $V=1. m/s$



الشكل (7) ديناميكية الشبكة الحسابية للمجال نتيجة تقدم السفينة



الشكل (8) حقل الضغط الهيدروستاتيكي من أجل سفينة واقفة في مياه ساكنة

بفرض أن المائع في حالة سكون في اللحظة $t=0$ وتحت تأثير قوى الجاذبية يتم تمثيل الضغط الهيدروستاتيكي في الشكل (8) حيث نلاحظ ازدياد الضغط باتجاه القاع تحت تأثير الحد $\rho g z$.

تم إجراء الحسابات بخطوة زمنية تساوي $\Delta t = 0.1$ s ويتم إعادة توليد الشبكة بعد كل خطوة زمنية لضمان ديناميكية الشبكة. في هذا التطبيق تم إعادة ضبط الإحداثيات المكانية الجديدة للشبكة بطريقة التقريب الخطي (Linear Interpolation).

الشروط الحدية التي تم أخذها بعين الاعتبار وتتم مناقشتها في حالتين:

الحالة الأولى

في هذه الحالة يتم إهمال قوى الجاذبية وفرض الشروط الحدية التالية:

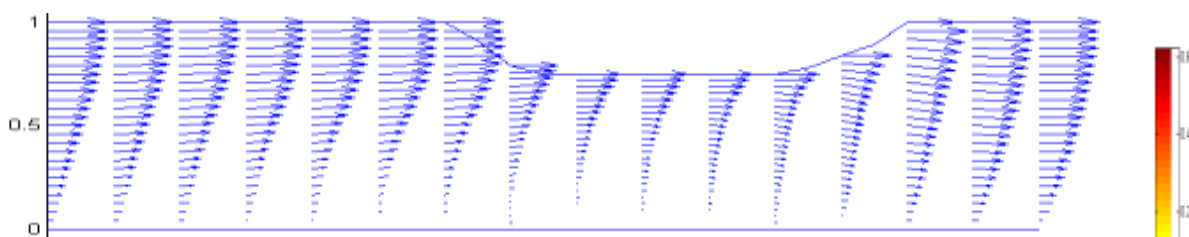
$$\text{➤ } V=0 \text{ من أجل } 0. \leq y \leq H \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

➤ شرط حر لبارامترات الجريان عند المخرج

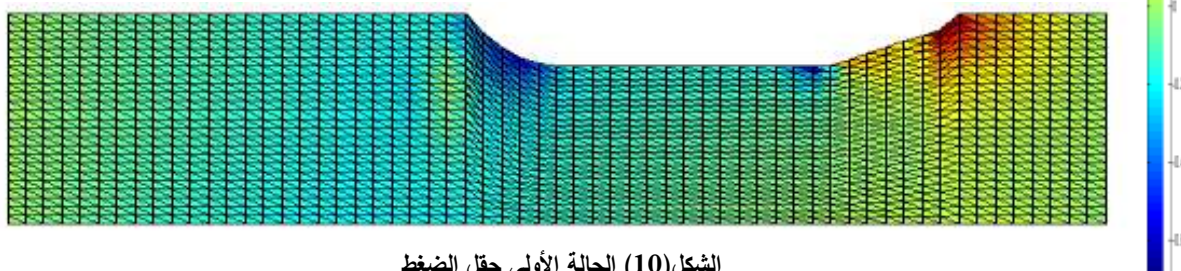
$$\text{➤ } u = v \text{ على السطح الذي على تماس مع السفينة أي من أجل } x_1 \leq x \leq x_2$$

➤ شرط الالتصاق في القاع

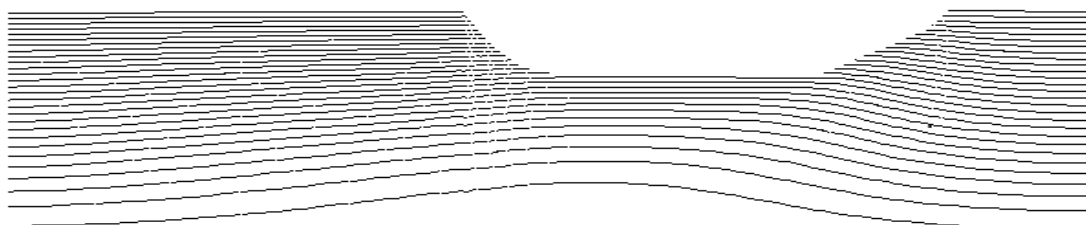
تحاكي هذه الشروط الحدية حالة تقدم جسم ضمن مائع. حيث أنه تحت تأثير لزوجة المائع يتولد حقل سرعة كما هو مبين في الشكل (9). أما في الشكل (10) فنلاحظ ارتفاعاً للضغط في المقدمة وهبوطاً في المنتصف عند تماس السائل مع السفينة بسبب تسارع جزيئات المائع وفقاً لنظرية برنولي كذلك نمثل خطوط التيار في الشكل (11).



الشكل (9) الحالة الأولى حقل السرعة



الشكل (10) الحالة الأولى حقل الضغط



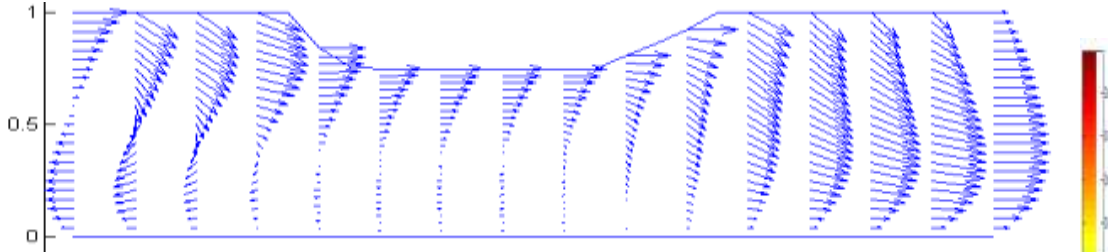
الشكل (11) الحالة الأولى خطوط التيار

الحالة الثانية

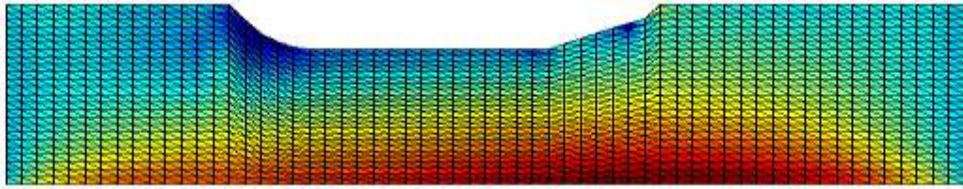
$$\text{➤ } v = 0 \text{ من أجل } 0. \leq y \leq H$$

➤ في القاع شرط الالتصاق (عدم الانزلاق)

➤ على السطح الحر الذي هو على تماس مع بدن السفينة $u = V(ship)$ من أجل $x_1 \leq x \leq x_2$ يتم تمثيل حقل السرعة في الشكل (9) ويبيّن الشكل (10) تأثير حقل الضغط الهيدروستاتيكي على بروفيل السرعة وكذلك تأثير تقدم السفينة في الشكل (10).



الشكل (9) حقل السرعة الموافق لتقدم السفينة في شبكة ديناميكية



الشكل (10) حقل الضغط الموافق لتقدم السفينة في شبكة ديناميكية

في الأشكال السابقة الموافقة لحقول الضغط والسرعة عند تقدم سفينة بسرعة معينة في شبكة ديناميكية حيث يتم إعادة ضبط الشبكة بعد كل خطوة زمنية تعطي صحيحة في موديل ثنائي البعد الأمر الذي يؤكد فعالية الموديل الرياضي المقترح وبتعبير آخر يؤكد دقة الحدود التي تمت إضافتها إلى معادلات الجريان لتجنب استخدام مبدأ انعكاس الجريان.

الاستنتاجات والتوصيات:

في هذا البحث تم تطوير موديل رياضي لحل مسائل جريان المائع اللزج باستخدام الشبكة الديناميكية بطريقة العناصر المنتهية الأمر الذي يجتنب الباحثين اللجوء إلى مبدأ انعكاس الجريان. حيث أن هذا المبدأ غير قابل للتطبيق في العديد من الحالات التي توافق حقل أمواج مضطرب حول بدن السفينة. استخدام الشبكة الديناميكية يفرض إدخال سرعة العناصر المنتهية في المعادلات الرياضية التي تحكم التعبير الرياضي الضعيف لجريان الموائع اللزجة ممثلة بالتكاملات التالية:

$$-\int_{V^f} \delta u [(\rho \cdot u \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot u \cdot v_m)_{,y}] JdV - \int_{V^f} \delta v [(\rho \cdot v \cdot u_m)_{,x} + (\rho \cdot v \cdot v_m)_{,y}] JdV - \int_{V^f} \delta P (u_{m,x} + v_{m,y}) JdV$$

تم التحقق من صحة المعادلات الناتجة في حالتين: حالة شبكة ستاتيكية موافقة لتجربة الـ Cavity و حالة شبكة ديناميكية موافقة لتقدم سفينة بسرعة معينة في قناة نتائج الحساب الرقمي بطريقة العناصر المنتهية تؤكد فعالية الموديل الرياضي المقترح. من جهة أخرى تجدر الإشارة إلى أن زمن تقارب الحل كبيراً نسبياً نظراً لضرورة تنعيم الشبكة للحصول على نتائج منطقية من جهة وعدم إمكانية استخدام آلية الحساب على التوازي في المعالجات المتوفرة حالياً من

جهة أخرى لذلك تم الاكتفاء بعرض النتائج في موديلات ثنائية البعد التي تمثل بدورها مرجعاً للمعايرة معتمداً في الأبحاث الأكاديمية لجريان الموائع.

من التوصيات المقترحة في هذا البحث:

1- تطبيق فعلي للموديل الرياضي المقترح على نماذج لسفن مبحرة في قناة مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير

المخر

2- إعادة صياغة الموديل الرياضي المقترح ليشمل حالة جريان ثلاثي البعد.

3- مقارنة نتائج هذه الدراسة مع البرامج الرقمية المتوفرة عالمياً.

المراجع

- [1] TAYLOR,C.; HOOD, P.A *numerical solution of Navier-Stokes equations using FEM technique*. Computers Fluids, 1973, 73.
- [2] COCHET, J.F. *Modélisation d'écoulements stationnaires et non stationnaires par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1979.
- [3] HUBERT,G. *Modélisation d'écoulement de fluides Incompressibles par la méthode des éléments finis*. Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Technologie de Compiègne, 1984.
- [4]READY, T.N. *On Penalty function method in the finite element Analysis of flow problems*. Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 2, 1982, 151-171.
- [5] MACKERLE,E. *Fluid -Structure Interaction problems, Finite element and boundary element approaches*. Finite Element in Analysis and design, Vol. 31,1999, 231-240.
- [6] FARHAT, C. *High performance simulation of coupled nonlinear transient aeroelastic problems*. Ecole d'Été, Poquerolles (France), 1-6 Juillet 1996.
- [7]LEFRANCOIS,E.; DHATT, G.; VANDROMME, D.*Fluid-Structural Interaction with application to Rocket Engines*.Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 30, 1999, 865-895.
- [8]ZHANG,Q.;HISADA, T.*Analysis of Fluid – Structure Interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element method*.Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 190, 2001, 6341-6357.
- [9] KAGEMOTO,H.;FUJINO,M.;ZHU,T. *On the estimation method of hydrodynamic forces active on a large floating structure*. Applied Ocean Research, Vol. 19, 1997, 49-60.
- [10] RAMASWAMY,B.;KAWAHARA, M. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow*.Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 7, 1987, 1053-1075.
- [11]SOULI,M.;ZOLESIO,J. P.*Arbitrary Lagrangien- Eulerian and free surface methods in fluid mechanics*.Comput. Methods Appl. Mech. Eng, Vol. 191, 2001, 451-466.
- [12] SOULAIMANI, A.; FORTIN, M.; DHATT, G., OULLET, Y. *Finite element simulation of two and three dimensional Free surface flows*Computers Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol. 86, No. 3, pp. 265-296, 1991.
- [13] BRAESS, H.; WRIGGERS,P. *Arbitrary Lagrangian- Eulerian finite element analysis of free surface flow*.Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 190, 2000, 95-109.
- [14] GADALA,M. S.; MOVAHHEEDY, M. R.;WANG,J. *On Mesh motion for ALE modeling of metal forming processes*. Finite Element in Analysis and Design, Vol. 38,2002, 435-459.

- [15] HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; ZIMMERMAN, T.K. *Lagrangian-Eulerian finite element formulation for viscous flows*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng, Vol. 29, 1981, 329-49.
- [16] CHARLES, C.R.; FAHRENTOLD, E.P. *Discrete Lagrange equations for reacting thermo-fluid dynamics in arbitrary Lagrangian-Eulerian frames*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 313, 1 January 2017, 303-320.
- [17] BATINA, J. T. *Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes*. AIAA paper No. 89-0115, AIAA 27th Aerospace Science Meeting, Reno, Nevada, January 9-12, 1989.
- [18] LEFRANCOIS, E.; DHATT, G.; VANDROMME, D. *Fluid-Structural Interaction with application to Rocket Engines*. Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 30, 1999, 865-895.
- [19] CANDEL, S. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1990.
- [20] READY, T.N. *On Penalty function method in the finite element Analysis of flow problems*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 2, pp. 151-171, 1982.
- [21] DHATT, G.; TOUZOT, G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. Editeur Paris, 1984.