

دراسة الإطارات المستوية والفراغية وفق نظرية المرتبة الثانية باستخدام خوارزمية معدلة لطريقة العناصر المنتهية

الدكتور سليمان أبو دياب*

الدكتور نايل حسن**

نادين اسماعيل***

(تاريخ الإيداع 24 / 3 / 2013. قُبِلَ للنشر في 1 / 7 / 2013)

▽ ملخص ▽

تم في هذه الدراسة تقديم مقارنة معدلة لطريقة العناصر المنتهية- نموذج الانتقالات لنمذجة وتحليل جمل إنشائية إطارية مستوية وفراغية وفق نظرية المرتبة الثانية، بإدخال توابع التحميل لعنصر طولي محمل فراغياً إلى توابع انتقالاته وقوى مقاطعه الداخلية.

تُستخدم في هذه المقارنة المعدلة توابع انتقالات تقريبية مؤلفة من جزأين، أحدهما متجانس ويحقق المعادلة التفاضلية المتجانسة على المستوى التفاضلي للعنصر المنتهي، وآخر غير متجانس مرتبط بالحمولات الخارجية ويحقق أيضاً المعادلة التفاضلية غير المتجانسة على المستوى التفاضلي للعنصر المنتهي، وعليه فإن قيم الانتقالات وقوى المقطع تتطابق مع الحل الدقيق للمسألة المدروسة حتى عند الحل باستخدام عنصر وحيد. وقد تم تطوير كود برمجي *Samm* باستخدام الـ *MATLAB* لإنجاز التحليل وفق نظرية المرتبة الثانية باستخدام مصفوفة الصلابة الدقيقة، كما شكّلت توابع الانتقالات وقوى المقطع وحُسبت قيمها في عدد من مقاطع العنصر المدروس باستخدام هذه المقارنة المعدلة لطريقة العناصر المنتهية.

تمت دراسة إطارات بأشكال مختلفة ومحملة بحمولات موزعة بانتظام ثم مقارنة نتائج المقارنة المعدلة المقترحة مع الحلول الناتجة عن تطبيق الخوارزمية التقليدية للحساب باستخدام طريقة العناصر المنتهية للتحليل وفق نظرية المرتبة الثانية، فكانت الانتقالات وقوى المقطع المحسوبة متطابقة على امتداد العنصر حتى عند الحل باستخدام عنصر وحيد، كما قورنت نتائج المقارنة المقترحة أيضاً مع برنامج *SAP2000* فتبين أنّ دقة النتائج التي يتم الحصول عليها من برنامج *SAP2000* تتعلق بالنسبة P/Pe للعناصر من جهة (P : القوة المحورية في العنصر، Pe : حمولة التحنّب المرنة) وينقسم العنصر الواحد إلى عدد كافٍ من العناصر من جهة أخرى، للحصول على النتائج التي يتم الحصول عليها باستخدام الكود البرمجي *Samm* المقترح باستخدام عنصر وحيد.

الكلمات المفتاحية: مقارنة معدلة - طريقة العناصر المنتهية- التحليل اللاخطي للإطارات المستوية والفراغية- مصفوفة توابع الاستقرار- برنامج في بيئة الـ *Matlab*

* أستاذ مساعد - قسم الهندسة الإنشائية - كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين اللاذقية - سورية.

** أستاذ مساعد - قسم الهندسة الإنشائية - كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين اللاذقية - سورية.

*** طالبة دراسات عليا (ماجستير) - قسم الهندسة الإنشائية كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين اللاذقية - سورية.

Geometrical Nonlinear Analysis Based on 2th order theory of two and three dimensional Framed Structure Using a Modified Finite Element Method

Dr. Sulaiman Abo Diab^{*}
Dr. Nael Hasan^{**}
Nadeen Esmaeel^{***}

(Received 24 / 3 / 2013. Accepted 1 / 7 / 2013)

▽ ABSTRACT ▽

In this work, a modified finite element displacement approach is used to analyze two and three dimensional Framed Structure. The element is based on second order theory.

The modified approach use approximation displacement functions, which consist of two parts, a homogenous one fulfils the homogenous part of the governing differential equations of the problem under consideration on the differential level and a particular one fulfils the non-homogenous part related to external distributed loading.

A program code (Samm) written in Matlab is developed to perform second order analysis.

Different numerical calculation and comparison in the nonlinear analysis of framed structure are performed in order to show the affectivity of the developed element, compared with well known programs such Sap2000.

The results show that, the exact solution to simple cases of non uniform loading can be achieved using only one element of (Samm) program, where a fine mesh refinement using Sap2000 is needed in order to achieve the same results.

Keywords: modified method- finite element method –nonlinear analysis of two and three dimensional Framed Structure -second order analysis - stability function approach - program in Matlab

^{*} Associate Professor, Department of structure engineering, Faculty of Civil engineering ,Tishreen University , Lattakia, Syria.

^{**} Associate Professor, Department of structure engineering, Faculty of Civil engineering ,Tishreen University , Lattakia, Syria.

^{***} Postgraduate student, Department of structure engineering, Faculty of Civil engineering, Tishreen University , Lattakia, Syria.

مقدمة:

يلاحظ أثناء تنفيذ طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات أنه قد حدد عدد الثوابت الاختيارية في التوابع التقريبية المقترحة للانتقالات، بحيث يكون عددها مساوياً لعدد درجات الحرية لعقد العنصر المنتهي. هذا يسمح فقط بإيجاد علاقة تربط توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر بدرجات الحرية لعقد العنصر. مما يعني أنه لا توجد علاقة مباشرة على مستوى العنصر التفاضلي بين توابع الانتقالات والحمولات الخارجية المطبقة عليه، إذ تظهر علاقة الحمولات بالانتقالات فقط على مستوى المنشأة ككل في جملة المعادلات الجبرية لكامل الجملة المدروسة وذلك بشكل نقطي على عقد الجملة بدون ظهور أي تأثير لشكل توابع الحمولات ضمن العنصر نفسه على شكل توابع الانتقالات. هذا يعني أن منحنيات الانتقالات والقوى الداخلية الناتجة باستخدام هذه الطريقة هي نفسها لعنصرين أحدهما محمل بحمولة موزعة والآخر غير محمل.

اقترحت في العام (1991) مقارنة معدلة لخوارزمية طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات - بحيث يتم إدخال توابع الحمولات المؤثرة على العنصر في أساسيات اشتقاق التوابع التقريبية للانتقالات وبالتالي الاجتهادات بشكل منظم بحيث تتحقق العلاقة الدقيقة بين حمولات العنصر وتوابع الانتقالات التقريبية فيه على المستوى التفاضلي، حيث استخدمت هذه الطريقة في معالجة عنصر فراغي إيطاري ضمن نظرية المرتبة الأولى محمل بحمولات تتغير بشكل خطي على شكل شبة منحرف.

تعتمد الطريقة المعدلة على فصل التابع التقريبي للانتقالات إلى جزأين أحدهما متعلق بانتقالات العقد، وآخر متعلق بالمؤثرات الخارجية، وهذه الطريقة مشروحة بالتفصيل في المراجع [1,2,3].

استخدمت هذه المقاربة في المرجع [4] لنمذجة وإنشاء عنصر منتهي يستند إلى فرضيات فلاسوف في قتل الجيزان المرنة ذي الجدران الرقيقة والمقاطع العرضية المفتوحة، وقد طور من خلال هذا البحث كود برمجي *Thin-Walled Finite Element Method Program TWFEM* لاختبار العنصر المدروس، حيث اختبر عدد من الجوائز البسيطة المؤلفة من فتحة واحدة والمحملة بحمولات موزعة ولكن بشروط استناد مختلفة.

أهمية البحث وأهدافه:

يندرج هذا البحث ضمن إطار البحوث النظرية، الذي سيتم في إطاره اقتراح استخدام الخوارزمية المعدلة لطريقة العناصر المنتهية- نموذج الانتقالات لتشكيل توابع الانتقالات للعناصر في الإطارات المستوية والفراغية وفق نظرية المرتبة الثانية من خلال الأخذ في الحسبان لتوابع حمولات العنصر المنتهي بشكل منظم وغير عشوائي، والحصول منها على توابع قوى المقطع، وذلك بعد إنجاز تحليل الإطارات بالخوارزمية التقليدية للطريقة الدقيقة للتحليل اللاخطي وفق نظرية المرتبة الثانية، ومن ثم المقارنة مع نتائج برنامج *SAP2000* المستخدم للتحليل بموجب نظرية المرتبة الثانية.

طرائق البحث ومواده:

يعتمد البحث على تطوير كود برمجي *Samm (Second order Modified Method)* باستخدام *MATLAB* انطلاقاً من الكود البرمجي *TWFEM* المشار إليه أعلاه، وذلك لإنجاز تحليل الإطارات المستوية

والفراغية وفق نظرية المرتبة الثانية بالطريقة الدقيقة (الخوارزمية التقليدية)، واستخدام انتقالات العقد التي يتم الحصول عليها في صياغة توابع الانتقالات وقوى المقطع لكل عنصر وحسابها في مقاطع العنصر.

● تحليل الإطارات وفق نظرية المرتبة الثانية:

هناك طريقتان أساسيتان تم توظيفهما لإيجاد صيغ مصفوفات إنجاز التحليل وفق نظرية المرتبة الثانية: **الطريقة الأولى:** طريقة توابع الاستقرار، وذلك بالتحليل السكوني للوضعية المنحرفة للجملة مع كامل شروطها الطرفية (شروط التوازن والتوافق والمرونة).

الطريقة الثانية: طريقة مصفوفة الصلابة الهندسية (الطريقة التقريبية)، وهي الطريقة المستخدمة في البرامج الهندسية المتوفرة للحل وفق نظرية المرتبة الثانية *SAP2000- ETABS*.

الفرق الأساسي بين الطريقتين الأولى والثانية، أن الطريقة الثانية تعتمد على افتراض كثير حدود من الدرجة الثالثة لتابع الانتقال وتطبيق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري للحصول على مصفوفة الصلابة والقوى المركزة في العقد والمكافئة للحمولات الموزعة، وهي طريقة تقريبية، وتعطي حلاً دقيقاً لمجموعة محددة من المسائل فقط، وهذه الآلية مشروحة بالتفصيل في المرجع [6]، أما الطريقة الأولى فتعتمد بشكل مباشر على حل المعادلات التفاضلية لـ (جائز - عمود)، وتقدم حلاً دقيقاً، حتى أنه يمكن القول إن إنجاز تحليل استقرار دقيق يتطلب استخدام طريقة توابع الاستقرار.

قُدمت في المراجع [7,10,11] حلول لحالات متنوعة من (جائز - عمود)، وقد قُدمت في المرجع [10] قائمة بالمراجع التي تناولت حلاً لـ "جائز - عمود"، كما تم اشتقاق القوى المركزة في العقد والمكافئة لحمولة موزعة بالتفاصيل في المرجع [11].

طُور في المرجع [5] برنامج *ESCAP* يقوم بحساب انتقالات العقد والعزم الأعظمي والانتقال الأعظمي وفق نظرية المرتبة الثانية باستخدام طريقة توابع الاستقرار (الطريقة الدقيقة) لمسائل بسيطة جائز - عمود وعدد من الإطارات المستوية، حيث اشتقت مصفوفة توابع الاستقرار بالتحليل السكوني للوضعية المنحرفة مع كامل شروطها الطرفية، وكذلك بالنسبة للقوى المركزة في العقد والمكافئة لحمولة موزعة، ومن ثم قورنت نتائج استخدام هذا البرنامج في حل مسائل بسيطة لجائز - عمود مع الحل الدقيق المعطى في [7,9].

في هذا البحث سيتم العمل بطريقة مصفوفة الصلابة الهندسية (الطريقة التقريبية) ولكن بمكونات الطريقة الدقيقة، أي سيتم افتراض تابع انتقال تقريبي يمثل الحل الكامل للمعادلة التفاضلية (بجزائها المتجانس وغير المتجانس)، وإدخاله في علاقة الطاقة الكلية للمنشأة، إذ بعد أخذ المتغير الأول لعلاقة الطاقة واستخدام مبدأ التشويش (أخذ حالة توازن مجاورة للحالة الأساسية) يمكن الحصول على مصفوفة الصلابة الدقيقة والقوى المركزة في العقد والمكافئة للحمولات الموزعة والتي يدخل تأثير القوى المحورية في حسابها، وذلك عن طريق برمجتها بالكامل باستخدام الـ *MATLAB*.

● آلية ربط التوابع التقريبية بحمولات العنصر ودرجات الحرية [1]:

اقترحت في عام 1991 آلية لربط توابع الانتقالات التقريبية بدرجات الحرية للعنصر المنتهي إضافة لربطها مباشرةً بحمولات العنصر الموزعة، وقد اختبرت لذلك الحلول الدقيقة للمعادلة التفاضلية الحاكمة للمسألة المطروحة بجزائها المتجانس وغير المتجانس، وعرضت في مناسبات عالمية عدة [2,3].

لتجنب القارئ عناء العودة والبحث سوف نعرض هذه الآلية كما وردت في المصدر [1].

في البدء نختار توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر ككثير حدود بثوابت اختيارية عددها n ثابتاً :

$$u_i = x_i^n \cdot c_n \quad \dots\dots\dots 1$$

حيث u_i توابع الانتقالات التقريبية، x_i^n مصفوفة متعلقة فقط بالإحداثيات الديكارتيّة المحلية المستقلة، و c_n ثوابت اختيارية ليس لها في البدء أي مضمون إنشائي، إذ نعتبر عددها بدايةً لا نهائياً.

نفترض أن المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة المدروسة من الشكل:

$$\Delta^j . u_i = \bar{p}^j \quad \dots\dots\dots 2$$

حيث Δ^j مصفوفة من المعاملات التفاضلية، و \bar{p}^j توابع الحملات الخارجية الموزعة. بالتالي نستطيع أن

نكتب:

$$(\Delta^j . x_i^n) . c_n = \bar{p}^j \quad \dots\dots\dots 3$$

بفرض توزيع الحملات على العنصر بالشكل التالي:

$$\bar{p}^j = NP_r^j . \bar{p}_0^r \quad \dots\dots\dots 4$$

حيث NP_r^j توابع الشكل، وتتعلق بالمتحولات الإحداثية المستقلة.

في هذه الحالة يمكن بمطابقة حدود طرفي المعادلة 4 انتقاء حل مناسب يحدد الثوابت الاختيارية المتعلقة

بالحملات الخارجية.

التابع الناتج يجب أن يحقق متطلبات الاستمرارية، وينقسم إلى جزء متجانس وآخر غير متجانس موافقين لحل

المعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المدروسة. عندها يأخذ تابع الانتقالات التقريبية الشكل:

$$u_i = M_i^k . c_k + \bar{M}_{ij} . \bar{p}^j \quad \dots\dots\dots 5$$

حيث c_k عدد من الثوابت الاختيارية مكافئ لعدد عقد العنصر مضروباً بعدد درجات الحرية للعقدة،

\bar{M}_{ij}, M_i^k مصفوفتان تمثلان على التوالي الجزء المتجانس والجزء غير المتجانس للتوابع التقريبية ومتعلقتان

بالإحداثيات المحلية المستقلة المستخدمة.

يمكن بذلك تجميع انتقالات عقد العنصر في شعاع $u_{k(e)}$ ، عدد عناصره مساو لعدد عقد العنصر مضروباً

بعدد درجات الحرية، والحصول على هذا الشعاع من المعادلة 5 بعد تعويض إحداثيات عقد العنصر في هذه العلاقة:

$$u_{k(e)} = A_{k(e)l}^l . c_l + \bar{A}_{k(e)j} . \bar{p}^j \quad \dots\dots\dots 6$$

المصفوفتان $\bar{A}_{k(e)j}, A_{k(e)l}^l$ تنتجان عن تعويض الإحداثيات الخاصة لعقد العنصر في المصفوفتين \bar{M}_{ij}, M_i^k

والقرينة l تتحول كما تتحول القرينة k . ويمثل $u_{k(e)}$ شعاع انتقالات العقد.

بالتالي، فإن جملة المعادلات الخطية لتحديد الثوابت الاختيارية المتبقية:

$$c_k = B_k^{m(e)} . (u_{m(e)} - \bar{A}_{m(e)j} . \bar{p}^j) \quad \dots\dots\dots 7$$

نعوض الآن الثوابت الاختيارية في المعادلة 5 التي انطلقنا منها فنحصل على:

$$u_i = N_i^{m(e)} . u_{m(e)} + \bar{N}_{ij} . \bar{p}^j \quad \dots\dots\dots 8$$

مع العلم أن الجزء المتجانس وغير المتجانس على التتالي هما:

$$N_i^{m(e)} = M_i^k . B_k^{m(e)} \quad \dots\dots\dots 9$$

$$\bar{N}_{ij} = -M_i^k . B_k^{m(e)} . \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij} = -N_i^{m(e)} . \bar{A}_{m(e)j} + \bar{M}_{ij} \quad \dots\dots\dots 10$$

وبذلك نكون قد حصلنا على علاقة تربط توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر من جهة بانتقالات عقد العنصر بالإضافة إلى الحملات الخارجية الموزعة المطبقة على العنصر من جهة أخرى. يمكن الآن استخدام التوابع التقريبية للانتقالات المشتقة بهذه الطريقة في تطبيق طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات، إذ يمكن ملاحظة أن هذا التطبيق يصبح مكافئاً للتطبيق التقليدي عند انعدام الحملات الخارجية الموزعة ضمن العنصر المنتهي.

النتائج والمناقشة:

نبين فيما يلي التطبيق المباشر لهذا الأسلوب الذي قمنا به ضمن نظرية المرتبة الثانية.

• الافتراضات:

سوف تتم المعالجة وفق الافتراضات الكلاسيكية المعروفة لنظرية الإطارات، وسيتم إهمال التشوهات الناتجة عن إجهادات القص وتأثير الورد، وبافتراض أن التشوهات من (انتقالات ودورانات) صغيرة، ستكون مشتقات الانتقالات صغيرة جداً، بحيث يمكن إلباس ظل الزاوية بالزاوية نفسها التي تمثل الدوران φ_2 حول المحور X^2 والدوران φ_3 حول المحور X^3 واللذان تعطيان بالعلاقة:

$$\varphi_2 = -u_3 \quad \varphi_3 = u_2 \quad \dots \dots \dots 11$$

• معادلات التوازن في الوضعية المشوهة والمعادلات التفاضلية التي تحكم سلوك العناصر في المرتبة

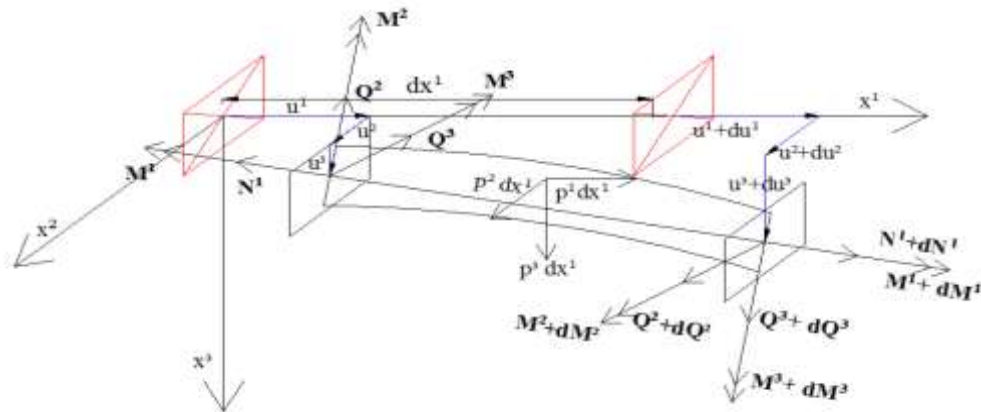
الثانية:

يوضح الشكل (1) عنصراً من إطار فراغي قبل وبعد التشوه مع مراعاة الانزياحات والتشوهات بشكل منفصل في المستويين X^1OX^2 , X^1OX^3 كنتيجة للانعطاف حول المحورين X^2 و X^3 نعرف جملة المحاور الخاصة في هذه الحالة المبينة بالشكل، وباعتبار أن N^{1*} Q^{2*} Q^{3*} M^{2*} M^{3*} قوى المقطع منسوبة إلى جملة المحاور غير المشوهة و N^1 Q^2 Q^3 M^2 M^3 قوى المقطع منسوبة إلى المحاور المشوهة، وبمراعاة فرضيات نظرية المرتبة الثانية والانتقالات والدورانات الصغيرة بشكل كاف، حيث سيكون:

$$Q^3 * \varphi_2 \ll N^1 \quad Q^2 * \varphi_3 \ll N^1 \quad \dots \dots \dots 12$$

نحصل على قوى النهايات الآتية المنسوبة إلى المحاور قبل التشوه:

$$N^{1*} = N^1 \dots (1) \quad Q^{3*} = N^1 * \varphi_2 + Q^3 \dots (2) \quad Q^{2*} = N^1 * \varphi_3 + Q^2 \dots (3) \quad \dots \dots \dots 13$$



شكل 1: عنصر من إطار فراغي قبل وبعد التشوه

ومنه:

$$Q_3^* = N^1 * \varphi_2 + \frac{dM^2}{dx^1} \quad Q_2^* = N^1 * \varphi_3 - \frac{dM^3}{dx^1} \quad \dots\dots\dots 14$$

العلاقة بين القوى الداخلية والقوى الخارجية في الفراغ (مع إسقاط الرمز * للقوى المنسوبة إلى المحاور غير

المنتشوهة):

$$\frac{dN^1}{dx^1} = -\bar{P}^1(x^1) \dots (1) \quad \frac{dM^1}{dx^1} = -\bar{m}^1(x^1) \dots (4) \quad \dots\dots\dots 15$$

$$\frac{dQ^3}{dx^1} + N^1 * \frac{d\varphi_2}{dx^1} = -\bar{P}^3(x^1) \dots (2) \quad \frac{dQ^2}{dx^1} + N^1 * \frac{d\varphi_3}{dx^1} = -\bar{P}^2(x^1) \dots (5)$$

$$\frac{d^2M^2}{(dx^1)^2} + N^1 * \frac{d\varphi_2}{dx^1} = -\bar{P}^3(x^1) \dots (3) \quad \frac{d^2M^3}{(dx^1)^2} - N^1 * \frac{d\varphi_3}{dx^1} = \bar{P}^2(x^1) \dots (6)$$

العلاقة بين التشوهات والانتقالات:

$$\varepsilon = \dot{u}_1 + \frac{1}{2}((\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2) \quad \dots\dots\dots 16$$

العلاقة بين الانتقالات والقوى الداخلية:

$$N^1 = EA\varepsilon = EA \left(\dot{u}_1 + \frac{1}{2}((\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2) \right) \dots (1)$$

$$M^3 = EI_3 \frac{d\varphi_3}{dx} = EI_3 u_2'' \dots (2) \quad M^2 = EI_2 \frac{d\varphi_2}{dx} = -EI_2 u_3'' \dots (3) \quad \dots\dots\dots 17$$

$$Q^2 = -EI_3 u_2''' + N^1 u_2' \dots (4) \quad Q^3 = -EI_2 u_3''' - N^1 u_3' \dots (5)$$

تنتج بذلك المعادلات التفاضلية لعنصر طولي من إطار فراغي محمل وبوجود قوة محورية ($N=\pm P$) في

نهايته:

$$(u_3)^{IV} \pm k_2^2 * u_3'' = \bar{P}^3(x^1): k_2 = \sqrt{\frac{|P|}{EI_2}} \dots (1) \quad (u_2)^{IV} \pm k_1^2 * u_2'' = \bar{P}^2(x^1) \quad k_1 = \sqrt{\frac{|P|}{EI_3}} \dots (2)$$

$$\left[EA \left(\dot{u}_1 + \frac{1}{2}(\dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) \right) \right]' = -\bar{P}^1(x^1) \Rightarrow EA \dot{u}_1' = -\bar{P}^1(x^1) \dots (3) \quad \dots\dots\dots 18$$

مع العلم أن رمز \pm يشير إلى القوى المحورية الضاغطة والشادة، وهي ثابتة على طول العنصر. حيث تعطى شدة القوة الموزعة على بعد x من طرف العنصر اليساري بالعلاقة:

$$\bar{P}^2(x^1) = \frac{x}{l}(\bar{P}_r^2 - \bar{P}_l^2) + \bar{P}_l^2 ; \quad \bar{P}^3(x^1) = \frac{x}{l}(\bar{P}_r^3 - \bar{P}_l^3) + \bar{P}_l^3 \quad \dots\dots\dots 19$$

• **توابع الانتقالات:**

لنبدأ أولاً بتابع الانتقالات التقريبي الممثل للانتقال المحوري باتجاه x^1 ، ولنفرض أن هذا التابع يحتوي على عدد لانتهائي من الثوابت الاختيارية، وممثل بكثير حدود من الدرجة الثالثة بتطبيق المعادلة التفاضلية (3) من العلاقة 18 على كثير الحدود، ومطابقة النتيجة مع المعادلة التي تمثل تابع الحمل، يصبح التابع التقريبي للانتقال باتجاه المحور x^1 :

$$u_1(x^1) = c_0 + c_1 \cdot x^1 - \frac{(x^1)^2}{2EA} \cdot P_L - \frac{(x^1)^3}{6EA} \cdot (P_R - P_L) \quad \dots\dots\dots 20$$

يتألف هذا التابع من جزأين: متجانس متعلق بالثوابت الاختيارية وغير متجانس متعلق بالحمل، الذي ينعلم في التحليل ضمن نظرية المرتبة الثانية لكون القوة المحورية ثابتة على طول العنصر.

أما بالنسبة لتابع الانتقال التقريبي بالاتجاهين الثاني والثالث، فإننا سنستخدم حل المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة المحددة بالمعادلتين (1)، (2) من العلاقة 18 كتابع للانتقال التقريبي بالاتجاه الثاني $u_2(x_1)$ وبالاتجاه الثالث $u_3(x_1)$

حالة القوى الناعمة الضاغطة:

سندرس بدايةً عندما حالة كون القوة الناعمة ضاغطة، حيث تكون حلول المعادلات التفاضلية على النحو

الآتي:

$$u_2(x^1) = c_1 + c_2 x^1 - c_3 \cos(k_1 x^1) / k_1^2 - c_4 \sin(k_1 x^1) / k_1^2 + \bar{P}_R^2 \frac{x^3}{6k_1^2 EI_3 L} + \bar{P}_L^2 \left(\frac{x^{12}}{2k_1^2 EI_3} - \frac{x^{13}}{6k_1^2 EI_3 L} \right) \quad \dots\dots 21$$

$$u_3(x_1) = c_1 + c_2 x^1 - c_3 \cos(k_2 x^1) / k_2^2 - c_4 \sin(k_2 x^1) / k_2^2 + \bar{P}_R^3 \frac{x^{13}}{6k_2^2 EI_2 L} + \bar{P}_L^3 \left(\frac{x^{12}}{2k_2^2 EI_2} - \frac{x^{13}}{6k_2^2 EI_2 L} \right)$$

إذ يمكن التعبير عن ذلك مصفوفياً بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x^1 & -\cos k_1 x^1 / k_1^2 & -\sin k_1 x^1 / k_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 & -\cos k_2 x^1 / k_2^2 & -\sin k_2 x^1 / k_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{bmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_{23} & \bar{M}_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{M}_{35} & \bar{M}_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{M}_{47} & \bar{M}_{48} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{P}_L^1 \\ \bar{P}_R^1 \\ \bar{P}_L^2 \\ \bar{P}_R^2 \\ \bar{P}_L^3 \\ \bar{P}_R^3 \\ \bar{m}_L^1 \\ \bar{m}_R^1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 22$$

حيث:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{11} &= \frac{1}{EA} * \left[-\frac{(x^1)^2}{2} + \frac{(x^1)^3}{6L} \right] & \bar{M}_{12} &= -\frac{1}{EA} * \left[\frac{(x^1)^3}{6L} \right] & \bar{M}_{23} &= \frac{1}{EI_3} * \left[\left(\frac{x^1^2}{2*k_1^2} - \left(\frac{x^1^3}{6*k_1^2*L} \right) \right) \right] \\ \bar{M}_{24} &= \frac{1}{EI_3} * \left[\left(\frac{x^1^3}{6*k_1^2*L} \right) \right] & \bar{M}_{35} &= \frac{1}{EI_2} * \left[\left(\frac{x^1^2}{2*k_2^2} - \left(\frac{x^1^3}{6*k_2^2*L} \right) \right) \right] & \bar{M}_{36} &= \frac{1}{EI_2} * \left[\left(\frac{x^1^3}{6*k_2^2*L} \right) \right] & \dots\dots 23 \\ \bar{M}_{47} &= \left(\frac{1}{G*Id} \right) * \left(-\frac{x^1^2}{2} + \frac{x^1^3}{6*L} \right) & \bar{M}_{48} &= \left(\frac{1}{G*Id} \right) * \left(-\frac{x^1^3}{6*L} \right) \end{aligned}$$

بتطبيق العلاقات من 5-10 نحصل على تابع الانتقال جزئية المتجانس وغير المتجانس كما يلي:

جزء تابع الشكل المتجانس هو:

$$\begin{aligned} N_i^{m(e)} &= \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} N_1^{1(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^{1(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1^{1(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^{6(i)} & N_1^{1(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{2(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^{2(j)} & 0 & 0 & 0 & N_2^{6(j)} \\ 0 & 0 & N_3^{3(i)} & 0 & N_3^{5(i)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{3(j)} & 0 & N_3^{5(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4^{4(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^{4(j)} & 0 & 0 \end{array} \right] \dots\dots\dots 24 \\ N_1^{1(i)} &= 1 - \frac{x^1}{L} & N_1^{1(j)} &= \frac{x^1}{L} & N_2^{2(i)} &= \eta_3 - k_1 \cdot \eta_6 \cdot x^1 + \cos(k_1 \cdot x^1) \cdot \eta_4 + \sin(k_1 \cdot x^1) \cdot \eta_6 \\ N_2^{6(i)} &= \frac{\eta_2}{k_1} + x^1 \cdot \eta_4 - \cos(k_1 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_2}{k_1} + \sin(k_1 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_3}{k_1} & N_2^{2(j)} &= \eta_4 + x^1 \cdot k_1 \cdot \eta_6 - \cos(k_1 \cdot x^1) \cdot \eta_4 - \sin(k_1 \cdot x^1) \cdot \eta_6 \\ N_2^{6(j)} &= -\frac{\eta_5}{k_1} + x^1 \cdot \eta_4 + \cos(k_1 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_5}{k_1} - \sin(k_1 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_4}{k_1} & N_3^{3(i)} &= \eta_8 - x^1 \cdot \eta_{12} \cdot k_2 + \cos(k_2 \cdot x^1) \cdot \eta_{10} + \sin(k_2 \cdot x^1) \cdot \eta_{12} \\ N_3^{5(i)} &= -\frac{\eta_9}{k_2} - x^1 \cdot \eta_{10} + \cos(k_2 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_9}{k_2} - \sin(k_2 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_8}{k_2} & N_3^{3(j)} &= \eta_{10} + x^1 \cdot \eta_{12} \cdot k_2 - \cos(k_2 \cdot x^1) \cdot \eta_{10} - \sin(k_2 \cdot x^1) \cdot \eta_{12} \\ N_3^{5(j)} &= \frac{\eta_{11}}{k_2} - x^1 \cdot \eta_{10} - \cos(k_2 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_{11}}{k_2} + \sin(k_2 \cdot x^1) \cdot \frac{\eta_{10}}{k_2} & N_4^{4(i)} &= 1 - \frac{x^1}{L} & N_4^{4(j)} &= \frac{x^1}{L} \end{aligned}$$

وجزء تابع الشكل غير المتجانس هو:

$$\bar{N}_{ij} = \left[\begin{array}{cccccccc} \bar{N}_{11} & \bar{N}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{23} & \bar{N}_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{35} & \bar{N}_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{47} & \bar{N}_{48} \end{array} \right] \dots\dots\dots 25$$

بحيث أن:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 2 \cos(k_1 L) + Lk_1 \sin(k_1 L) - 2 & \eta_2 &= (\sin(k_1 L) - Lk_1 \cos(k_1 L))/\eta_1 \\ \eta_3 &= (\cos(k_1 L) + Lk_1 \sin(k_1 L) - 1)/\eta_1 & \eta_4 &= (\cos(k_1 L) - 1)/\eta_1 \\ \eta_5 &= (\sin(k_1 L) - Lk_1)/\eta_1 & \eta_6 &= \sin(k_1 L)/\eta_1 \\ \eta_7 &= 2 \cos(k_2 L) + Lk_2 \sin(k_2 L) - 2 & \eta_8 &= (\cos(k_2 L) + Lk_2 \sin(k_2 L) - 1)/\eta_7 \\ \eta_9 &= (\sin(k_2 L) - Lk_2 \cos(k_2 L))/\eta_7 & \eta_{10} &= (\cos(k_2 L) - 1)/\eta_7 \\ \eta_{11} &= (\sin(k_2 L) - Lk_2)/\eta_7 & \eta_{12} &= \sin(k_2 L)/\eta_7 \end{aligned} \dots\dots\dots 26$$

$$\begin{aligned} \bar{N}_{11} &= \frac{x^1 L}{3EA} + \frac{x^1^2}{2EA} + \frac{x^1^3}{6LEA} & \bar{N}_{12} &= \frac{x^1 L}{6EA} - \frac{x^1^3}{6EAL} \\ \bar{N}_{23} &= \left(\frac{\eta_5}{k_1} - x^1 \cdot \eta_4 - \cos(k_1 x^1) \cdot \frac{\eta_5}{k_1} + \sin(k_1 x^1) \cdot \frac{\eta_4}{k_1} \right) \cdot \frac{L}{2 \cdot EI_3 \cdot k_1^2} - (\eta_4 + x^1 \cdot \eta_6 \cdot k_1 - \\ & \cos(k_1 x^1) \cdot \eta_4 - \sin(k_1 x^1) \cdot \eta_6) \cdot \frac{L^2}{3 \cdot EI_3 \cdot k_1^2} + \frac{x^1^2}{2k_1^2} + \frac{x^1^3}{6k_1^2 \cdot L} \\ \bar{N}_{24} &= \left(\frac{\eta_5}{k_1} - x^1 \cdot \eta_4 - \cos(k_1 x^1) \cdot \frac{\eta_5}{k_1} + \sin(k_1 x^1) \cdot \frac{\eta_4}{k_1} \right) \cdot \frac{L}{2 \cdot EI_3 \cdot k_1^2} - (\eta_4 + x^1 \cdot \eta_6 \cdot k_1 - \\ & \cos(k_1 x^1) \cdot \eta_4 - \sin(k_1 x^1) \cdot \eta_6) \cdot \frac{L^2}{6 \cdot EI_3 \cdot k_1^2} + \frac{x^1^3}{6 \cdot k_1^2 \cdot L \cdot EI_3} \\ \bar{N}_{35} &= \left(\frac{\eta_{11}}{k_2} - x^1 \cdot \eta_{10} - \cos(k_2 x^1) \cdot \frac{\eta_{11}}{k_2} + \sin(k_2 x^1) \cdot \frac{\eta_{10}}{k_2} \right) \cdot \frac{L}{2 \cdot EI_2 \cdot k_2^2} - (\eta_{10} + x^1 \cdot \eta_{12} \cdot k_2 - \\ & \cos(k_2 x^1) \cdot \eta_{10} - \sin(k_2 x^1) \cdot \eta_{12}) \cdot \frac{L^2}{3 \cdot EI_2 \cdot k_2^2} + \frac{x^1^2}{2k_2^2} + \frac{x^1^3}{6 \cdot k_2^2 \cdot L} \\ \bar{N}_{36} &= \left(\frac{\eta_{11}}{k_2} - x^1 \cdot \eta_{10} - \cos(k_2 x^1) \cdot \frac{\eta_{11}}{k_2} + \sin(k_2 x^1) \cdot \frac{\eta_{10}}{k_2} \right) \cdot \frac{L}{2 \cdot EI_2 \cdot k_2^2} - (\eta_{10} + x^1 \cdot \eta_{12} \cdot k_2 - \\ & \cos(k_2 x^1) \cdot \eta_{10} - \sin(k_2 x^1) \cdot \eta_{12}) \cdot \frac{L^2}{6 \cdot EI_2 \cdot k_2^2} + \frac{x^1^3}{6 \cdot k_2^2 \cdot L \cdot EI_2} \end{aligned} \dots\dots\dots 27$$

حالة قوى ناظرية شادة:

الحل الكلي للمعادلات التفاضلية من المرتبة الرابعة يصبح كما يلي:

$$u_2(x_1) = c_1 + c_2x^3 + c_3\sinh(k_1x^1) + c_4\cosh(k_1x^1) + \bar{P}_R^2 \frac{x^{13}}{6k_1^2EI_3L} + \bar{P}_L^2 \left(\frac{x^{12}}{2k_1^2EI_3} - \frac{x^{13}}{6k_1^2EI_3L} \right) \dots\dots\dots 28$$

$$u_3(x_1) = c_1 + c_2x^1 + c_3\sinh(k_2x^1) + c_4\cosh(k_2x^1) + \bar{P}_R^3 \frac{x^{13}}{6k_2^2EI_2L} + \bar{P}_L^3 \left(\frac{x^{12}}{2k_2^2EI_2} - \frac{x^{13}}{6k_2^2EI_2L} \right)$$

وبالتالي تتغير العلاقات التي تحدد جزأي تابع الانتقال المتجانس وغير المتجانس، بعد تحديد تابع الانتقالات يمكن باستخدام العلاقة 17 تحديد توابع القوى الداخلية.

بتعويض تابع الانتقال في علاقة الطاقة الكلية، وأخذ المتغير الأول، ومن ثم استخدام مبدأ التشويش (أخذ حالة توازن مجاورة للحالة الأساسية) نحصل على صيغ مصفوفة الصلابة والقوى المركزة في العقد والمكافئة للحمولات الموزعة. هذه الطريقة معروضة بالتفصيل للإطارات المستوية ويتوابع انتقالات تقريبية عبارة عن كثيرات حدود من الدرجة الثالثة في المرجع [6].

بكتابة علاقة الطاقة الكلية π التي تمثل مجموع طاقة التشوهات U (مجموع طاقة التشوهات الناتجة عن الحالة العشوائية U_m وطاقة التشوهات الناتجة عن حالة الانعطاف U_b وطاقة التشوهات الناتجة عن اجهادات القص الفتلية U_t مع الانتباه إلى إشارة الدوران الموجبة ضمن المستوي x^1Ox^2 ، والذي يعبر عن الدوران الموجب حول المحور x^2) وطاقة الوضع V_p (التي تعبر عن عمل القوى الخارجية، أو تغير كمون الحمولات الخارجية)، سنجد أن:

$$\pi = U + V_p \dots\dots\dots 29$$

$$U = U_m + U_b + U_t = \frac{EA}{2} \int_0^1 \epsilon_x^2 \cdot dx + \frac{EI_2}{2} \int_0^1 (-u_3'')^2 \cdot dx + \frac{EI_3}{2} \int_0^1 (u_2'')^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \int_0^1 GI_d \phi_1^2 \cdot dx^1 \dots\dots\dots 30$$

أما طاقة الوضع:

$$V_p = - \int_0^l \bar{p}^2(x^1) u_2 dx - \int_0^l \bar{p}^3(x^1) u_3 dx - \int_0^l \bar{p}^1(x^1) u_1 dx - \int_0^l \bar{M}_t(x^1) \phi_1 dx \dots\dots\dots 31$$

بالتعويض في علاقة الطاقة (29) وتطبيق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري نحصل على:

$$\Rightarrow \delta\pi = \int_0^l (EI_2 \cdot (-u_3'') \cdot (-\delta u_3'') + EI_3 \cdot u_2'' \delta u_2'' + EA \cdot (u_1 + \frac{1}{2}((u_2')^2 + (u_3')^2)) \cdot (\delta u_1 + u_2 \cdot \delta u_2 + u_3 \cdot \delta u_3) + GI_d \cdot \phi_1 \cdot \delta \phi_1) \cdot dx^1 = \int_0^l \bar{p}^2(x^1) \delta u_3 dx^1 + \int_0^l \bar{p}^3(x^1) \delta u_2 dx^1 + \int_0^l \bar{p}^1(x^1) \delta u_1 dx^1 + \int_0^l \bar{M}_t(x^1) \delta \phi_1 dx$$

وباستخدام مبدأ التشويش، أي بأخذ حالة توازن مجاورة للحالة الأساسية، حيث تكون المنشأة في حالة توازن. أي:

$$u_1 = (u_1^0 + \Delta u_1) \quad u_2 = (u_2^0 + \Delta u_2) \quad u_3 = (u_3^0 + \Delta u_3) \quad \phi_1 = (\phi_1^0 + \Delta \phi_1)$$

$$\delta\pi^0 = 0 \quad N^0 = EA \left(u_1^0 + \frac{1}{2}(u_2^{02} + u_3^{02}) \right) = \pm P \quad \text{بالأخذ بعين الاعتبار أن:}$$

$$\delta\Delta\pi = \int_0^l [\delta\Delta u_1 \quad \delta\Delta u_2 \quad \delta\Delta u_3 \quad \delta\Delta \phi_1] \left\{ \begin{bmatrix} x dEA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x d^2 EI_3 \cdot dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x d^2 EI_2 \cdot dx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x dN^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x dN^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & x dEA u_2^0 & x dEA u_3^0 & 0 \\ x dEA u_2^0 & EA u_2^{0-2} & x dEA u_2^0 u_3^0 & 0 \\ x dEA u_3^0 & x dEA u_2^0 u_3^0 & EA u_3^{0-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \\ \Delta \phi_1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \Delta P^1(x^1) \\ \Delta P^2(x^1) \\ \Delta P^3(x^1) \\ \bar{M}_t(x^1) \end{array} \right] \left. \right\} dx^1 = 0 \dots\dots\dots 33$$

بعد تعويض توابع الانتقالات التي تم الحصول عليها في العلاقة 33 يمكن فصلها إلى أربعة حدود
 T_1, T_2, T_3, T_4

$$T_1 = \int_0^l \delta(Nd1_r^{s(q)} \cdot u_{s(q)} + \overline{Nd1}_{rn} \cdot \bar{P}^n) \cdot E^{rt} \cdot (Nd1_t^{m(P)} \cdot u_{m(P)} + \overline{Nd1}_{tl} \cdot \bar{P}^l) \cdot dx^1 \Rightarrow$$

$$T_1 = \delta u_{s(q)} \cdot \int_0^l Nd1_r^{s(q)} \cdot E^{rt} \cdot Nd1_t^{m(P)} \cdot dx^1 \cdot u_{m(P)} + \delta u_{s(q)} \cdot \int_0^l Nd1_r^{s(q)} \cdot E^{rt} \cdot \overline{Nd1}_{tl} \cdot \bar{P}^l \cdot dx^1 +$$

$$\int_0^l \delta(\bar{P}^n \cdot \overline{Nd1}_{rn}) \cdot E^{rt} \cdot Nd1_t^{m(P)} \cdot dx^1 \cdot u_{m(P)} + \int_0^l \delta(\bar{P}^n \cdot \overline{Nd1}_{rn}) \cdot E^{rt} \cdot \overline{Nd1}_{tl} \cdot \bar{P}^l \cdot dx^1 \dots\dots\dots 34$$

علماً أن:

$$Nd1_t^{m(P)} = \begin{bmatrix} N_1^{1(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^{1(j)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^{2(i)} & 0 & 0 & 0 & N_2^{6(i)} & 0 & N_2^{2(j)} & 0 & 0 & 0 & N_2^{6(j)} \\ 0 & 0 & N_3^{3(i)} & 0 & N_3^{5(i)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{3(j)} & 0 & N_3^{5(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4^{4(i)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_4^{4(j)} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = -P \cdot \int_0^l \delta(Nd2_r^{s(q)} \cdot u_{s(q)} + \overline{Nd2}_{rn} \cdot \bar{P}^n) \cdot (Nd2_t^{m(P)} \cdot u_{m(P)} + \overline{Nd2}_{tl} \cdot \bar{P}^l) \cdot dx^1 \Rightarrow$$

$$T_2 = -\delta u_{s(q)} \cdot P \cdot \int_0^l Nd2_r^{s(q)} \cdot Nd2_t^{m(P)} \cdot dx^1 \cdot u_{m(P)} - \delta u_{s(q)} \cdot P \cdot \int_0^l Nd2_r^{s(q)} \cdot \overline{Nd2}_{tl} \cdot \bar{P}^l \cdot dx^1 -$$

$$P \cdot \int_0^l \delta(\bar{P}^n \cdot \overline{Nd2}_{rn}) \cdot Nd2_t^{m(P)} \cdot dx^1 \cdot u_{m(P)} - P \cdot \int_0^l \delta(\bar{P}^n \cdot \overline{Nd2}_{rn}) \cdot \overline{Nd2}_{tl} \cdot \bar{P}^l \cdot dx^1 \dots\dots\dots 35$$

يشكل الحد الثالث من العلاقة 33 مصفوفة الانتقالات البدئية وهي في الحالة المعتمدة صفرية.

نحصل من الحد الأول والثاني على مصفوفة الصلابة للتحليل ضمن نظرية المرتبة الثانية (حالة قوى

ناظمية ضاغطة) كما يلي:

$$K^{s(P)l(P)} = \int_0^l Nd1_r^{s(q)} \cdot E^{rt} \cdot Nd1_t^{l(P)} \cdot dx^1 - P \cdot \int_0^l Nd2_r^{s(q)} \cdot Nd2_t^{l(P)} \cdot dx^1$$

بعد إنجاز الجداء المصفوفي والتكاملات التفصيلية لعناصر المصفوفة السابقة (باستخدام الـ *MATLAB*)

نحصل على عناصر مصفوفة المساواة للعنصر المنتهي الإطاري الفراغي ضمن نظرية المرتبة الثانية، وهي مطابقة للمصفوفة الدقيقة، والتي تبين بأن حدود الصلابة المتعلقة بالقص والانعطاف حدود تابعة بشكل لاخطي للقوى الناظمية المطبقة على العنصر، وهذه القوى الناظمية ستتم معالجتها باعتبارها معيار معلوم مثل (*EI*) وطول العنصر (*l*)، حيث ستختلف مصفوفة الصلابة هذه في حال كانت القوة الناظمية شادة بدلاً من ضاغطة.

عندما نستخدم تابع الانتقال التقريبي بالاتجاهين الثاني والثالث عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثالثة، نحصل من الحد الأول على مصفوفة الصلابة الخطية التي حصلنا عليها من التحليل الخطي ضمن المرتبة الأولى، ومن الحد الثاني على مصفوفة الصلابة الجيومترية أو مصفوفة عوامل الاستقرار، وهي تعبر عن تأثير القوة الناظمية على علاقة الصلابة بغض النظر عن كونها ضاغطة أم شادة، إذ نحصل من الحدين على مصفوفة مطابقة لمصفوفة الصلابة (الخطية) ضمن المرتبة الثانية (مصفوفة الصلابة التقريبية).

الحد الرابع: وهو عمل القوى الخارجية الموزعة

$$T_4 = - \int_0^l \delta(N_r^{s(q)} \cdot u_{s(q)} + \bar{N}_{ij} \bar{P}^j) \bar{P}^i \cdot dx^1 = -\delta u_{s(q)} \cdot \bar{f}^{s(q)} - \int_0^l \delta(\bar{N}_{ij} \bar{P}^j) \bar{P}^i \cdot dx^1 \dots\dots\dots 36$$

حيث إن:

$$\bar{f}^{s(q)} = \int_0^l N_i^{s(q)} \bar{p}^i \cdot dx^1 \quad \bar{p}^i = \{\bar{p}^1 \bar{p}^2 \bar{p}^3 \bar{m}^1\} \quad \bar{p}^i = \bar{p}_L^i + \frac{x^1}{l} (\bar{p}_R^i - \bar{p}_L^i) \dots\dots\dots 37$$

بعد إنجاز الجداء المصفوفي والتكاملات التفصيلية (باستخدام الـ *MATLAB*) نحصل على شعاع القوى المركزة

في العقد والمكافئة للحمولات الموزعة على امتداد العنصر، وهي أيضاً تابعة للقوى الناظمية المطبقة على العنصر.

تصبح المعادلة 33:

$$\delta \pi = \delta u_{s(q)} \cdot K_o^{s(q)l(P)} \cdot u_{l(P)} - \delta u_{s(q)} \cdot P \cdot K_g^{s(q)l(P)} \cdot u_{l(P)} - \delta u_{s(q)} \int_0^l N_i^{s(q)} \bar{P}^i \cdot dx^1 + \delta u_{s(q)} \cdot \bar{f} \bar{P}^{s(q)} = 0$$

حيث إن $\overline{fP}^{s(q)}$ الحد الإضافي الناتج عن تطبيق الطريقة المعدلة (وجود الجزء غير المتجانس في تابع الانتقال)، ويساوي إلى:

$$\overline{fP}^{s(q)} = \int_0^1 N d1_r^{s(q)} \cdot E^{rt} \cdot \overline{Nd1}_{tt} \cdot \overline{P}^1 \cdot dx^1 - P \cdot \int_0^1 N d2_r^{s(q)} \cdot \overline{Nd2}_{tt} \cdot \overline{P}^1 \cdot dx^1 \quad \dots\dots\dots 38$$

بإجراء تكاملات الجزء المتجانس مع الجزء غير المتجانس تبين أنه مساوٍ للصفر.

$$K^{s(q)I(P)} \cdot u_{I(P)} = \overline{f}^{s(q)} - \overline{fP}^{s(q)} \quad \dots\dots\dots 39$$

بعد تحويل تعابير الطاقة إلى جملة محاور إحداثية عامة ولتكن (x^1, x^2, x^3) وأشعتها الواحدة

(e_1, e_2, e_3) ، نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$k^{\bar{s}(n)\bar{t}(n)} \cdot u_{\bar{t}(n)} = \bar{f}^{\bar{t}(n)} \quad \dots\dots\dots 40$$

حيث $n = 1, 2, 3 \dots \text{Num. of nodes}$ مؤشر يدل على عقد المنشأ. بتعويض الشروط الطرفية للانتقالات وحل جملة المعادلات الناتجة نحصل على شعاع الانتقال المجهولة لعقد المنشأ، وبالتالي يمكن تحديد قوى المقطع في العنصر المدروس.

• الصياغة البرمجية لطريقة العناصر المنتهية المعدلة:

يتألف الشكل النموذجي للكود البرمجي *Samm* المطور في هذه الرسالة والمخصص للحل وفق طريقة العناصر المنتهية من الأقسام الرئيسية التالية:

- 1- قسم ما قبل المعالجة "*Pre-processing section*": يتم فيه قراءة ملف الإدخالات الذي يتضمن المعلومات المتعلقة بالعقد، والعناصر، والحمولات، والشروط الطرفية، وتحضير هذه المعطيات للمرحلة اللاحقة.
- 2- قسم المعالجة "*Processing section*": يتم خلاله معالجة المعلومات الواردة من المرحلة السابقة واستخلاص النتائج المطلوبة كانتقالات العقد والقوى الداخلية وغيرها.
- 3- قسم ما بعد المعالجة "*Post-processing section*": وفيه يتم إظهار النتائج الصادرة عن مرحلة المعالجة...

بعد أن يقوم البرنامج بقراءة ملف الإدخالات، يتم تحديد عدد العقد، وعدد درجات الحرية للجملة، وعدد العناصر المستخدمة وهي مرحلة ما قبل التحليل.

بشكل عام نعتبر بدايةً أن القوى الناظرية مهمة، وبالتالي نحصل على علاقة الصلابة في حالتها الخطية. بعد ذلك يقوم البرنامج ببناء العناصر، ثم يتم تجميع مصفوفة الصلابة العامة للجملة ابتداءً من مصفوفات الصلابة العنصرية، وذلك بعد تحويلها من الإحداثيات الخاصة إلى الإحداثيات العامة، كما يتم تجميع شعاع القوى بإيجاد القوى المكافئة للحمولات الموزعة على العناصر وجمعها مع القوى الخارجية المركزة في العقد نفسها واستنتاج الحمولات المكافئة في العقد مباشرةً في أساسيات الطريقة دون الحاجة إلى العودة إلى جداول. تُحدد الشروط الطرفية قبل حل جملة المعادلات وإيجاد الانتقال المجهولة في مرحلة التحليل الإنشائي. لتحسب بعد ذلك القوى الداخلية في العناصر، وبالتالي القوى الناظرية، ثم يعاد حساب مصفوفة الصلابة المعدلة من جديد وذلك بالاعتماد على القوى الداخلية الأحدث والتي تؤدي إلى علاقة صلابة جديدة وقوى داخلية جديدة أيضاً.

نعاود الكرة إلى أن نصل إلى توافق مقبول في القوى الناظرية. بهذا نكون قد وصلنا إلى حساب القوى الداخلية تحت تأثير القوى الناظرية وبالتالي ضمن نظرية المرتبة الثانية للاخطية.

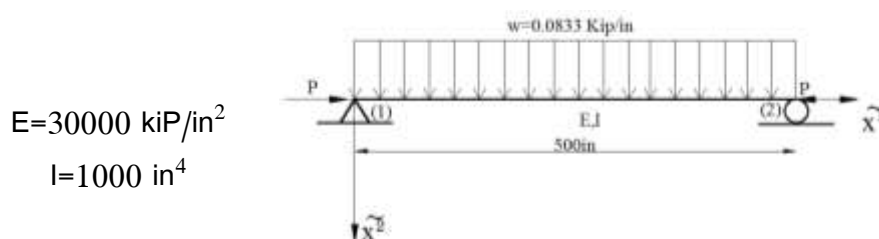
-وضمن مرحلة التحليل أيضاً يتم صياغة توابع الانتقال المعرفة بالعلاقة 8 وتشكيل توابع القوى الداخلية من توابع الانتقالات باستخدام العلاقة 17، ومن ثم حساب الانتقالات والقوى الداخلية بالاعتماد على العلاقات المستنتجة وذلك في عشرة مقاطع من كل عنصر.

يتم في مرحلة ما بعد التحليل تجميع النتائج وتبويبها وعرضها.

ملاحظة: يتم استخدام مصفوفة الصلابة الدقيقة للتحليل وفق نظرية المرتبة الثانية في النسخة الأساسية من البرنامج، ومن أجل المقارنة فقط تم تطوير نسخة من الكود البرمجي *Samm* للتحليل باستخدام مصفوفة الصلابة الهندسية (الطريقة التقريبية) أي استخدام (مصفوفة الصلابة والقوى المركزة في العقد والمكافئة لحمولات الموزعة وجزأي تابع الشكل المتجانس وغير المتجانسة الناتجة عن افتراض تابع انتقال تقريبي ككثير حدود من الدرجة الثالثة بالاتجاهين الثاني والثالث).

• تطبيقات عملية:

1: المثال الأول: جازر بسيط مؤلف من فتحة واحدة ومحمل بحمولة موزعة



$$E=30000 \text{ kip/in}^2$$

$$I=1000 \text{ in}^4$$

شكل 2: المثال الأول: جازر بسيط بفتحة واحدة

لدينا الجازر البسيط المبين بالشكل وهو حر الدوران حول المحور x^2 فقط في (1)، وحر الانتقال بالاتجاه الأول والدوران حول المحور x^3 في العقد (2). خصائص العنصر موضحة بالشكل. والمطلوب: حساب الانتقال الأعظمي والعزم الأعظمي في منتصف الفتحة وذلك بالتحليل وفق نظرية المرتبة الثانية.

فُدم الحل الدقيق لهذا الجازر (قيم الانتقال الأعظمي والعزم الأعظمي في منتصف الفتحة) في [2,4]، لذلك

سيتم حل المثال من أجل عدة قيم للقوة المحورية P ومقارنة الحل الدقيق مع نتائج الكود البرمجي *Samm* المقترح.

قمنا بحساب معامل التكبير للعزم MAF ولانتقال DAF وهو: (نسبة العزم أو الانتقال المحسوب وفق نظرية

المرتبة الثانية إلى العزم أو الانتقال المحسوب وفق نظرية المرتبة الأولى $(M0, y0)$).

تبين الجداول التالية نتائج الحل الدقيق المعطى في [2,4] والحل باستخدام الكود البرمجي *Samm* المقترح من

أجل عدة قيم للقوة المحورية.

جدول 2: : العزم الأعظمي بالحل الدقيق المتوفر ومن *Samm*

Maximum Bending Moment at mid sPan			
Axial Load kiPs	exact solution kiP.in	Samm	MA F
100	2851.14	2851.14	1.09
200	3148.46	3148.46	1.21
300	3513.199	3513.2	1.35
400	3971.159	3971.16	1.52
500	4563.211	4563.21	1.75

جدول 1: الانتقال الأعظمي بالحل الدقيق المتوفر ومن *Samm*

Maximum Deflection at midsPan			
Axial Load kiPs	exact solution in	Samm	DAF
100	2.46975	2.46975	1.09
200	2.721458	2.721458	1.20
300	3.030108	3.030108	1.34
400	3.417482	3.417482	1.51
500	3.918089	3.918089	1.73

توضح الجداول السابقة أن النتائج التي حصلنا عليها في الكود البرمجي *Samm* مطابقة تماماً للحل الدقيق.

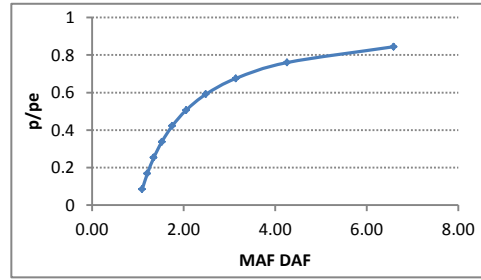
سوف نقوم برسم المخطط البياني للعلاقة بين P/Pe ومعاملات التكبير MAF و DAF (الحمولة الحرجة

$$P_e = \frac{\pi^2 * EI}{L^2} = \frac{\pi^2 * 30000 * 1000}{500^2} = 1184.35 \text{ kiPs}$$

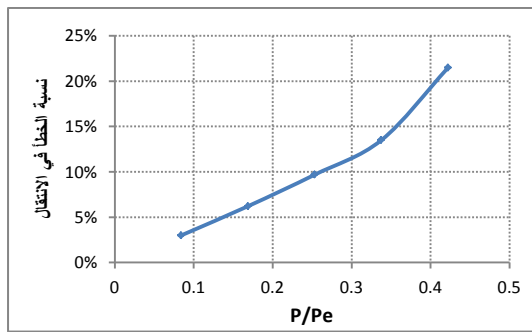
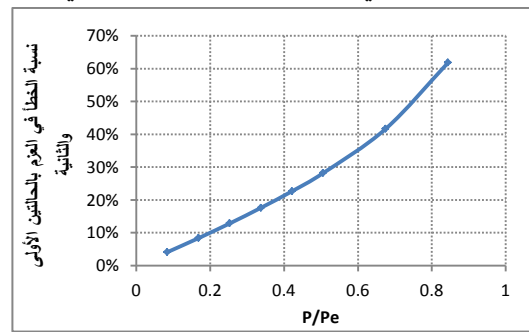
وللجانز المبين بالشكل) وهي: 1184.35 kiPs

من الشكل (3) نجد مايلي:

معاملات التكبير للعزوم والانتقالات غير مرتبطة
خطياً مع P وهي صغيرة جداً من أجل قيم صغيرة
 P/Pe وتترايد بلا حدود عندما تصل قيمة P
إلى Pe .

شكل 3: المنحني الذي يمثل العلاقة بين P/Pe ومعاملات التكبير

يبين المخططان التاليان أن الحل بنسخة الكود البرمجي التي تستخدم مصفوفة الصلابة الهندسية (التقريبية) وهي نفسها المستخدمة في البرامج الهندسية المتوفرة للتحليل وفق نظرية المرتبة الثانية مثلاً *SAP2000* يؤدي إلى فرق مع النتائج التي تعطيها النسخة الأساسية من الكود *Samm* المقترح والتي تستخدم مصفوفة الصلابة الدقيقة، في تحديد قيم القوى الداخلية (العزم الأعظمي) يتجاوز الـ 20% عندما تتجاوز النسبة P/Pe القيمة 0.4 وهذا الفرق يصل إلى 19% في تحديد قيمة الانتقال الأعظمي.

شكل 5: العلاقة بين نسبة الفرق في الانتقال المحسوب وفق مصفوفة الصلابة الدقيقة والتقريبية والنسبة P/Pe شكل 4: العلاقة بين نسبة الفرق في العزم المحسوب وفق مصفوفة الصلابة الدقيقة والتقريبية والنسبة P/Pe

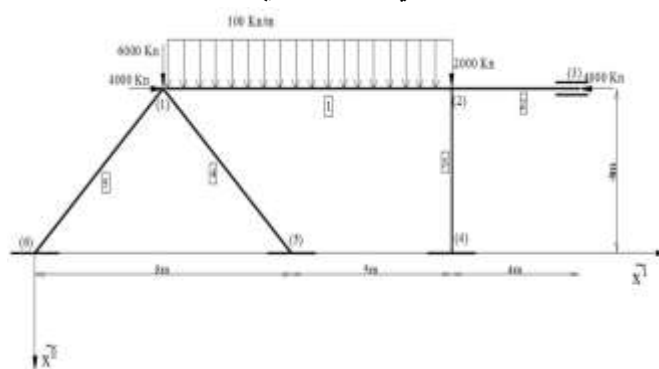
2 المثال الثاني: إطار مستوي:

جدول 3 : : إحدائيات عقد عناصر المثال الثاني

العنصر	ij	x ¹ _i	x ¹ _j	x ² _i	x ² _j	X ³ _i	X ³ _j
1	1,2	4	13	-4	-4	0	0
2	2,3	13	17	-4	-4	0	0
3	2,4	13	13	-4	0	0	0
4	1,5	4	8	-4	0	0	0
5	1,6	4	0	-4	0	0	0

نوع المادة A992Fy50

$$G=80769231KN/m^2 \quad E=2.1*10^8KN/m^2$$



شكل 6: إطار مستوي مكون من خمسة عناصر

لدينا الإطار المبين بالشكل 6 المؤلف من خمسة عناصر إحدائيات عقدها مبينة في الجدول 3:

تم نمذجة الإطار السابق على برنامج SAP2000 بطريقتين: بدون تقسيم العناصر، وبتقسيم كل عنصر إلى

شرائح بطول 1م.

لقد قمنا بإسناد المقطع Auto1 إلى كافة العناصر حيث تم اختيار المقطع W24*131 من قبل برنامج

SAP2000.

كما قمنا بحل الإطار السابق بدون تقسيم فقط باستخدام الكود البرمجي **Samm**.

تبين الجداول التالية نتائج الحساب التي حصلنا عليها من تحليل الإطار وفق نظرية المرتبة الثانية باستخدام

برنامج SAP2000 قبل وبعد التقسيم المشار إليه أعلاه ونتائج الكود **Samm** المقترح (لم يتم ذكر كل القوى الداخلية

لأنها تعطي نفس النتائج).

جدول 4: قيم الانزياحات في عقد العناصر باستخدام الكود **Samm** وبرنامج SAP2000 بدون تقسيم عناصر الإطار (المثال الثاني)

Second order Deflection(m)									
joint	Samm			SAP(قبل التقسيم)			نسبة الزيادة أو النقصان		
	u1	u2	h1	u1	u2	h1	u1	u2	h1
1	6.24E-06	0.006989	0.023854	7.836*10 ⁻⁶	0.007	0.0179	-	0.12%	33.11%
2	0.00719	0.002034	0.018448	-0.00711	0.002	0.0144	1.17%	1.70%	28.29%
3	0.01027	0	0	-0.01017	0	0	0.94%	-	-

جدول 5: الانزياحات في عقد العناصر باستخدام الكود **Samm** وبرنامج SAP2000 بعد تقسيم عناصر الإطار (المثال الثاني)

Second order Deflection(m)									
joint	Samm			SAP(بعد تقسيم العناصر)			نسبة الزيادة أو النقصان		
	u1	u2	h1	u1	u2	h1	u1	u2	h1
1	0.000006	0.006989	0.023854	6.205*10 ⁻⁶	0.006980	0.023820	-	0.12%	0.14%
2	-0.007194	0.002034	0.018448	-0.007180	0.002030	0.018430	0.19%	0.20%	0.09%
3	-0.010266	0	0	-0.010250	0.000000	0.000000	0.15%	-	-

جدول 6: القوى الداخلية في عقدي كل عنصر باستخدام Samm وبرنامج SAP2000 بدون تقسيم عناصر الإطار (المثال الثاني)

Second order forces									
joint	Samm			SAP قبل التقسيم			نسبة الزيادة أو النقصان		
	N1	M3i	M3j	N1	M3i	M3j	N1	M3i	M3j
1	4166	827	929	4122.5	630.8	705.7	1.10%	31.10%	31.70%
2	4000	486	263	4000	375.3	200	0.00%	29.40%	31.40%
3	2648	443	203	2601.9	330.1	141.4	1.80%	34.30%	43.40%
4	4554	439	300	4556.7	340.3	229	-0.10%	28.90%	31.00%
5	4545	388	249	4546.5	289.9	178.4	0.00%	34.00%	39.80%

جدول 7: القوى الداخلية في عقدي كل عنصر باستخدام Samm وبرنامج SAP2000 بعد تقسيم عناصر الإطار (المثال الثاني)

Second order forces									
joint	Samm			SAP بعد التقسيم			نسبة الزيادة أو النقصان		
	N1	M3i	M3j	N1	M3i	M3j	N1	M3i	M3j
1	4166.0	826.9	929.2	4166.1	826.3	928.4	0.00%	0.08%	0.09%
2	4000.0	485.8	262.8	4000.0	485.4	262.5	0.00%	0.09%	0.10%
3	2648.0	443.4	202.7	2648.1	443.0	202.5	0.01%	0.09%	0.09%
4	4554.0	438.6	299.9	4553.6	438.2	299.4	0.00%	0.09%	0.15%
5	4545.0	388.4	249.4	4545.5	388.0	249.0	0.00%	0.08%	0.15%

تظهر الجداول السابقة أن نسبة الفرق في تحديد الانتقالات التي أعطاها برنامج SAP2000 في التحليل وفق نظرية المرتبة الثانية قبل تقسيم العناصر تصل إلى 33% في تحديد الدورانات وإلى 43% في تحديد عزم الانعطاف بينما تتطابق نتائج برنامج SAP2000 بعد تقسيم العناصر مع نتائج الكود البرمجي Samm المقترح تقريباً (أكبر خطأ 0.2%).

جدول 8: النسبة P/Pe لعناصر الإطار في المثال الثاني

5	4	3	2	1	EL
0.496	0.497	0.144	0.218221	1.150689	P/Pe
9165	9165	18330	18330	3620.7	Pe
4545	4554	2648	4000	4166.3	P

علماً أن النسبة P/Pe للعناصر هي:

الطريقة المقترحة (المقاربة المعدلة لطريقة العناصر المنتهية):

يمكن معاينة المعادلات التي تحدد توابع الانتقالات والقوى الداخلية لكافة العناصر، حيث سنكتفي بمعاينة الانتقالات لعنصر واحد ولانتقال بالاتجاه الثاني والأول:

$$\gg vPa(element(1).u2,8)$$

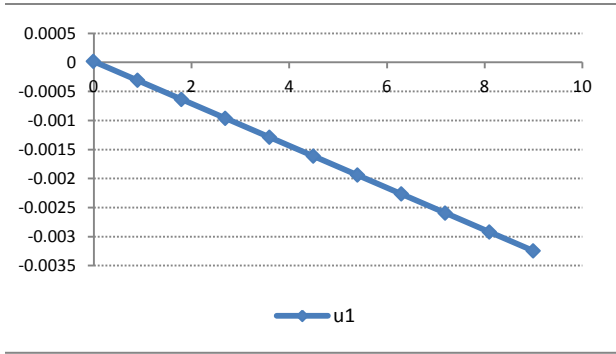
$$0.6052327 * \cos(0.18019179 * x1) - 0.10899619 * x1 + 0.62457466 * \sin(0.18019179 * x1) + 0.012233873 * x1^2 + 8.6676428 * 10^{(-20)} * x1^3 - 0.60201139$$

$$\gg vPa(element(1).u1,8)$$

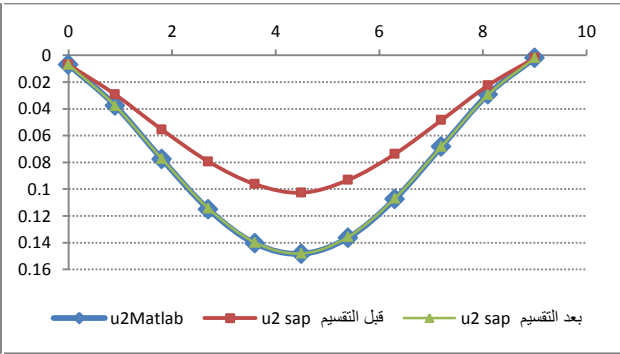
$$0.000014521816 - 0.00036242026 * x1$$

نلاحظ عند إيجاد قيم الانتقالات في مقاطع العناصر باستخدام المعادلات السابقة استمرارية الانتقالات والقوى الداخلية عند العقد وتوافقها مع الحل الدقيق الناتج عن تطبيق الخوارزمية التقليدية. باستخدام هذه المعادلات يمكن رسم المنحنيات التي تمثل هذه الانتقالات كما في المخططات التالية (قمنا بمقارنة القوى الداخلية والانتقال بالاتجاه u_2 مع القيم التي تم الحصول عليها من برنامج SAP2000):

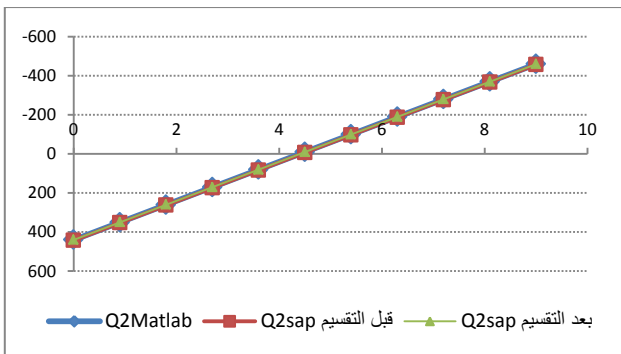
العنصر الأول محمل بحمولة موزعة بانتظام:



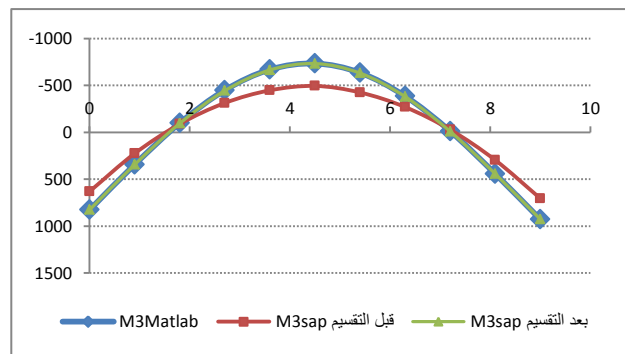
شكل 8: منحنى تابع الانتقال بالاتجاه الأول (العنصر الأول)



شكل 7: منحنى تابع الانتقال بالاتجاه الثاني (العنصر الأول)

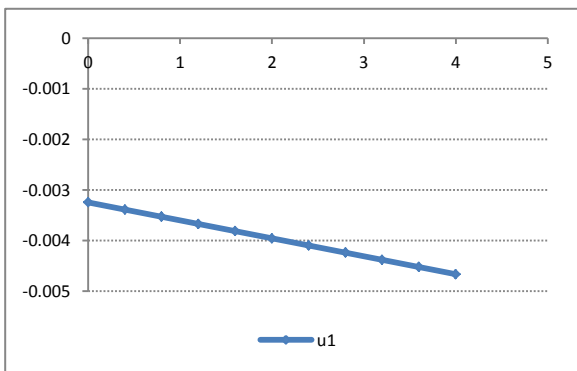


شكل 10: قوة القص (العنصر الأول)

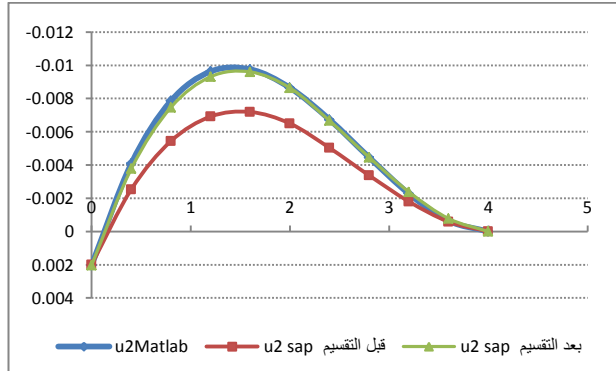


شكل 9: منحنى عزم الانعطاف (العنصر الأول)

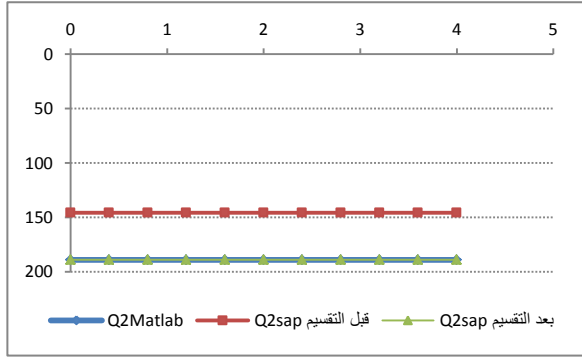
العنصر الثاني:



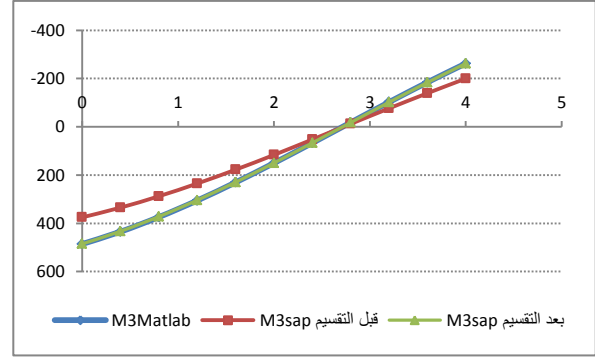
شكل 12: منحنى تابع الانتقال بالاتجاه الأول (العنصر الثاني)



شكل 11: منحنى تابع الانتقال بالاتجاه الثاني (العنصر الثاني)



شكل 14: قوة القوس



شكل 13: منحنى عزم الانعطاف

3. المثال الثالث: إطار فراغي:

لدينا إطار فراغي مؤلف من ثلاثة عناصر إحداثيات عقدها والخواص الهندسية لها موضحة على الشكل:

يخضع الإطار للقوى المبينة بالشكل 15.

المطلوب تحليل الإطار وفق نظرية المرتبة الثانية ومقارنة النتائج التي يتم الحصول عليها مع برنامج

SAP2000 وصياغة توابع الانتقالات والقوى الداخلية بالطريقة المعدلة ومقارنة النتائج مع النتائج الدقيقة.

انتقالات العقدة (1) وردود الأفعال الناتجة عن تحليل الإطار وفق نظرية المرتبة الثانية وفق الخوارزمية التقليدية

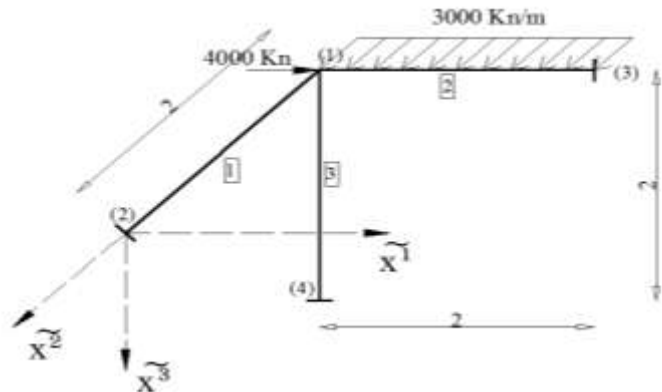
هي:

جدول 9: إحداثيات عقد عناصر المثال الثالث

العنصر	ij	x^1_i	x^1_j	x^2_i	x^2_j	X^3_i	X^3_j
1	1,2	0	0	-2	0	0	0
2	1,3	0	2	-2	-2	0	0
3	1,4	0	0	-2	-2	0	2

$$I_d = 8.802 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad I = 5.208 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad A = 0.25 \text{ m}^2$$

$$E = 24855578 \text{ KN/m}^2 \quad G = 10356491 \text{ KN/m}^2 \quad 3 \text{ m}^6$$



شكل 15: المثال الثالث إطار فراغي

** ANALYSIS RESULTS **

Nodal Displacements :

Node_num	u1	u2	u3	h1	h2	h3
1	0.000534159	0.000779882	2.6177e-005	-0.000278125	0.00019327	0.00169514
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0

Reactions :

Node_num	R1	R2	R3	M1	M2	M3
1	0	0	0	0	0	0
2	225.795	-2423.05	48.8918	-30.9712	-8.80905	116.117
3	-1659.6	-3479.52	32.4388	12.6766	19.9613	1371.78
4	-66.191	-97.427	-81.3306	115.428	-78.7002	-77.2625

Press Any Key To Continue....

***** THE END *****

القوى الداخلية في عقدتي العنصرين الأول والثاني الناتجة عن تطبيق الخوارزمية التقليدية للتحليل وفق نظرية المرتبة الثانية هي:

```
>> element(1).P1'
Columns 1 through 8
    2423.1    225.8    48.892    8.809   -30.971    116.12    -2423.1    -225.8
Columns 9 through 12
   -48.892    -8.809    -66.749    334.18
>> element(2).P1'
Columns 1 through 8
    1659.6   -2520.5   -32.439   -12.677    44.873   -411.44   -1659.6   -3479.5
Columns 9 through 12
    32.439    12.677    19.961    1371.8
```

تم نمذجة الإطار السابق وتحليله وفق نظرية المرتبة الثانية باستخدام برنامج الـ SAP2000 وكانت النتائج كما يلي:

جدول 10: مقارنة انتقالات العقد مع نتائج برنامج SAP2000 - المثال الثالث

Second order Deflection(m)									
joint	Samm			SAP			نسبة الزيادة أو النقصان		
	u1	u2	u3	u1	u2	u3	u1	u2	u3
1	0.000534	0.00078	0.000026	0.000534	0.00078	0.000026	0.01%	-0.02%	-0.01%

Second order Deflection									
jomt	Samm			SAP			نسبة الزيادة أو النقصان		
	h1	h2	h3	h1	h2	h3	h1	h2	h3
1	-2.78E-04	0.000193	0.001695	-2.78E-04	1.93E-04	0.00169	-0.03%	0.04%	0.30%

وبالنسبة لردود الأفعال:

جدول 11: مقارنة ردود الأفعال مع نتائج برنامج SAP2000 - المثال الثالث

Second order Reaction															
joint	Samm					SAP2000					نسبة الزيادة أو النقصان				
	R1	R2	R3	M3	M2	R1	R2	R3	M3	M2	R1	R2	R3	M3	M2
2	225.8	2423	49	116	-9	225.5	-2423	49	116	-9	0.13%	0.01%	0.02%	0.17%	0.02%
3	-1660	3480	32	1372	20	1659	-3479	32	1371	20	0.02%	0.01%	0.01%	0.08%	0.02%
4	-66.2	-97.4	81	-77.3	-79	-66.2	-97.5	81	-77.2	-79	0.02%	0.05%	0.00%	0.10%	0.01%

ينبين مما سبق تطابق الانتقالات وردود الأفعال (تقريباً) للإطار الفراغي السابق.

الطريقة المعدلة:

إن توابع الانتقالات للعناصر الأول (على سبيل المثال) المشكلة بالطريقة المقترحة هي:

```
>> vPa(element(1).u1,8)
0.00026708306*x1
>> vPa(element(1).u2,8)
0.073640685*x1 + 0.028254177*cos(0.13681599*x1) - 0.53824618*sin(0.13681599*x1) -
0.028254177
>> vPa(element(1).u3,8)
0.12827713*sin(0.13681599*x1) - 0.012433133*cos(0.13681599*x1) - 0.017550363*x1 +
0.012433133
>> vPa(element(1).h1,8)
-0.00013906407*x1
>> vPa(element(1).h2,8)
0.017550363 - 0.0017010515*sin(0.13681599*x1) - 0.017550363*cos(0.13681599*x1)
>> vPa(element(1).h3,8)
```

0.073640685 - 0.0038656233*sin(0.13681599*x1) - 0.073640685*cos(0.13681599*x1)

من هذه العلاقة يمكن تعيين الانتقالات لكل عنصر في عدد كافي من المقاطع (سوف تتم معاينة u1 u2 u3 h3)

>> element(1).dis_data

Displacements Data :

x1	u1	u2	u3	h3
0	0	-6.93889e-018	1.73472e-018	0
0.2	5.34159e-005	-8.73937e-006	4.21628e-006	-7.81983e-005
0.4	0.000106832	-2.75996e-005	1.511e-005	-0.000101203
0.6	0.000160248	-4.55396e-005	3.00451e-005	-6.89961e-005
0.8	0.000213664	-5.15189e-005	4.63823e-005	1.83975e-005
1	0.00026708	-3.45058e-005	6.14816e-005	0.000160913
1.2	0.000320495	1.65139e-005	7.27036e-005	0.000358443
1.4	0.000373911	0.000112529	7.7412e-005	0.00061084
1.6	0.000427327	0.000264495	7.29753e-005	0.000917914
1.8	0.000480743	0.000483325	5.67689e-005	0.00127944
2	0.000534159	0.000779882	2.6177e-005	0.00169514

>> element(2).dis_data

Displacements Data :

x1	u1	u2	u3	h3
0	0.000534159	0.000779882	2.6177e-005	0.00169514
0.2	0.000480743	0.00115803	-5.87519e-006	0.00197183
0.4	0.000427327	0.00152899	-2.60503e-005	0.0016541
0.6	0.000373911	0.00179241	-3.63427e-005	0.000927507
0.8	0.000320495	0.00188512	-3.87517e-005	-2.2185e-005
1	0.00026708	0.00178106	-3.52807e-005	-0.00100909
1.2	0.000213664	0.00149139	-2.79363e-005	-0.00184732
1.4	0.000160248	0.00106443	-1.87267e-005	-0.00235103
1.6	0.000106832	0.000585658	-9.66147e-006	-0.00233458
1.8	5.34159e-005	0.00017764	-2.74983e-006	-0.00161258
2	0	2.27374e-012	-2.15106e-016	2.23599e-012

نلاحظ أن النتائج متطابقة مع التحليل وفق نظرية المرتبة الثانية بالطريقة الدقيقة بالخوارزمية التقليدية كما نلاحظ

استمرارية الانتقالات في العقدة (I).

كما يمكن معاينة توابع القوى الداخلية وبالنتيجة حساب القوى الداخلية في عدد كافي من مقاطع العنصر:

>> element(1).forces_data

Forces Data :

x1	N1	Q2	Q3	M2	M3	M1
0	-2423.05	-225.795	-48.8918	30.9712	-116.117	-8.80905
0.2	-2423.05	-225.795	-48.8918	21.1825	-70.9205	-8.80905
0.4	-2423.05	-225.795	-48.8918	11.3779	-25.6705	-8.80905
0.6	-2423.05	-225.795	-48.8918	1.56478	19.5986	-8.80905
0.8	-2423.05	-225.795	-48.8918	-8.24952	64.8531	-8.80905
1	-2423.05	-225.795	-48.8918	-18.0576	110.059	-8.80905
1.2	-2423.05	-225.795	-48.8918	-27.8522	155.183	-8.80905
1.4	-2423.05	-225.795	-48.8918	-37.626	200.19	-8.80905
1.6	-2423.05	-225.795	-48.8918	-47.3715	245.047	-8.80905
1.8	-2423.05	-225.795	-48.8918	-57.0817	289.721	-8.80905
2	-2423.05	-225.795	-48.8918	-66.749	334.178	-8.80905

نلاحظ توافق القوى الداخلية في العقدة i مع ردود الأفعال المحسوبة في هذه العقدة.

>> element(2).forces_data

Forces Data :

x1	N1	Q2	Q3	M2	M3	M1
0	-1659.6	2520.48	32.4388	-44.8727	411.441	12.6766
0.2	-1659.6	1920.48	32.4388	-38.4382	-33.2824	12.6766
0.4	-1659.6	1320.48	32.4388	-31.9839	-357.994	12.6766
0.6	-1659.6	720.479	32.4388	-25.5132	-562.527	12.6766
0.8	-1659.6	120.479	32.4388	-19.0295	-646.777	12.6766
1	-1659.6	-479.521	32.4388	-12.536	-610.7	12.6766
1.2	-1659.6	-1079.52	32.4388	-6.03603	-454.315	12.6766
1.4	-1659.6	-1679.52	32.4388	0.467002	-177.702	12.6766
1.6	-1659.6	-2279.52	32.4388	6.9698	218.997	12.6766
1.8	-1659.6	-2879.52	32.4388	13.469	735.578	12.6766
2	-1659.6	-3479.52	32.4388	19.9613	1371.78	12.6766

نلاحظ توافق الانتقالات في العقدة z مع ردود الأفعال في هذه العقدة.

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

نلاحظ من خلال الطريقة المعروضة والأمثلة المرافقة أنه:

1- تعتبر الطريقة المقترحة مقارنة مناسبة للتقليل من حجم العمل المبذول من قبل الحاسب (وكذلك توفير الذاكرة) خاصة في الإطارات المتعددة الطوابق والفتحات لأنها تختصر عدد العناصر المطلوبة لنمذجة المسألة والحصول على الحل الدقيقة.

2- دقة النتائج التي يتم الحصول عليها باستخدام برنامج *SAP2000* عند التحليل وفق نظرية المرتبة الثانية بالمقارنة مع الطريقة المقترحة تتعلق بالنسبة P/Pe للعناصر وينقسم العنصر الواحد إلى عدد كافٍ من العناصر للحصول على القيم الدقيقة التي يتم الحصول عليها عند التحليل بالكود البرمجي *Samm* المطور في هذه الرسالة باستخدام عنصر وحيد (المثال الثاني- الأشكال: 7-8-9-10-11-12)، حيث أنه بعد التقسيم المشار إليه أعلاه تتوافق الانتقالات والقوى الداخلية المحسوبة في برنامج *SAP2000* على امتداد العنصر مع نتائج الكود البرمجي *Samm* المقترح.

3- قيم الانتقالات المحسوبة في العقد باستخدام الخوارزمية المعدلة متطابقة مع القيم الدقيقة الناتجة عن الخوارزمية التقليدية للتحليل وفق نظرية المرتبة الثانية (طريقة توابع الاستقرار- الطريقة الدقيقة) حتى عند إيجاد هذه الانتقالات من أي من العناصر المرتبطة بالعقد المعتمدة وباستخدام عنصر وحيد (المثال الثالث).

4- قيم الانتقالات وقوى المقطع المحسوبة باستخدام الخوارزمية المعدلة على امتداد العنصر تتطابق مع الحل الدقيق وتتسم بالاستمرارية حتى عند الحل باستخدام عنصر وحيد (المثال الأول).

5- عند التحليل باستخدام طريقة مصفوفة الصلابة الهندسية (الطريقة التقريبية) المستخدمة في برنامج *SAP2000* مثلاً يؤدي إلى فرق في حساب الانتقالات يبدأ من 3% عندما تكون النسبة P/Pe مساوية لـ 0.08 ويصل إلى 19% عندما تصل النسبة P/Pe إلى 0.4 وهذا الفرق في تحديد العزم الأعظمي يبدأ من 4% عندما تكون النسبة P/Pe مساوية لـ 0.08 ويتجاوز 20% عندما تصل النسبة P/Pe إلى 0.4 (المثال الأول- الشكل 4، الشكل 5) وذلك بالمقارنة مع الحل الذي يعطيها الكود البرمجي *Samm* المقترح عند استخدام مصفوفة الصلابة الدقيقة (مصفوفة توابع الاستقرار) أما عندما تكون النسبة P/Pe صغيرة نكون أمام حالة قريبة من معالجة حالات المرتبة الأولى ويكون تأثير اللاخطية ضئيلاً جداً، وهذا ما يفسر تطابق نتائج الـ *SAP2000* مع نتائج البرنامج المقترح ويظهر الفرق واضحاً عندما تكون النسبة P/Pe كبيرة أي يزيد تأثير الحمولة الناظمية على الانتقالات العرضية.

التوصيات:

1- الحذر عند استخدام برنامج *SAP2000* للأغراض التصميمية وفق نظرية المرتبة الثانية عندما تكون النسبة P/Pe كبيرة.

2- يمكن استخدام الطريقة المعدلة لدراسة جمل إنشائية أخرى كالبلاطات والشرائح ضمن نظرية المرتبة الثانية.

المراجع:

- [1] Abo Diab,S. *energy methods in linear structural mechanics finite element methods statics*. dar alhasad dar alkalimeh, Damascus, 1998, p.147-208.
- [2] Abo Diab,S. *Generalization of a reduced Trefftz type approach –some numerical results*. sixth U.S. National congress on Computational Mechanics ,pp.595, Dearborn Michigan,USA,01-04, August 2001.
- [3] Abo Diab,S. *Formatting of Quadrilateral Finite element*, Fifth World congress on Computational Mechanics (WCCMV), Vienna, Austria ,July 2002. (Editors: Mang H.A; Rammer stoffer,F.G; Eberhardsteinerm J. publisher Vienna University of Technology ,Austria, ISBN 3-9501554-06. <http://wccm.tuwien.ac.at>.
- [4] زروف، علي. استخدام الطريقة المعدلة للعناصر المنتهية (نموذج الانتقالات) لحل جيزان فلاسوف الرقيقة. دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الهندسة من جامعة تشرين، اللاذقية، 2009، 106.
- [5] Hermogenes Munoa,B.S. *Elastic Second-Order Computer Analysis Of Beam-Column And Frames* .Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of MASTER,1991,128.
- [6] Mehlhorn,G. *Der Ingenieurbau, Baustatik Baudynamik*, Berlin,1995, p.60-64.
- [7] Stephen p. Timoshenko and James M. Gere. *Theory of Elastic Stability* . McGraw-Hill Book Company,Inc., New York, 1961, p. 1-45.
- [8] Chen, Wai-Fah and Atsuta, Toshio. *Theory of Beam-Columns*. Volume 1 : In-plane Behavior and Design, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1976, p. 1-170.
- [9] Chen, W.F, and Lui, E.M. *Structural Stability,Theory and Implementation*. Elsevier Science publishing Co., Inc., 52 Vanderbilt Avenue, NewYork, 1987, p.147-192.
- [10] Salmon, Charles G. and Johnson, John E. *Steel Structures, Design and Behavior Emphasizing Load and Resistance Factor Design*. Third Edition Harper & Row, Publishers, Inc., 10 East 53rd Street, New York, NY 10022, 1990, p.829-832.
- [11] Dabana .N. *Structural Mechanics(3)*.dar al madina , Damascus, 1999-2000,p. 83-142.
- [12] Dabana .N. *Structural Mechanics(4)*.dar al madina , Damascus, 1996-1997, p. 2-175.
- [13] Beaufait, Fred W., Rowan, William Jr. H, Hoadley,peter G., and Hackett, Robert M. *Computer Methods of Structural Analysis*. prentice-Hall, Inc.,Englewood, New Jersey, 1970, p.36-41, 342-386.