مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (35) العدد (6) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Engineering Sciences Series Vol. (35) No. (6) 2013

إدخال تأثير انتقالات مساند الجيزان إلى صيغة معادلة الدورانات الثلاثة للتحليل الإنشائي المبسط بطريقة الانتقالات

الدكتور المهندس أكرم صقور *

(تاريخ الإيداع 6 / 6 / 2013. قُبِل للنشر في 29/ 7 / 2013)

∇ ملخّص ∇

صغنا فيما سبق العلاقة التي تربط الدورانات لكل ثلاث عقد متتالية من الجائز المستمر الخاضع لتأثير الحمولات الخارجية فقط.

يتضمن جوهر هذا العمل العلمي إجراء التحليل اللازم لإدخال تأثير انتقالات مساند الجيزان المستمرة إلى معادلة الدورانات الثلاثة، التي اشتقت في عملٍ علميٍ سابقٍ لأجل الجيزان التي تتعرض عقدها للدوران نتيجة تأثير الحمولات الخارجية.

تسمح صيغ العلاقات المشتقة في هذا العمل العلمي بإجراء التحليل اللازم وحساب الدورانات والعزوم النهائية في عقد الجائز المسندية نتيجة التأثير المشترك للحمولات الخارجية وانتقالات مسانده، بما في ذلك إمكانية حدوث دوران لوثاقة الجائز في أي طرف تتواجد فيه.

لقد استثمرت الصيغ المشتقة في التطبيقات العملية على بعض نماذج الجيزان المستمرة، التي أظهرت سهولة وديناميكية توظيف هذه الصيغ في التحليل الإنشائي لمثل هذه الجيزان.

الكلمات المفتاحية: طريقة الانتقالات – الجيزان المستمرة – معادلة الدوران الثلاثة – الحمولات الخارجية انتقالات مساند الجائز

* **أستاذ مساعد – قسم الهندسة الإنشائية – كلية الهندسة المدنية– جامعة تشرين – اللاذقية – سورية.**

مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (35) العدد (6) 2013
Tishreen University Journal for Research and Scientific Studies - Engineering Sciences Series Vol. (35) No. (6) 2013

Taking of the effect of the Supports Settlements into Formulation of Three Rotations Equation for the simplified structural Analysis by Displacements method

Dr. Akram Sakkour*

(Received 6 / 6 / 2013. Accepted 29 / 7 / 2013)

∇ ABSTRACT ∇

We could early a formulation developing of the three rotations equations for the continuous beams under the effect of the external loads.

Essential of this scientific work contents the performance of necessary structural analysis that deals the effect of the supports settlements of continuous beams on the formulation of those three rotations equations.

The developed formulations in this scientific work allow the necessary analytical doing to a compute of the rotations and final moments at the supporting nodes of beam, that subjected to the action both of external loads and its supports displacements together, as well as the rotation action at fixed support that can be happed at any end of beam.

These relations were used in the practical applications for some continuous beams, so these showed a dynamic and easy functionality of those formulations by the structural analysis of the such beams.

Keywords: Displacements method - three rotations equation – external loads – settlements of continuous beams supports

* **Associate Professor in Structural Engineering Department - Civil Engineering Faculty – Tishreen University, Lattakia, Syria.**

مقدمة:

يعتمد تحليل المنشآت على واحدة من أهم الطرق المستخدمة في التحليل الإنشائي وهي طريقة الانتقالات. إنّها تستخدم، كما هو معلوم، في حل كلٍ من الجمل الإنشائية الجائزية والإطارية على حدٍ سواء، إذ تحدد لأجل الحل درجات حرية الحركة المتوفرة في نقاط الجملةِ وعقدِها، والتي سيتم تقييدها بوثاقات، أو مساند مؤقتة تمنع حركة الجملة في اتجاه درجات الحرية هذه إلا بموجب الدورانات أو الإزاحات الممنوحة لها من قبل المحلل الإنشائي باتجاه حرية الحركة الممكنة لكل عقدة من عقد الجملة، حيث تتشكل نتيجة هذا التحريك الافتراضي قوى داخلية من عزوم وقوى قص وقوى ناظمية تتوازن محصلاتها النهائية في كل عقدة مع ماتسببه القوى الخارجية المؤثرة في الجملة الإنشائية في العقدة المدروسة، إذ تُحدِّد هذه القيم بموجب النتائج التي يقدمها استخدام معادلة الانتقالات المحورية في اتجاه محور العنصر المتصل بالعقدة، أو استخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن لأجل الاتجاه المتعامد مع محور العنصر كجائز غير مقرر أحادي الفتحة [1].

يتم حل الجملة، إذاً، من خلال إيجاد الصيغ والعلاقات التي تجمع التأثير المشترك لدرجات الحرية بعضها مع بعض، وذلك من خلال تحقيق التوازن على كل عقدة من هذه العقد بين جميع القوى الداخلية المؤثرة في أجزاء العقدة المعزولة بتأثير درجة الحرية المتوفرة والحمولات الخارجية المؤثرة في العناصر المتصلة بالعقدة المدروسة. يتطلب إجراء مثل هذا التوازن عزل العقدة، وقطع عناصرها، والتعويض عن هذا القطع بقوى المقطع الداخلية المتشكلة بفعل المؤثرات المذكورة أعلاه [2].

يسري هذا الأمر على كلٍ من الإطارات والجيزان على حدٍ سواءٍ. إلا أنّه وبسبب تألّف العقدة في الجيزان من عنصرين متصلين بها فقط، فإنّه يمكن الاستغناء عن الحاجة لإجراء مثل هذا العزل للعقدة بإمكانية استخدام بعض الصيغ المساعدة في تشكيل المعادلات المطلوبة لحل الجملة، وإيجاد مجاهيلها، ومنها الصيغة الآتية المشتقة اعتماداً على مفاهيم المعادلة التفاضلية للخط المرن وتطبيقها على الجائز المعطى في الشكل (1)، والذي تعاني عقده من انتقال أو دوران [4]، حيث إنّ:

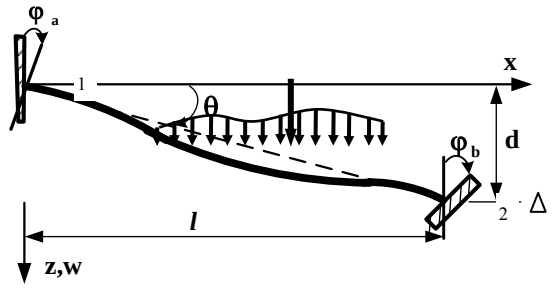
$$M_1 = \frac{EI}{l}(4\varphi_1 + 2\varphi_2 - 6\theta) + M_{1r} \quad \text{(a)}$$

$$M_2 = -\frac{EI}{l}(2\varphi_1 + 4\varphi_2 - 6\theta) + M_{2l} \quad \text{(b)}$$

إذ أنّ:

M_1r عزم الوثاقة ليمين العقدة 1 للحمولات الخارجية المؤثرة على الفتحة.

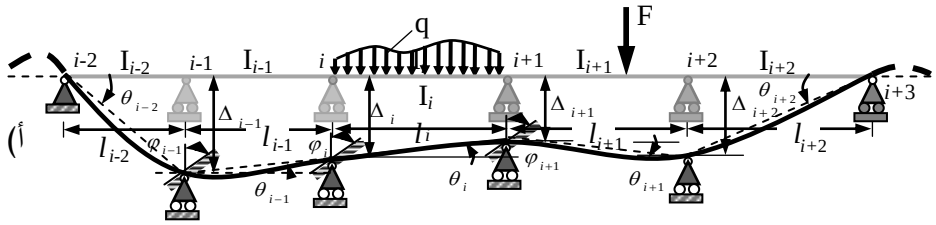
M_{2l} عزم الوثاقة ليسار العقدة 2 للحمولات الخارجية المؤثرة في الفتحة.



شكل (1): جائز بفتحة موثوقة الطرفين الدائرين بزاويتين مختلفتين مع انتقال Δ لليميني منهما

تطبق هذه الصيغة المعطاة على كل عقدة i من عقد الجائز الواحد يميناً ويساراً لتشكيل المطابقة عند طرفي كل عقدة لتحقيق شرط التوازن عليها بإجراء المساواة بين ناتج استخدام المعادلتين (a) و (b) لطرفي العقدة i مع ضرورة الأخذ في الحسبان اتجاه الدوران الموجب أو السالب الحاصل للزاوية θ لإدخالها إلى العلاقات السابقة، كما هو مبين

في الشكل (2)، وهكذا لبقية العقد للحصول على المعادلات المطلوبة المحتوية على مجاهيل المسألة المطروحة، حيث يتم بحل المعادلات إيجاد المجاهيل المتمثلة بالدوران والانتقال لعقد الجائز.



شكل (2): تبيان مجاهيل المعادلة (a) و (b) في طريقة الميل – الانتقال

لقد تمكّنا في عمل علمي سابق منشور في مجلة جامعة تشرين للعلوم الهندسية من اشتقاق صياغة مبسطة لحل الجيزان المستمرة بطريقة الانتقالات، والتي تتعرض عقد استنادها إلى دوران فقط بتأثير الحمولات الخارجية [3].

بيّنا آنذاك أنّ التحليل الإنشائي للجيزان باستخدام هذه الصياغة المشتقة، والتي أسميناها معادلة الدورانات الثلاثة للجيزان المستمرة لكونها تربط بين كل ثلاثة دورانات متتالية لعقد استناد الجائز، سيكون أيسر وأوضح للمحلل الإنشائي من استخدام أي وسيلة أخرى، سواء عزل العقد، أو استخدام معادلات الميل– الانتقال المذكورة أعلاه، أو أي طريقة تخطيطية مساعدة، كطريقة عزم المساحة مثلاً.

إلا أنّ اقتصار تلك الصياغة على الدورانات الناتجة عن تأثير حمولات خارجية فقط، جعل السعي إلى تطوير المعادلة المشتقة للدورانات الثلاثة لتشتمل على تأثير انتقالات مساند الجيزان، أيضا، مقارنة بمعادلة العزوم الثلاثة المعروفة والتي تعالج مثل هذه الحالات، فكانت نتيجة هذا المسعى أن توصلنا إلى الصيغة المعممة لمعادلة الدورانات الثلاثة للجيزان المستمرة ، التي لم تعد تقتصر على حالة تأثير الحمولات الخارجية فقط، بل تعدت ذلك لتشتمل على تأثير انتقالات المساند أيضاً، حيث سيمثّل عرضنا اللاحق لمراحل التحليل لاشتقاق هذه الصيغة المعممة لمعادلة الدورانات الثلاثة وتطبيقاتها جوهر مضمون عملنا العلمي هذا.

أهمية البحث وأهدافه:

تتجلّى أهمية هذا البحث في أنّه يمثل تعبيراً جاداً عن إمكانية المبادرة الذاتية في عملنا الأكاديمي للتخطي، على الأقل، لحاجز التبعية المطلقة في تأطير وتقديم المادة العلمية الموروثة عن مدارسها نهجاً وتفكيراً لإغنائها بطابعنا ومنهجنا العلمي الذاتي في الاستثمار المناسب للمفاهيم الرياضية وطرق التحليل الهندسية المتداولة فيها بهدف توظيفها بما يخدم عملنا العلمي أكاديمياً ومهنياً.

تهدف مساهمتنا العلمية هذه إلى التموضع تحت هذه العناوين العريضة من خلال الاستثمار المباشر لمفاهيم طريقة الانتقالات في التحليل الإنشائي للجمل الإنشائية، أملاً في إمكانية التعبير بصيغة ما جامعة لتحليل الجيزان المستمرة بهذه الطريقة، والتي تعاني عقدها من دورانات أو انتقالات نتيجة تأثير كلٍ من الحمولات الخارجية والهبوطات لمساندها، وذلك لإغناء ماهو متداول من وسائل استثمار لمفاهيم هذه الطريقة في عملية التحليل من جهة، وتعميق هذه المفاهيم لدى المحلل الإنشائي وتوسيع أبواب الخيارات الممكنة لديه لإجراء التحليل اللازم من ناحية ثانية، بحيث يمكن استخدامها بيسرٍ من قبل الطالب والمهندس على حدٍ سواء.

لذلك، يتمثل الهدف الأساس من تقديم نتائج عملنا هذا على نطاقٍ أرحب بأن يتاح المجال لأصحاب الشأن في الاستثمار المباشر للمفيد منه أكاديمياً صيغةً ومضموناً، والذي لاشك أنّه متباين في منهجيته، على الأقل، عمّا هو متداول في المراجع العالمية المتوفرة لدينا من مصادر مترامية الأطراف، والذي أرضى قناعتنا في التعريف عنها في متن هذا العمل العلمي بما أسميناه معادلة الدورانات الثلاثة للجيزان المستمرة، استمراراً للتسمية المذكورة في عمل سابق منشور لنا في مجلة جامعة تشرين للبحوث الهندسية، كما ذكرنا أعلاه.

طرائق البحث ومواده:

بعد أن تبلورت لنا أكثر أهميةُ نتائج العمل العلمي السابق واستخداماته التطبيقية المباشرة تدريسياً ومهنياً، عملنا جاهدين لتطويره من جديد ليشتمل على انتقالات عقد الجملة الجائزية غير المقررة (انتقالات المساند بشكلٍ خاص).

لذلك اعتمدنا في انجاز هذا العمل لبلوغ الهدف المأمول، أيضاً، على المفاهيم الأساسية المستوحاة من طريقة الانتقالات، والمنهجية التحليلية المتبعة في عملنا العلمي السابق المذكور أعلاه لاشتقاق معادلة الدورانات الثلاثة، فضلاً عن المبدأ العام المتعلق بتوازن أجزاء المنشأة بتأثير الحمولات الخارجية والداخلية، وذلك لاستخلاص الصيغة التي تتضمن دورانات العقد تحت تأثير كلٍ من الحمولات الخارجية وانتقالات مساند الجائز، والبرهنة على صحة نتائجها من خلال استثمارها في التطبيقات العملية المنفذة على بعض نماذج الجيزان المستمرة للتوضيح والتوثيق. إن تقييمنا لنتائج هذه المساعي المبذولة جعلنا نشعر أن الهدف العلمي الذي سعينا من أجله قد أفضى إلى غايته من استخلاص للصيغ والعلاقات التي تبسط الحساب المباشر للجيزان المستمرة بطريقة الانتقالات بقليل من المعرفة والخبرة الهندسية. لذلك قبلنا نحن أن هذه النتائج مرضية، على الأقل، وتسمح لنا التعريف بها على نطاق أوسع.

3-1. استنتاج الصياغة العامة المبسطة لمعادلة الدورانات الثلاثة للجيزان المستمرة

إنّه من المعلوم، أنّ المجاهيل الأساسية في طريقة الانتقالات متمثلة بمجموعة الدورانات والانزياحات التي يمكن حصولها في عقد الجلة الإنشائية المطروحة للحل. إذ يتطلّب التحليل الإنشائي في هذه الحالة تثبيتاً افتراضياً مؤقتاً لهذه العقد باتجاه درجات الحرية المتوفرة، حيث تقابل الدورانات بوثاقات لمنع هذا الدوران، والانزياحات بمساند مفصلية باتجاه الانزياح لمنع حصوله، وبذلك يمكن استخدام الوثاقة التامة لاحتواء الحالتين أيضاً.

هكذا ستكون الجملة المطروحة للحل قد قسمت، بإضافة هذه الروابط، إلى مجموعة من الجيزان غير المقررة أحادية الفتحة المتصلة في عقد الجملة والخاضعة إلى تأثير الحمولات الخارجية المؤثرة فيها، فقط. وبما أنّ العقد المثبّتة بالروابط في الجملة المساعدة هي عقد متحركة بقيم محددة باتجاه درجات الحرية لها في الجملة الأساسية بتأثير الحمولات الخارجية على هذه الجملة، من جهة، وتشكل عناصر متوازنة بتأثير القوى الداخلية على مقاطعها من جهة أخرى، لذلك، يتطلب الحل للمسألة المطروحة باستخدام الجملة المساعدة، بأن تكون القوى الداخلية على مقاطع أطراف العقدة للجيزان المتصلة فيها متوازنة نتيجة تأثير الحمولات الخارجية في هذه الجيزان، وتَحرُّك روابط التثبيت فيها بمقدار مساوٍ لقيمة تَحرُّك العقدة في الجملة الأساسية. إذ يتم الحصول على قيم ردود أفعال الجائز أحادي الفتحة غير المقرر، وبالتالي القوى الداخلية في المقطع المجاور للمسند نتيجة تحرك رابط التثبيت بدرجة الحرية الممكنة من خلال الأخذ في الحسبان النتائج، التي تم الحصول عليها باستخدام المعادلة التفاضلية للخط المرن على الجائز غير المقرر المكون من فتحة واحدة.

إنّ تطبيق معادلات التوازن على عقد الجملة المثبتة نتيجة تأثير الحمولات الخارجية وتحرك روابط التثبيت بدرجات الحرية المفترضة، سوف يؤدي إلى الحصول على عدد من المعادلات مساوٍ لعدد مجاهيل درجات الحرية للمسألة المطروحة. إذ تُعدّ بذلك المسألة المطروحة قد حلت بحل المعادلات الناتجة، وإيجاد قيم المجاهيل.

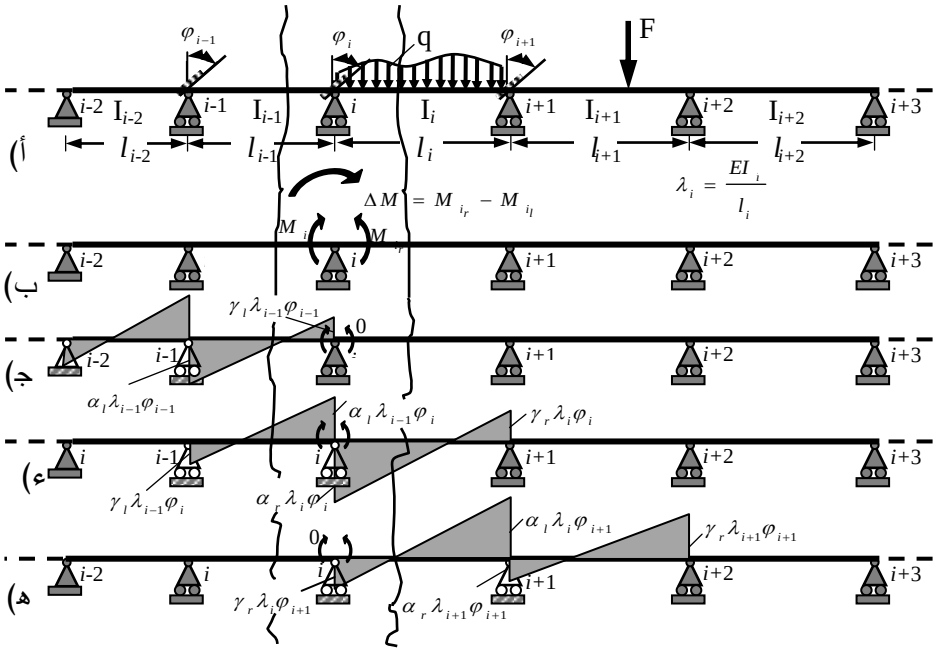
لذلك، يعطى من أجل تبسيط العمليات الحسابية للحصول على المعادلات اللازمة لمجاهيل المسألة قيم واحدية في اتجاه درجات الحرية المفترضة، ثم تطبق معادلات التوازن على العقدة الواحدة بعد ضرب قيم نتائج درجات الحرية الواحدية بالمجاهيل المرافقة.

بما أنّ جوهر عملنا العلمي هذا يتجاوز العلاقة التي تربط دورانات العقد لكل ثلاثة مساند متتالية من الجائز المستمر بعضها مع بعضها نتيجة تأثير الحمولات الخارجية فقط، لتطوير علاقة ترابط الدورانات هذه كي يؤخذ في الحسبان، أيضاً، تأثير حدوث انتقالات (هبوطات) لهذه العقد المسندية في اتجاه الاستناد المتوفر، فإنّنا نلخص، أولاً، ما تضمّنه عملنا السابق المتعلق بصيغة الدورانات الثلاثة للعقد الجائزية نتيجة التحميل الخارجي، ليتم البناء عليها في اشتقاق الصيغة الجامعة المحتوية على الانتقالات لهذه العقد المسندية.

3-1-1. معادلة الدورانات الثلاثة لحالات استناد الجيزان المستمرة نتيجة تأثير التحميل الخارجي [3]

لقد استنتجنا نتيجة عزل العقدة في المسند رقم i ، كما هو مبين في الشكل (3)، وتطبيق معادلة التوازن على العزوم الداخلية المتولدة فيها نتيجة دوران وثاقتها المؤقتة، والوثاقتين في العقدتين المجاورتين لها $i-1, i+1$ ، وتأثير الحمولات الخارجية في فتحتيها، أنّ صيغة معادلة الدورانات الثلاثة لهذه العقد الثلاث، وبالتالي لكل ثلاثة مساند متتالية من الجائز بعضها مع بعض هي:

$$\gamma_l \lambda_{i-1} \varphi_{i-1} + (\alpha_l \lambda_{i-1} + \alpha_r \lambda_i) \varphi_i + \gamma_r \lambda_i \varphi_{i+1} = M_{il} - M_{ir} \qquad (1)$$



شكل (3): الجائز المستمر مع عزوم الحمولات الخارجية ودورانات العقد الثلاثة

حيث إنّ: M_{il} عزم الوثاقة للعقدة i للحمولات الخارجية على الفتحة *i-1*.

M_{ir} عزم الوثاقة للعقدة i للحمولات الخارجية على الفتحة i.

تراعي الصيغة (1) إمكانية عدم إجراء التثبيت المؤقت الافتراضي للمساند الطرفية المتمفصلة، حيث يخفّض ذلك من عدد المعادلات اللازمة للحل، الذي سيكون مساوياً دوماً لعدد المساند الداخلية للجائز المدروس.

تأخذ أمثال الصلابة في الصيغة السابقة القيم الآتية:

$\gamma_l = \gamma_r = 0$ لأجل الفتحة الأولى، والأخيرة من الجائز المنتهية بمسند مفصلي.

$\gamma_l = \gamma_r = 2$ لأجل باقي فتحات الجائز، بما فيها الطرفية المنتهية بوثاقة.

$\alpha_l = \alpha_r = 3$ لأجل الفتحة الأولى، والأخيرة من الجائز المنتهية بمسند مفصلي.

$\alpha_l = \alpha_r = 4$ لأجل باقي فتحات الجائز بما فيها الطرفية المنتهية بوثاقة، حيث الدوران في هذه الوثاقة معدوم.

عندما تكون صلابة فتحات الجائز ثابتة، وأطوال فتحاته متساوية تبسط صورة العلاقة (1) لتأخذ الشكل الآتي:

$$\gamma_l\varphi_{i-1} + (\alpha_l + \alpha_r)\varphi_i + \gamma_r\varphi_{i+1} = (M_{il} - M_{ir})\frac{l}{EI} \qquad (2)$$

وبذلك، تحسب قيم العزوم النهائية في العقدة من إحدى العلاقتين الآتيتين:

$$M_i = M_{ir} + \lambda_i(\alpha_r\varphi_i + \gamma_r\varphi_{i+1}) \qquad (3a)$$

$$M_i = M_{il} - \lambda_{i-1}(\gamma_l\varphi_{i-1} + \alpha_l\varphi_i) \qquad (3b)$$

إذ يُعدّ تطبيق العلاقتين لحساب العزم في العقدة i بمثابة تدقيق لصحة النتائج.

عند اشتراط حتمية حساب الدوران لجميع عقد الجائز القابلة للدوران بإجراء التثبيت الوهمي لهذه العقد، بما فيها الطرفية المتمفصلة، يمكن إصلاح صيغة العلاقة (1) لتأخذ الشكل المبسط الآتي:

$$\lambda_{i-1}\varphi_{i-1} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)\varphi_i + \lambda_i\varphi_{i+1} = 0.5(M_{il} - M_{ir}) \qquad (4)$$

تحسب عندئذٍ قيم العزوم النهائية في المساند بالعلاقتين الآتيتين:

$$M_i = M_{ir} + 2\lambda_i(2\varphi_i + \varphi_{i+1}) \qquad (5a)$$

$$M_i = M_{il} - 2\lambda_{i-1}(2\varphi_i + \varphi_{i-1}) \qquad (5b)$$

كما تتبسط العلاقة (4) لأجل الجائز الموثوق في طرفيه، والذي أطوال فتحاته وعطالاتها متساوية، إلى الصيغة:

$$\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1} = 0.5(M_{il} - M_{ir})\frac{l}{EI} \qquad (6)$$

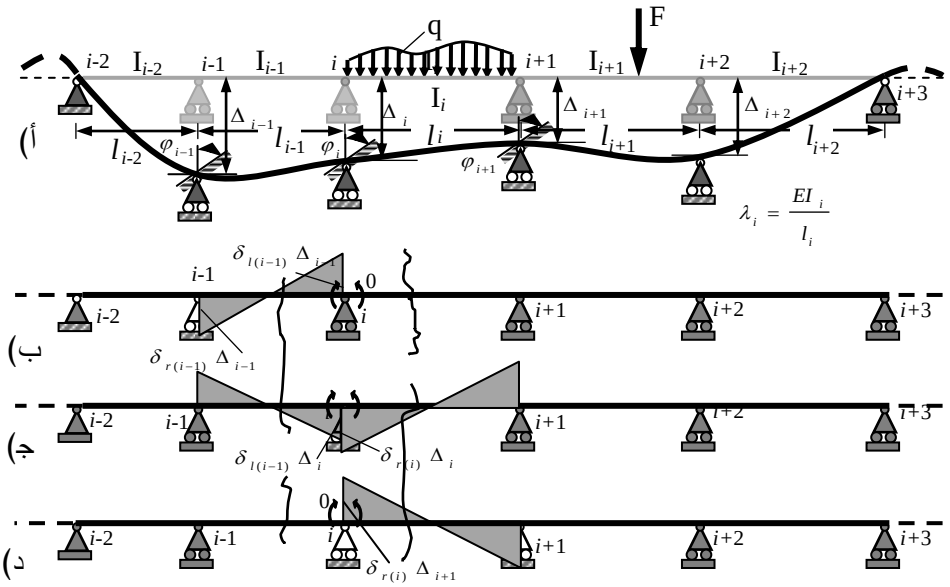
حيث نشير هنا، إلى أنّه عندما يصبح رقم المسند خارج أرقام مساند الجائز، يميناً أو يساراً، فإنّ حدّه في العلاقات السابقة سيكون معدوماً.

3-1-2. تأثير انتقالات المساند على معادلة الدورانات الثلاثة

لأجل دراسة التأثير المشترك لانتقالات مساند الجائز المستمر وحمولاته الخارجية في علاقة الدورانات الثلاثة لحالات الاستناد المختلفة، مثّلنا في الشكل (4) طبيعة التشوه التقريبية لمحور الجائز بتأثير حمولاته وانتقال مسانده.

سوف نستخدم في هذه الدراسة مبدأ تنضيد الآثار للأخذ في الحسبان تأثير كلٍ من الحمولات الخارجية وانتقالات مسانده على دورانات عقد الجائز، وذلك بغية الاستثمار المباشر للنتائج المذكورة في البند أعلاه لبلوغ الغاية المطلوبة.

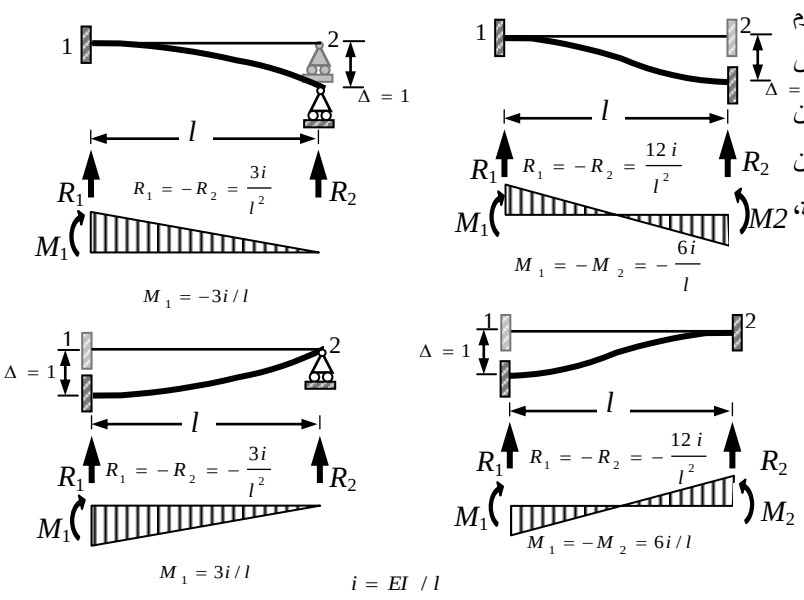
إنه مهمٌ، هنا، أن نميز بداية أنّ المقصود بانتقالات المساند ليست تلك الانتقالات التي تحدثها الحمولات الخارجية في عقد استناد الجائز، التي يفترض، بحسب طبيعة استنادها الصلب، أن لا يحدث فيها أي انتقال، بل المقصود هو هبوط هذه المساند بحد ذاتها.



شكل (4): – تشوه محور الجائز المستمر بتأثير حمولاته الخارجية وانتقالات مسانده ووثاقات التثبيت في العقد الثلاثة $i-1, i, i+1$ ودوراناتها
– عزوم الفتحتين للعقدة *i* نتيجة انتقالات المساند $i-1, i, i+1$

لذلك، وبعد إعطاء وثاقات التثبيت الوهمية المؤقتة لعقد الدوران قيم الدورانات المفترضة وإيجاد العزوم الناتجة عنها على فتحات الجائز، لنخصّ منها الفتحتين المجاورتين للعقدة *i*، كما هو مبيّن في الشكل (3)، سيقتصر العمل الآن على دراسة العزوم المتشكلة في هذه العقدة *i* نتيجة الانتقالات الحاصلة للمسند *i* نفسه، والمسندين المجاورين له $i-1, i+1$ فقط، إذ لن تؤثر انتقالات المساند الأبعد من ذلك بعزوم انعطاف على أي من الفتحتين المتصلتين بالعقدة *i*.

من ناحية ثانية، إنّنا ندرك أنّ العزم في وثاقة معنية نتيجة انتقالها أو انتقال المسند الآخر للفتحة الجائزية، سواء أكان موثوقاً أو متمفصل الاستناد، سيكون متساوياً في القيمة ومتعاكساً في الإشارة، كما يبيّنه الشكل (5) بحسب [4].



شكل (5): العزوم في الوثاقة نتيجة الانتقال الواحدي لمساند الفتحة بالنسبة لبعضها

نستنتج من قيم العزوم المبينة في الشكل (4)، أنّ أمثال صلابة الفتحة المتمفصلة في أحد طرفيها أو الموثوقة الطرفين يمكن التعبير عنها بالصيغة $\gamma + \alpha$، حيث تأخذ γ و α القيم المذكورة أعلاه. لذلك نستخلص أنّ:

$\gamma + \alpha = 0 + 3 = 3$ لأجل الفتحة المتمفصلة الاستناد في أحد طرفيها.

$\gamma + \alpha = 2 + 4 = 6$ لأجل الفتحة الموثوقة الطرفين.

تتوافق هذه النتائج، إذاً، مع القيم المعطاة في الشكل (4).

هكذا، نستطيع أن نبيّن في الشكل (4– ب)، (4– جـ)، و (4– د)، بموجب الوقائع المذكورة أعلاه، مخططات العزوم في الفتحتين المجاورتين للعقدة i الناتجة عن انتقال عقد كلٍ من المساند $i-1, i, i+1$ بالانتقال $\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}$ على الترتيب، مع تضمين قيم أمثال الصلابة $\gamma_l, \gamma_r, \alpha_l, \alpha_r$ المذكورة أعلاه لنوع الاستناد المنتقل. حيث إنّ:

$$\delta_{l(i-1)} = (\gamma_l + \alpha_l)\lambda_{i-1}/l_{i-1}$$
$$\delta_{r(i)} = (\gamma_r + \alpha_r)\lambda_i/l_i \qquad (7)$$

إن حساب محصلة العزوم على العقدة المعزولة i، كما هو مبيّن على الشكل (4)، سوف يعطي أنّ:

$$M = -\delta_{l(i-1)}\Delta_{i-1} + \delta_{l(i-1)}\Delta_i - \delta_{r(i)}\Delta_i + \delta_{r(i)}\Delta_{i+1} \qquad (8)$$

إصلاح العلاقة السابقة يبيّن أنّ:

$$M = -\delta_{l(i-1)}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) + \delta_{r(i)}(\Delta_i - \Delta_{i+1}) \qquad (9)$$

لذلك، ندخل العلاقة هذه إلى الطرف اليساري من العلاقة (1)، ثم نصلحها بالنقل إلى الطرف اليميني منها، لنجد أنّ:

(10)

$$\gamma_l\lambda_{i-1}\varphi_{i-1} + (\alpha_l\lambda_{i-1} + \alpha_r\lambda_i)\varphi_i + \gamma_r\lambda_i\varphi_{i+1} = \delta_{l(i-1)}(\Delta_i - \Delta_{i-1}) - \delta_{r(i)}(\Delta_i - \Delta_{i+1}) + M_{il} - M_{ir}$$

هكذا، بالأخذ في الحسبان العلاقة (6) سوف ينتج أنّ:

(11)

$$\gamma_l\lambda_{i-1}\varphi_{i-1} + (\alpha_l\lambda_{i-1} + \alpha_r\lambda_i)\varphi_i + \gamma_r\lambda_i\varphi_{i+1} = (\gamma_l + \alpha_l)\lambda_{i-1}(\Delta_i - \Delta_{i-1})/l_{i-1} - (\gamma_r + \alpha_r)\lambda_i(\Delta_i - \Delta_{i+1})/l_i + M_{il} - M_{ir}$$

تمثل هذه الصيغة معادلة الدورانات الثلاثة العامة لعقد الجائز المستمر بتأثير حمولاته الخارجية وانتقالات مسانده.

عندما تكون صلابة فتحات الجائز ثابتة، وأطوال فتحاته متساوية تأخذ العلاقة (11) بعد الإصلاح لها الشكل الآتي:

$$\gamma_l\varphi_{i-1} + (\alpha_l + \alpha_r)\varphi_i + \gamma_r\varphi_{i+1} = [(\gamma_l + \alpha_l)(\Delta_i - \Delta_{i-1}) - (\gamma_r + \alpha_r)(\Delta_i - \Delta_{i+1})]\frac{1}{l} + (M_{il} - M_{ir})\frac{l}{EI}$$

(12)

أما قيم العزوم النهائية في العقدة، فتحسب من إحدى العلاقتين الآتيتين:

$$M_i = M_{ir} + \lambda_i[\alpha_r\varphi_i + \gamma_r\varphi_{i+1} + (\alpha_r + \gamma_r)\frac{\Delta_i}{l_i} - (\alpha_r + \gamma_r)\frac{\Delta_{i+1}}{l_i}] \quad (13a)$$

$$M_i = M_{il} - \lambda_{i-1}[\gamma_l\varphi_{i-1} + \alpha_l\varphi_i - (\gamma_l + \alpha_l)\frac{\Delta_i}{l_{i-1}} + (\alpha_l + \gamma_l)\frac{\Delta_{i-1}}{l_{i-1}}] \quad (13b)$$

إذ يعتبر تطبيق العلاقتين لحساب العزم في العقدة i بمثابة تدقيق لصحة النتائج.

عند اشتراط حتمية حساب الدوران لجميع عقد الجائز القابلة للدوران بإجراء التثبيت الوهمي لهذه العقد، بما فيها الطرفية المتمفصلة، يمكن إصلاح صيغة العلاقة (11) لتأخذ الشكل المبسط الآتي:

$$\lambda_{i-1}\varphi_{i-1} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i)\varphi_i + \lambda_i\varphi_{i+1} = 3\lambda_{i-1}(\Delta_i - \Delta_{i-1})/l_{i-1} - 3\lambda_i(\Delta_i - \Delta_{i+1})/l_i + 0.5(M_{il} - M_{ir}) \quad (14)$$

تحسب عندئذٍ قيم العزوم النهائية في المساند بالعلاقتين الآتيتين:

$$M_i = M_{ir} + 2\lambda_i[2\varphi_i + \varphi_{i+1} + 3(\Delta_i - \Delta_{i+1})/l_i] \quad (15a)$$

$$M_i = M_{il} - 2\lambda_{i-1}[2\varphi_i + \varphi_{i-1} - 3(\Delta_i - \Delta_{i-1})/l_{i-1}] \quad (15b)$$

كما تتبسط العلاقة (14) لأجل الجائز الموثوق في طرفيه، والذي أطوال فتحاته وعطالاتها متساوية، إلى الصيغة:

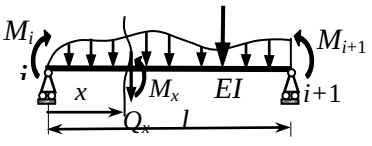
$$\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1} = 3(\Delta_{i+1} - \Delta_{i-1})\frac{1}{l} + 0.5(M_{il} - M_{ir})\frac{l}{EI} \quad (16)$$

هكذا، إذا انعدم وجود انتقال لأي من مساند الجائز، سوف نستنتج، عند التعويض عن ذلك في المعادلات (11)، و....(16)، أنّنا سنحصل على المعادلات المقابلة لها لحالة تأثير القوى الخارجية فقط، أي المعادلات (1)، و....(6).

لذلك، أسمينا المعادلات (11)، و....(16) بالمعادلات المعممة للدورانات. إذ نود أن نذكر بأنّ استخدام المعادلتين (11) أو (12) على جائزٍ مستمرٍ بمسندين طرفيين متمفصلين، سوف يخفّض عدد المعادلات اللازمة للحل

بمعادلتين عن حالة استخدام المعادلة (14)، إذ سيكون عدد المعادلات اللازم حلها، وبالتالي مجاهيل هذه المعادلات مساوياً لعدد المساند الداخلية للجائز.

هكذا، يتم بإيجاد المجاهيل المطلوبة حل المسألة المطروحة وإيجاد مخططات القوى الداخلية على الجائز، حيث حريٌّ بنا، لإتمام الحل داخل فتحة الجائز، أن نذكر، هنا، معادلتي العزم والقص للفتحة i من الجائز، والتي يؤثر في طرفيها العزمان M_i, M_{i+1} وفقاً للشكل (6)، اللتان هما:



شكل (6): الحمولات على الفتحة i

$$M_{xi} = M_i\left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + M_{i+1}\frac{x}{l_i} + m_{0x_i}$$

$$Q_{xi} = \frac{dM_{xi}}{dx} = \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i} + Q_{0xi}$$

Q_{x0} , m_{x0} : معادلة العزم، والقص للفتحة i المقررة من الجائز.

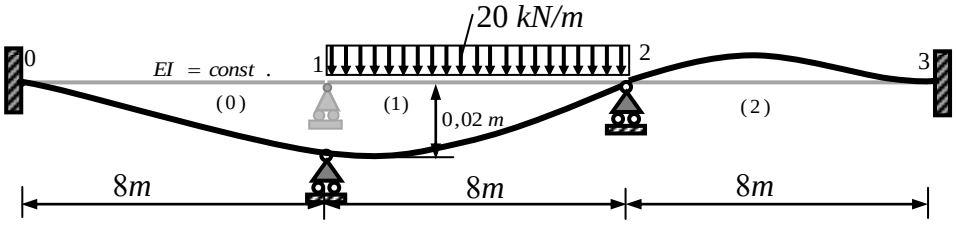
3-2. اختبار المعادلات المشتقة في التطبيقات العملية

سوف نبيّن صحة العلاقات المشتقة وطريقة استخدامها من خلال إجراء اختبار لتطبيقاتها العملية على عدد من الجيزان المستمرة، التي تؤثر عليها حمولات خارجية وتتعرض بعض مساندها لهبوطات معلومة.

مثال 1:

يبيّن الشكل (7) جائزاً موثوق الطرفين ومكوناً من ثلاث فتحات متساوية الطول والصلابة. الفتحة المتوسطة منه محملة بحمولة موزعة *20 kN/m*، ومسنده 1 هابط بمقدار 0,02 m. حيث إنّ:

$$E = 7\cdot 10^{7}\ kN/m^2 \quad , \quad I = 8\cdot 10^{-4}\ m^4$$



شكل (7): جائز محمل مع انتقال لمسنده 1

سوف نجري الدراسة لهذا الجائز على مرحلتين. المرحلة الأولى دراسته بالتأثير المستقل لكلٍ من الحمولة وانتقال المسند، والمرحلة الثانية دراسته بالتأثير المشترك لهما، حيث إنّ EI ، و λ لجميع الفتحات هما:

$$EI = 7\cdot 10^{7}\cdot 8\cdot 10^{-4} = 56\cdot 10^{3}\ kN\cdot m^2 \quad , \quad \lambda = EI/l = 56\cdot 10^{3}/8 = 7\cdot 10^{3}\ kN\ m$$

وإنّ عزوم الحمولات الخارجية في وثاقات العقد المسندية لفتحات الجائز، بحسب الصيغ المرجعية [ak]،هي:

$$M_{0r} = 0 \ ; \ M_{1l} = 0 \ , \ M_{1r} = -\frac{20\cdot 8^2}{12} = -106,67\ kNm \ ; \ M_{2l} = -\frac{20\cdot 8^2}{12} = -106,67\ kNm \ , \ M_{2r} = 0$$

$$M_{2l} = -\frac{20\cdot 8^2}{12} = -106,67\ kNm \ , \ M_{2r} = 0 \ ; \ M_{3l} = 0$$

كما إنّ قيم انتقالات مساند الجائز المبيّنة على الشكل (7) هي:

$$\Delta_0 = 0 \quad , \quad \Delta_1 = 0{,}02\ m \quad , \quad \Delta_2 = 0 \quad , \quad \Delta_3 = 0$$

1- تأثير الحمولة بمفردها

بما أنّ الجائز موثوق الطرفين وفتحاته متساوية الطول والصلابة، لذلك نستطيع استخدام العلاقة المختصرة (6) في الحل، إذ ينتج عن تطبيقها على العقدتين في المسندين 1 و 2 أنّ:

$$0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = 0.5(0 + 106{,}67)\frac{8}{56 \cdot 10^3}$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 + 0 = 0.5(-106{,}67 - 0)\frac{8}{56 \cdot 10^3}$$

نستخلص من إصلاح المعادلتين أنّ:

$$4\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4}{525}$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 = -\frac{4}{525}$$

بحل المعادلتين ينتج أنّ:

$$\varphi_1 = \frac{4}{1575}\,rad \quad ; \quad \varphi_2 = -\frac{4}{1575}\,rad$$

حساب العزوم في مساند الجائز بموجب العلاقة (5):

$$M_0 = 0 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3 (2 \cdot 0 + \frac{4}{1575}) = 35{,}56\ kNm$$

$$M_1 = 0 - 2 \cdot 7 \cdot 10^3 (2 \cdot \frac{4}{1575} + 0) = -71{,}11\ kNm$$

أو:

$$M_1 = -106{,}67 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3 (2 \cdot \frac{4}{1575} - \frac{4}{1575}) = -71{,}11\ kNm$$

$$M_2 = -106{,}67 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3 (2 \cdot (-\frac{4}{1575}) + \frac{4}{1575}) = -71{,}11\ kNm$$

أو:

$$M_2 = 0 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3 (2 \cdot (-\frac{4}{1575}) + 0) = -71{,}11\ kNm$$

$$M_3 = 0 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3 (2 \cdot 0 - \frac{4}{1575}) = 35{,}56\ kNm$$

فتكون معادلات العزم والقص في الفتحات الثلاث على الترتيب هي:

$$M = 35{,}56\,(1 - \frac{x}{8}) - 71{,}11\,\frac{x}{8} + 0 = -13{,}33\,x + 35{,}56$$

$$Q = \frac{-71{,}11 - 35{,}56}{8} + 0 = -13{,}33\ kN$$

$$M = -71{,}11\,(1 - \frac{x}{8}) - 71{,}11\,\frac{x}{8} + 80\,x - 10\,x^2 = -10\,x^2 + 80\,x - 71{,}11$$

$$Q = -20\,x + 80$$

$$M = -71,11(1-\frac{x}{8}) + 35,56\ \frac{x}{8} + 0 = 106,68\ x - 71,11 \quad , \quad Q = 13,33\ kN$$

– تأثير انتقالات المساند بمفردها

بما أنّ الجائز موثوق الطرفين وفتحاته متساوية الطول والصلابة، لذلك نستطيع استخدام العلاقة المختصرة (16) في الحل بعد الإسقاط منها للحد الطرفي اليميني الممثل لتأثير الحمولات الخارجية، لتأخذ الشكل:

$$\varphi_{i-1} + 4\varphi_i + \varphi_{i+1} = 3(\Delta_{i+1} - \Delta_{i-1})\frac{1}{l}$$

إذ ينتج عن تطبيقها على العقدتين في المسندين 1 و 2 أنّ:

$$0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = 3(0-0)\frac{1}{8}$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 + 0 = 3(0-0,02)\frac{1}{8}$$

نستخلص من إصلاح المعادلتين أنّ:

$$4\varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 = -\frac{0,06}{8}$$

بحل المعادلتين ينتج أنّ:

$$\varphi_1 = 5\cdot 10^{-4}\ rad \qquad ; \qquad \varphi_2 = -2\cdot 10^{-3}\ rad$$

حساب العزوم في مساند الجائز بموجب العلاقة (15):

$$M_0 = 0 + 2\cdot 7\cdot 10^3[2\cdot 0 + 5\cdot 10^{-4} + 3(0-0,02)/8] = -98\ kNm$$

$$M_1 = 0 - 2\cdot 7\cdot 10^3[2\cdot 5\cdot 10^{-4} + 0 - 3(0,02-0)/8] = 91\ kNm$$

أو:

$$M_1 = 0 + 2\cdot 7\cdot 10^3[2\cdot 5\cdot 10^{-4} - 2\cdot 10^{-3} + 3(0,02-0)/8] = 91\ kNm$$

$$M_2 = 0 - 2\cdot 7\cdot 10^3[2\cdot(-2\cdot 10^{-3}) + 5\cdot 10^{-4} - 3(0-0,02)/8] = -56\ kNm$$

أو:

$$M_2 = 0 + 2\cdot 7\cdot 10^3[2\cdot(-2\cdot 10^{-3}) + 0 + 3(0-0)/8] = -56\ kNm$$

$$M_3 = 0 - 2\cdot 7\cdot 10^3[2\cdot 0 - 2\cdot 10^{-3} - 3(0-0)/8] = 28\ kNm$$

فتكون معادلات العزم والقص في الفتحات الثلاث على الترتيب هي:

$$M = -98(1-\frac{x}{8}) + 91\ \frac{x}{8} + 0 = 23,625\ x - 98 \quad , \quad Q = \frac{dM}{dx} = 23,625\ kN$$

$$M = 91(1-\frac{x}{8}) - 56\ \frac{x}{8} + 0 = -18,375\ x + 91 \quad , \quad Q = \frac{dM}{dx} = -18,375\ kN$$

$$M = -56(1-\frac{x}{8}) + 28\ \frac{x}{8} + 0 = 10,5x - 56 \quad , \quad Q = \frac{dM}{dx} = 10,5\ kN$$

2– التأثير المشترك للحمولات الخارجية وانتقالات المساند

استخدام المعادلة (16):

بما أنّ الجائز موثوق الطرفين وفتحاته متساوية الطول والصلابة، لذلك نستطيع استخدام العلاقة المختصرة (16) في الحل، لنجد أنّ:

$$0 + 4\varphi_1 + \varphi_2 = 3(0 - 0)\frac{1}{8} + 0.5(0 + 106,67)\frac{8}{56 \cdot 10^3}$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 + 0 = -3(0 + 0,02)\frac{1}{8} + 0.5(-106,67 - 0)\frac{8}{56 \cdot 10^3}$$

نستخلص من إصلاح المعادلتين أنّ:

$$4\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4}{525}$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 = -\frac{127}{8400}$$

بحل المعادلتين ينتج أنّ:

$$\varphi_1 = \frac{383}{126000}\,rad \quad ; \quad \varphi_2 = -\frac{143}{31500}\,rad$$

حساب العزوم في مساند الجائز بموجب العلاقة (15):

$$M_0 = 0 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3[2 \cdot 0 + \frac{383}{126000} + 3(0 - 0,02)/8] = -62,44\ kNm$$

$$M_1 = 0 - 2 \cdot 7 \cdot 10^3[2 \cdot \frac{383}{126000} + 0 - 3(0,02 - 0)/8] = 19,89\ kNm$$

أو:

$$M_1 = -106,67 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3[2 \cdot \frac{383}{126000} - \frac{143}{31500} + 3(0,02 - 0)/8] = 19,89\ kNm$$

$$M_2 = -106,67 - 2 \cdot 7 \cdot 10^3[2 \cdot (-\frac{143}{31500}) + \frac{383}{126000} - 3(0 - 0,02)/8] = -127,11\ kNm$$

أو:

$$M_2 = 0 + 2 \cdot 7 \cdot 10^3[2 \cdot (-\frac{143}{31500}) + 0 + 3(0 - 0)/8] = -127,11\ kNm$$

$$M_3 = 0 - 2 \cdot 7 \cdot 10^3[2 \cdot 0 - \frac{143}{31500} - 3(0 - 0)/8] = 63,56\ kNm$$

فتكون معادلات العزم والقص في الفتحات الثلاث على الترتيب هي:

$$M = -62,44(1 - \frac{x}{8}) + 19,89\frac{x}{8} + 0 = 10,29x - 62,44 \quad , \quad Q = \frac{19,89 + 62,44}{8} + 0 = 10,29\ kN$$

$$M = 19,89(1 - \frac{x}{8}) - 127,11\frac{x}{8} + 80x - 10x^2 = -10x^2 + 61,625x + 19,89 \quad , \quad Q = -20x + 61,625$$

$$M = -127,11(1 - \frac{x}{8}) + 63,65\frac{x}{8} + 0 = 23,845x - 127,11 \quad , \quad Q = 23,845\ kN$$

استخدام المعادلة (12):

بما أنّ فتحات الجائز متساوية الطول والصلابة، لذلك نستطيع استخدام العلاقة (12) في الحل، لنجد أنّ:

$$2 \cdot 0 + (4 + 4)\varphi_1 + 2\varphi_2 = [(2 + 4)(0,02 - 0) - (2 + 4)(0,02 - 0)]\frac{1}{8} + (0 + 106,67)\frac{8}{56 \cdot 10^3}$$

$$2\varphi_1 + (4 + 4)\varphi_2 + 2 \cdot 0 = [(2 + 4)(0 - 0,02) - (2 + 4)(0 - 0)]\frac{1}{8} + (-106,67 - 0)\frac{8}{56 \cdot 10^3}$$

نستخلص من إصلاح المعادلتين والاختصار أنّ:

$$4\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{4}{525}$$

$$\varphi_1 + 4\varphi_2 = -\frac{127}{8400}$$

بحل المعادلتين ينتج أنّ:

$$\varphi_1 = \frac{383}{126000}\,rad \quad ; \quad \varphi_2 = -\frac{143}{31500}\,rad$$

حساب العزوم في مساند الجائز بموجب العلاقة (15):

$$M_0 = 0 + 7\cdot 10^3[0 + 2\cdot\frac{383}{126000} + (4+2)\frac{0}{8} - (4+2)\frac{0{,}02}{8})] = -62{,}44\ kNm$$

$$M_1 = 0 - 7\cdot 10^3[2\cdot 0 + 4\cdot\frac{383}{126000} - (2+4)\frac{0{,}02}{8} + (4+2)\frac{0}{8}] = 19{,}89\ kNm$$

أو:

$$M_1 = -106{,}67 + 7\cdot 10^3[4\cdot\frac{383}{126000} + 2\cdot(-\frac{143}{31500}) + (4+2)\frac{0{,}02}{8} - (4+2)\frac{0}{8})] = 19{,}89\ kNm$$

$$M_2 = -106{,}67 - 7\cdot 10^3[2\cdot\frac{383}{126000} + 4(-\frac{143}{31500}) - (4+2)\frac{0}{8} + (4+2)\frac{0{,}02}{8})] = -127{,}11\ kNm$$

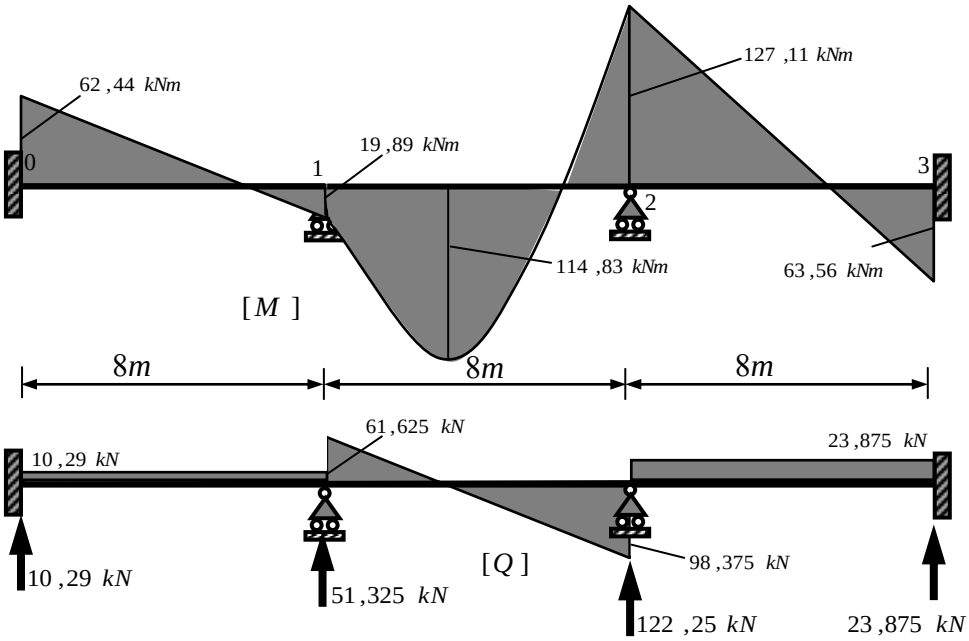
أو:

$$M_2 = 0 + 7\cdot 10^3[4\cdot(-\frac{143}{31500}) + 2\cdot 0 + (4+2)\frac{0}{8} - (4+2)\frac{0}{8})] = -127{,}11\ kNm$$

$$M_3 = 0 - 7\cdot 10^3[2\cdot(-\frac{143}{31500}) + 4\cdot 0 - (2+4)\frac{0}{8} + 0] = 63{,}56\ kNm$$

يلاحظ من التدقيق في نتائج استخدام المعادلتين (12) و (16) في التأثير المشترك للحمولات وانتقالات المساند، أنّها متطابقة تماماً من جهة، وتساوي لمجموع النتائج المحسوبة بالتأثير المستقل لكلٍ من الحمولات وانتقالات المساند من جهةٍ ثانيةٍ.

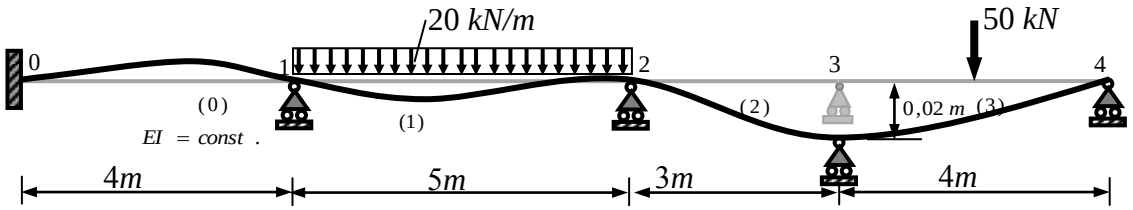
لذلك، يكون مخططا العزم والقص المتشكلين نتيجة تأثير حمولات الجائز وانتقال مسنده 1 هما المبينان في الشكل (8).



شكل (8): مخططا العزم والقص وردود أفعال المساند

مثال 2:

يبيّن الشكل (9) جائزاً موثوقاً في طرفه اليساري ومتمفصلاً في طرفه اليميني، ومكوناً من أربع فتحات عطالاتها ثابتة. الفتحة الثانية منه محملة بحمولة موزعة *20kN/m*، ومسنده 3 هابط بمقدار 0,02 m. حيث إنّ $EI = 5 \cdot 10^4 \ kN \ m^2$.



شكل (9): جائز محمل مع انتقال لمسنده 3

سوف نجري الدراسة لهذا الجائز، مرة بموجب المعادلة (11)، وأخرى بموجب المعادلة (14).

يلاحظ أنّ فتحات الجائز مختلفة الطول، لذلك فإنّ:

$$\lambda_0 = EI / l_0 = 5 \cdot 10^4 / 4 = 1,25 \cdot 10^4 \ kN \ m \quad , \quad \lambda_1 = EI / l_1 = 5 \cdot 10^4 / 5 = 10^4 \ kN \ m$$

$$\lambda_2 = EI / l_2 = 5 \cdot 10^4 / 3 = 1,66 \cdot 10^4 \ kN \ m \quad , \quad \lambda_3 = EI / l_3 = 5 \cdot 10^4 / 4 = 1,25 \cdot 10^4 \ kN \ m$$

وإنّ عزوم الحمولات الخارجية في وثاقات العقد المسندية لفتحات الجائز، بحسب الصيغ المرجعية هي:

$$M_{0r}=0\ ;\ M_{1l}=0\ ,\ M_{1r}=-\frac{20\cdot 5^{2}}{12}=-41,67\ kNm$$

$$M_{2l}=-\frac{20\cdot 5^{2}}{12}=-41,67\ kNm\ ,\ M_{2r}=0\ ,\ M_{3l}=0\ ,\ M_{3r}=-37,5\ kNm\ ,\ M_{4}=0$$

كما إنّ قيم انتقالات مساند الجائز المبيّنة على الشكل (9) هي:

$$\Delta_0=0\ ,\ \Delta_1=0\ ,\ \Delta_2=0\ ,\ \Delta_3=0,02\ m\ ,\ \Delta_4=0$$

استخدام المعادلة (11)

استخدام هذه العلاقة على العقد الثلاثة 1, 2, و 3 يعطي أنّ:

$$2\cdot 1,25\cdot 10^{4}\cdot 0+(4\cdot 1,25\cdot 10^{4}+4\cdot 10^{4})\varphi_1+2\cdot 10^{4}\varphi_2=$$
$$(2+4)\cdot 1,25\cdot 10^{4}(0-0)/4-(2+4)(0-0)/5+0-(-41,67)$$
$$2\cdot 10^{4}\varphi_1+(4\cdot 10^{4}+4\cdot 1,66\cdot 10^{4})\varphi_2+2\cdot 1,66\cdot 10^{4}\varphi_3=$$
$$(2+4)\cdot 10^{4}(0-0)/5-(2+4)\cdot 1,66\cdot 10^{4}(0-0,02)/3+(-41,67)-0$$
$$2\cdot 1,66\cdot 10^{4}\varphi_2+(4\cdot 1,66\cdot 10^{4}+4\cdot 1,25\cdot 10^{4})\varphi_3+0\cdot 1,25\cdot 10^{4}\varphi_4=$$
$$(2+4)\cdot 1,66\cdot 10^{4}(0,02-0)/3-(0+3)\cdot 1,25\cdot 10^{4}(0,02-0)/4+0-(-37,5)$$

نستخلص من إصلاح المعادلات السابقة والاختصار أنّ:

$$9\varphi_1+2\varphi_2=41,67\cdot 10^{-4}$$
$$2\varphi_1+10,64\varphi_2+3,32\varphi_3=622,333\cdot 10^{-4}$$
$$3,32\varphi_2+11,64\varphi_3=514\cdot 10^{-4}$$

بحل المعادلات الثلاث ينتج أنّ:

$$\varphi_1=-6,28\cdot 10^{-4}\ rad\quad ;\quad \varphi_2=4,91\cdot 10^{-3}\ rad\quad ;\quad \varphi_3=3,38\cdot 10^{-3}\ rad$$

حساب العزوم في مساند الجائز بموجب العلاقة (13):

$$M_0=0+1,25\cdot 10^{4}[4\cdot 0+2\cdot(-6,25\cdot 10^{-4})+(4+2)\frac{0}{4}-(4+2)\frac{0}{5}]=-15,7\ kNm$$

$$M_1=0-1,25\cdot 10^{4}[2\cdot 0+4\cdot(-6,25\cdot 10^{-4})-(2+4)\frac{0}{4}+(4+2)\frac{0}{4}]=31,4\ kNm$$

أو:

$$M_1=-41,67+10^{4}[4\cdot(-6,25\cdot 10^{-4})+2\cdot 4,91\cdot 10^{-3}+(4+2)\frac{0}{5}-(4+2)\frac{0}{5}]=31,4\ kNm$$

$$M_2=-41,67-10^{4}[2(-6,25\cdot 10^{-4})+4\cdot 4,91\cdot 10^{-3}-(2+4)\frac{0}{5}+(4+2)\frac{0}{5}]=-225,7\ kNm$$

أو:

$$M_2=0+1,66\cdot 10^{4}[4\cdot 4,91\cdot 10^{-3}+2\cdot 3,38\cdot 10^{-3}+(4+2)\frac{0}{3}-(4+2)\frac{0,02}{3}]=-225,7\ kNm$$

$$M_3=0-1,66\cdot 10^{4}[2\cdot 4,91\cdot 10^{-3}+4\cdot 3,38\cdot 10^{-3}-(2+4)\frac{0,02}{3}+(2+4)\frac{0}{3}]=+276,6\ kNm$$

فتكون معادلات العزم والقص في الفتحات الأربع على الترتيب هي:

$$M=-15,7(1-\frac{x}{4})+31,4\frac{x}{4}+0=47,1\frac{x}{4}-15,7\ ,\ Q=11,775\ kN$$

$$M = 31,4(1-\frac{x}{5}) - 225,6\frac{x}{5} + 50x - 10x^2 = -10x^2 - 1,4x + 31,4 \quad , \quad Q = -20x - 1,4$$

$$M = -225,6(1-\frac{x}{3}) + 276,56\frac{x}{3} + 0 = 167,39x - 225,6 \quad , \quad Q = 167,39\ kN$$

$: 0 \le x \le 2m$

$$M = 276,6(1-\frac{x}{4}) + 0 + 25x = -44,15x + 276,6 \quad , \quad Q = -44,15\ kN$$

$: 2 \le x \le 4m$

$$M = 276,6(1-\frac{x}{4}) + 25x - 50(x-2) = -94,15x + 376,6 \quad , \quad Q = -94,15\ kN$$

استخدام المعادلة (14)

استخدام هذه العلاقة على العقد الثلاثة 1, 2, و 3 يعطي أنّ:

$$1,25 \cdot 0 + 2(1,25+1)\varphi_1 + \varphi_2 = 3(0-0)/4 - 3(0-0)/5 + 0,5(0-(-41,67)) \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_1 + 2(1+1,66)\varphi_2 + 1,66\varphi_3 = 3(0-0)/5 - 3 \cdot 1,66(0-0,02)/3 + 0,5(-41,67-0) \cdot 10^{-4}$$

$$1,66\varphi_2 + 2(1,66+1,25)\varphi_3 + 1,25\varphi_4 =$$

$$3 \cdot 1,66(0,02-0)/3 - 3 \cdot 1,25(0,02-0)/4 + 0,5(0-(-25)) \cdot 10^{-4}$$

$$1,25\varphi_3 + 2(1,25+0)\varphi_4 + 0 = 3 \cdot 1,25(0-0,02)/4 - 3 \cdot 0 + 0,5(-25-0) \cdot 10^{-4}$$

نستخلص من إصلاح المعادلات السابقة والاختصار أنّ:

$$4,5\varphi_1 + \varphi_2 = 20,835 \cdot 10^{-4}$$

$$\varphi_1 + 5,32\varphi_2 + 1,66\varphi_3 = 311,17 \cdot 10^{-4}$$

$$1,66\varphi_2 + 5,82\varphi_3 + 1,25\varphi_4 = 157 \cdot 10^{-4}$$

$$1,25\varphi_3 + 2,5\varphi_4 = -200 \cdot 10^{-4}$$

بحل المعادلات الأربعة ينتج أنّ:

$$\varphi_1 = -6,28 \cdot 10^{-4}\ rad \quad ; \quad \varphi_2 = 4,91 \cdot 10^{-3}\ rad \quad ; \quad \varphi_3 = 3,38 \cdot 10^{-3}\ rad \quad ; \quad \varphi_4 = -9,7 \cdot 10^{-3}\ rad$$

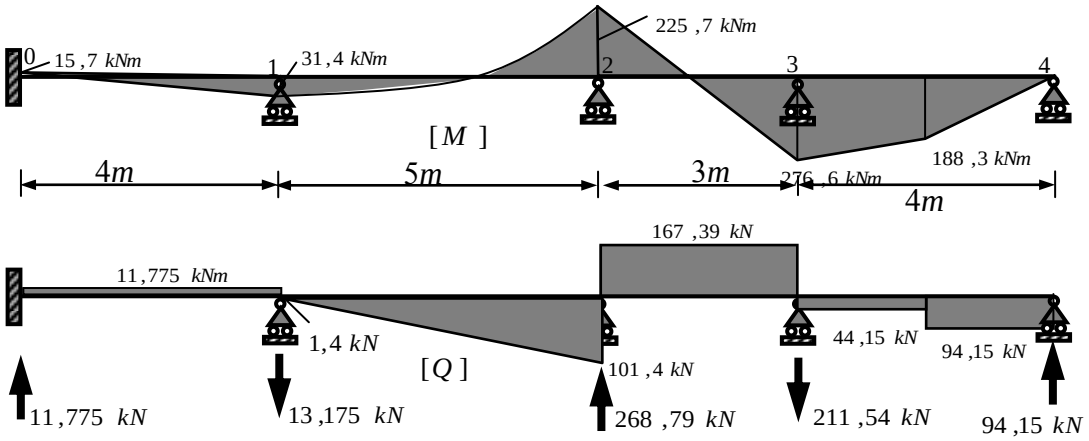
حساب العزوم في مساند الجائز بموجب العلاقة (15):

$$M_0 = 0 + 2 \cdot 1,25 \cdot 10^4[2 \cdot 0 + (-6,25 \cdot 10^{-4}) + 3(0-0)/4] = -15,7\ kNm$$

$$M_1 = -41,67 + 2 \cdot 10^4[2 \cdot (-6,25 \cdot 10^{-4}) + 4,91 \cdot 10^{-3} + 3(0-0)/5] = 31,4\ kNm$$

$$M_2 = 0 + 2 \cdot 1,66 \cdot 10^4[2 \cdot 4,91 \cdot 10^{-3} + 3,38 \cdot 10^{-3} + 3(0-0,02)/3] = -225,7\ kNm$$

$$M_3 = -25 + 2 \cdot 1,25 \cdot 10^4[2 \cdot 3,38 \cdot 10^{-3} - 9,7 \cdot 10^{-3} + 3(0,02-0)/4] = 276,6\ kNm$$



شكل (10): مخططا العزم والقص وردود أفعال المساند

يستنتج من مقارنة استخدام العلاقتين (11) و (14)، أنّ عدد المعادلات المشكّلة اللازمة لإيجاد المجاهيل الكافية لحل الجائز المستمر باستخدام العلاقة (11) سيكون دوماً أقل من تلك المشكّلة باستخدام العلاقة (14) بعدد مساوٍ لعدد المساند المفصلية الطرفية للجائز، أي أقل بمعادلة واحدة عند وجود مسند طرفي مفصلي واحد، واثنتان بوجود مسندين طرفيين على الترتيب.

النتائج والمناقشة:

تمكّن مراجعتنا المتأنية لمضامين الصيغ المشتقة واستثمارها المباشر في التحليل الإنشائي لنماذج الجيزان المدروسة من استخلاص العديد من النتائج، وأهمها الآتي:

1- يلاحظ من خلال طرائق التحليل المعتمدة في البحث لاشتقاق صيغ معادلة الدوران الثلاثة، سواءٌ بالتأثير المستقل أو المشترك للحمولات الخارجية وانتقالات مساند الجائز، أنّ هذا الاشتقاق قد بني على المبدأ الأساس الذي لا يمكن الاستغناء عنه عند التحليل بطريقة الانتقالات، والمتمثل بعزل العقد ودراسة توازنها لتشكيل العلاقات التي تربط المجاهيل المتوفرة في الجائز المدروس.

2- تغني المعادلات المشتقة، إذاً، عن حاجة المحلل الإنشائي لعزل العقد عند دراسة الجيزان المستمرة، بل يمكن استخدامها بيسرٍ في مثل هذا التحليل بالإدخال المباشر للمعاليم المتوفرة والكافية لتشكيل المعادلات اللازمة المتوافقة مع المجاهيل المطلوبة.

3- تراعي الصيغ المشتقة حالة وثق الجائز طرفياً، الوثق الافتراضي للمسند المفصلي الطرفي من عدمه، والتي تم أخذها في الحسبان من خلال أمثال الصلابة.

4- لا يحتاج استخدام هذه الصيغ إلى المعالجة المستقلة لاتجاه الدوران الصلب θ لكل فتحة من فتحات الجائز نتيجة حدوث الانتقال في مسانده.

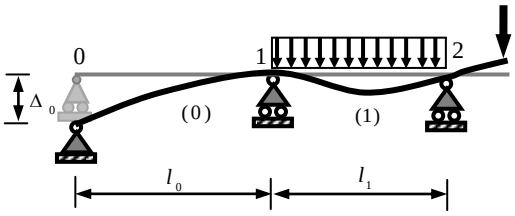
5- تتميز الصيغ المذكورة بديناميكية التحليل المطلوبة المرتبطة بعدد المجاهيل اللازمة التعريف لإيجاد التشوهات والقوى الداخلية في نقاطِ الجائزِ المختلفة وعقدِه، حيث تبين لنا من خلال التطبيقات العملية المنفذة على

نماذج الجيزان المدروسة، أن استخدام المعادلة (1) (أو المشتقة عنها (2) للفتحات المتساوية)، أو المعادلة (11) (أو المشتقة عنها (12) للفتحات المتساوية)، يسمح بتشكيل المعادلات اللازمة لحساب الدورانات في المساند المجهولة العزم فقط، وتسمح في الوقت نفسه حساب المجاهيل لجميع مسانده عند الحاجة إلى ذلك، أو الاستعاضة عنها في هذه الحال بصورتهما المبسطة في المعادلتين (4) أو (14).

6- يمكن أن يخفّض عدد المعادلات اللازمة للحل لإيجاد عزوم مساند الجائز بعدد المساند الطرفية المفصلية له، عند عدم الحاجة لحساب الدوران للجائز في هذه المساند الطرفية. أي، يكفي لإيجاد العزم في المسند الداخلي للجائز المعطى في الشكل (11)، مثلاً، تشكيل معادلة دوران واحدة بموجب المعادلة (11)، والتي ستكون من الشكل:

$$(3\lambda_0 + 3\lambda_1)\varphi_1 = -3\lambda_0 \frac{\Delta_0}{l_0} - M_{ir}$$

فهذه المعادلة كافية لإيجاد العزم في المسند الداخلي 1 بموجب الصيغة (13).



شكل (11): جائز بفتحتين وهبوط لمسنده 0

7- لأجل الحالات التي يمكن أن يحدث فيها دوران لوثاقة طرفية موجودة في الجائز، فإنه يمكن إدخال تأثير هذا الدوران إلى الصيغ المشتقة من دون أي إجراء إضافي على تلك الصيغ، وذلك بالتعويض المباشر عن قيمة هذا الدوران في معادلة الدورانات الثلاثة وسواها.

الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

1. تعالج الصيغ المشتقة في هذا العمل العلمي التأثير المشترك للحمولات الخارجية وانتقال مساند الجيزان ودوران وثاقاته الطرفية، إن وجدت ؟، على سلوك الجائز والقوى الداخلية المتشكلة فيه.

2. سميت العلاقة التي تربط الدورانات الحاصلة في عقد مساند الجائز بتأثير الحمولات الخارجية وانتقالات مسانده بمعادلة الدورانات الثلاثة، لأنّها تجسد الرابط بين كل ثلاثة دورانات متتالية من عقد الجائز.

3. لا يتطلّب استثمار هذه الصيغ في تحليل الجيزان المستمرة المعرفة الهندسية المعمّقة من قبل كلٍ من الطالب أو المهندس.

4. يمكن وضع مخطط نهجي واضح لمراحل الحل بالصيغ المشتقة وبرمجتها بيسرٍ باللغة المتوفرة لدى المحلل الإنشائي واعتماد المنهجية نفسها بالحل اليدوي بشكل واضح من دون صعوبات تذكر.

5. تتميز الصيغ المشتقة بتوفير الديناميكية السريعة في حساب الدورانات والعزوم والقص والانتقالات في مقاطع الجائز المختلفة ونقاطِه، حتى عند تحرك حمولة حية على هذا الجائز من مجال إلى آخر.

6. يستنتج من المعرفة المتوفرة أنّ عدد المعادلات اللازم تشكيلها لحل الجائز المستمر باستخدام الصيغ المشتقة في هذا العمل العلمي سيكون أقل من عدد معادلات العزوم الثلاثة المعروفة بمعادلة واحدة لكل نهاية موثوقة للجائز، أي أنّ عدد معادلات المجاهيل سيكون أقل بمعادلتين عن حال استخدام معادلة العزوم الثلاثة للجائز الموثوق الطرفين.

التوصيات:

إنّ معادلة الدورانات الثلاثة المشتقة في هذا العمل العلمي لا تمكّن، فقط، من الحساب المبسط للدورانات والقوى الداخلية في عقد مساند الجائز المستمر، بل يمكن استثمارها على أيّ عدد مطلوب من الشرائح المعتمدة كعناصر منتهية داخل فتحات الجائز، حيث يمكن صياغتها مصفوفياً لحل جملة المعادلات اللازمة. كما يمكن تطويرها لتشتمل على العلاقة المتبادلة بين دوران العقد وانتقالاتها نتيجة التحميل الخارجي على الجائز، وخاصة تلك المستندة على مساند مرنة مستمرة أو نقطية،من دون أن نغفل إمكانية تطوير هذه المعادلة لتأخذ في الحسبان التأثير الحراري على هذه الجيزان أيضاً.

المراجع:

1- HIBBELER, R. – *Structural Analysis, 6. Edition:* Printice/Hall International, Inc. 2006

2- HIRSCHFELD, K. – Baustatik.3Aufl. Bd. I u . II,Berlin, Newyork -Tokyo: Spinger Verlag 1984

3- صقور، أكرم- مجلة جامعة تشرين- سلسلة العلوم الهندسية 2010/ المجلد 32، العدد 6، ص 9-20

4- صقور، أكرم – ميكانيك المواد، الجزء الثاني: جامعة تشرين 2012