

## دراسة الموديل الديناميكي لأجهزة التعليق في السيارات وانسيابية حركتها

الدكتور عارف علي\*  
الدكتور ياسر حسن\*\*

(تاريخ الإيداع 19 / 6 / 2013. قُبل للنشر في 20 / 8 / 2013)

### ▽ ملخص ▽

تعتبر انسيابية الحركة من أهم مميزات راحة الركوب والنقل بالسيارات ويتوقف تحقيقها على الاختيار والتصميم الصحيحين لأجهزة التعليق فيها، وهذا يتطلب بدوره دراسة الاهتزازات التي تنشأ في السيارة عند حركتها على الطريق وتحديد مميزات وسائل الارتباط المرنة والمخمدة، التي تحقق منع انتقال الاهتزازات الناشئة من التماس مع سطح الطريق إلى السائق والركاب والحمولات.

يهدف البحث إلى دراسة الاهتزازات في أجهزة التعليق والعوامل التي تؤثر في انسيابية الحركة بحسب مؤشرات الطريق ومميزات أنظمة التعليق وطبيعة الحركة والإطارات المستخدمة ومؤشراتها، وقد تبين أن انسيابية الحركة تتحسن باستخدام وسائل الإخماد الزيتية للزجة وعبور التعرجات في سطح الطريق بسرعة أقل نسبياً واستخدام إطارات ذات تركيب بخصائص خمد عالية، وتجنب زيادة ضغط الهواء في الإطارات والحمولة على محاور السيارة.

**الكلمات المفتاحية:** انسيابية الحركة، أجهزة التعليق، تردد، سعة الاهتزاز وتسارعه، الجساءة الديناميكية.

\* أستاذ مساعد - قسم هندسة القوى الميكانيكية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

\*\* مدرس - قسم هندسة القوى الميكانيكية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - اللاذقية - سورية.

## Studying of the dynamic model of the suspension system in vehicles and its movement flexibility

Dr. Aref Ali<sup>\*</sup>  
Dr. Yasser Hassan<sup>\*\*</sup>

(Received 19 / 6 / 2013. Accepted 20 / 8 / 2013)

### ▽ ABSTRACT ▽

Movement flexibility can be considered as one of comfort characteristics and transport in vehicles. Movement flexibility can be achieved according to the choosing, design of suspension system. This require studying the vibration which generate in the vehicle during its movement, on the road, and determine the damping characteristics, flexibility, correlation means, which prevent the vibration generation from roads to the driver, passengers and to the loads.

The aim of the present research is study the vibration in the suspension systems and the factors which affect the movement flexibility, according to the road indicators, the suspension systems characteristics, movement nature, and the used tires with its indicators.

**Keywords:** Smoothness of motion; Suspension system; Frequency; Amplitude and acceleration of vibration; dynamic stiffness.

---

<sup>\*</sup> Associate Professor, Department of Mechanical Power Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

<sup>\*\*</sup> Assistant Professor, Department of Mechanical Power Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

**مقدمة:**

تتطور صناعة السيارات في الآونة الأخيرة باتجاه تحسين أدائها والحصول على مميزات القدرة والاستطاعة المتلائمة مع تقليل استهلاك الوقود وتخفيف التلوث والضجيج الصادر عن محركاتها فضلاً عن تأمين راحة القيادة والركوب، ولعل من أهم مميزات راحة الركوب في السيارات انسيابية حركتها والتي تتميز بإمكانية حركة السيارة في مجال معين للسرعة من دون حدوث تأثيرات صدمية واهتزازات في السائق والركاب أو الحمولات المنقولة بواسطتها. تؤثر انسيابية الحركة في العديد من الخصائص الاستثمارية للسيارة ومنها: السرعة الوسطية لها، استهلاك الوقود، الحركة الآمنة، وعمر الخدمة للسيارة، وتجهيزاتها، وهذا ما يؤثر بدوره في كلفة نقل الركاب والحمولات واستثمار السيارة بشكل عام.

تتضمن المسألة الأساسية في حساب انسيابية حركة السيارة وتقييمها، اختيار بارامترات أجهزة التعليق فيها، تلك التي تضمن انسيابية الحركة اللازمة بحسب ظروف الطريق ونظام سرعة الحركة المحدد. من أهم مراحل تصميم أجهزة التعليق اللازمة للسيارة وإنتاجها، دراسة الاهتزازات التي يمكن أن تنشأ فيها عند حركة السيارة، إذ تؤدي كتلة السيارة وأجزائها اهتزازات خطية وزاوية نسبة إلى محاورها الطولي والعرضي والشاقولي، وتحصل تلك الاهتزازات بترددات مختلفة يمكن تقسيمها إلى ثلاثة مجالات:

ترددات منخفضة حتى 20 Hz ومتوسطة حتى 100 Hz - 20 وعالية فوق 100 Hz .

تنشأ الاهتزازات ذات الترددات المنخفضة عن التأثير المتبادل بين العجلات والطريق ويتوقف مستواها على عدم سوية الطريق وسرعة الحركة، ومميزات أجهزة التعليق في السيارة، أما الترددات المتوسطة والعالية والتي نسميها (اهتزازات رجاجة أو ارتجاج) فتتوقف على عمل المحرك وأجهزة نقل الحركة ولا تتعلق عملياً بعدم سوية الطريق أو بروفيل سطحها أو بارامترات أجهزة التعليق.

يتوقف مدى تأثير الاهتزازات في الإنسان على تردد تلك الاهتزازات إذ يكون الإنسان أكثر حساسية إلى الاهتزازات العمودية بتردد (4 - 8 Hz) وإلى الترددات الأفقية بتردد (1 - 2 Hz)، ولهذا فإنه عند دراسة الاهتزازات وحسابها يتم تقسيمها بحسب الترددات إلى مجالات وإلى أجزاء لها (أطياف) حيث تعطي المصادر [2], [1] المعايير المسموح بها للاهتزازات التي تؤثر في الإنسان وطريقة تسلسل تحديدها والبارامترات المميزة لها مثل متوسط مربع سرعة الاهتزاز  $\sigma_z$  ومستواها اللوغارتمي  $L \sigma_z$  وتسارع الاهتزاز  $\sigma_z''$ .

تعتمد معايير تقييم الاهتزازات بالنسبة للسيارة تلك الاهتزازات وفقاً لمحورها الطولي والعرضي من خلال تسارع الاهتزاز الذي يصيب مقعد السائق ومقاعد جلوس الركاب. كما تتحدد معايير انسيابية حركة السيارات الخفيفة والشاحنات والباصات وغيرها نسبة إلى أنواع محددة من الطرق تختلف بتركيب سطحها وخشونته وتغير بروفيلها حيث تُعطى قيم تسارع الاهتزازات المسموح بها  $z''$  [m/s<sup>2</sup>] مؤشراً لتحديد انسيابية الحركة.

**هدف البحث وأهميته:**

يعتبر تقليل الاهتزازات الناشئة في السيارات والآليات عند حركتها من المهام المطروحة أمام مصممي السيارات ومنتجها، لتأمين مؤشرات استثمارية عالية للسيارة؛ منها السرعة، واستهلاك الوقود، وعمر الخدمة، فضلاً عن راحة الركوب فيها لما للاهتزازات من تأثير سلبي أيضاً، في صحة الإنسان وسلامته. لذلك هدف البحث إلى وضع موديل

رياضي لأجهزة التعليق في السيارات، من أجل وصف الاهتزازات فيها، ودراسة تأثير العوامل المختلفة على انسيابية الحركة والاختيار الصحيح لمميزات أنظمة التعليق والبارامترات المؤثرة الأخرى.

## طرائق البحث ومواده:

### النموذج الرياضي لأجهزة التعليق:

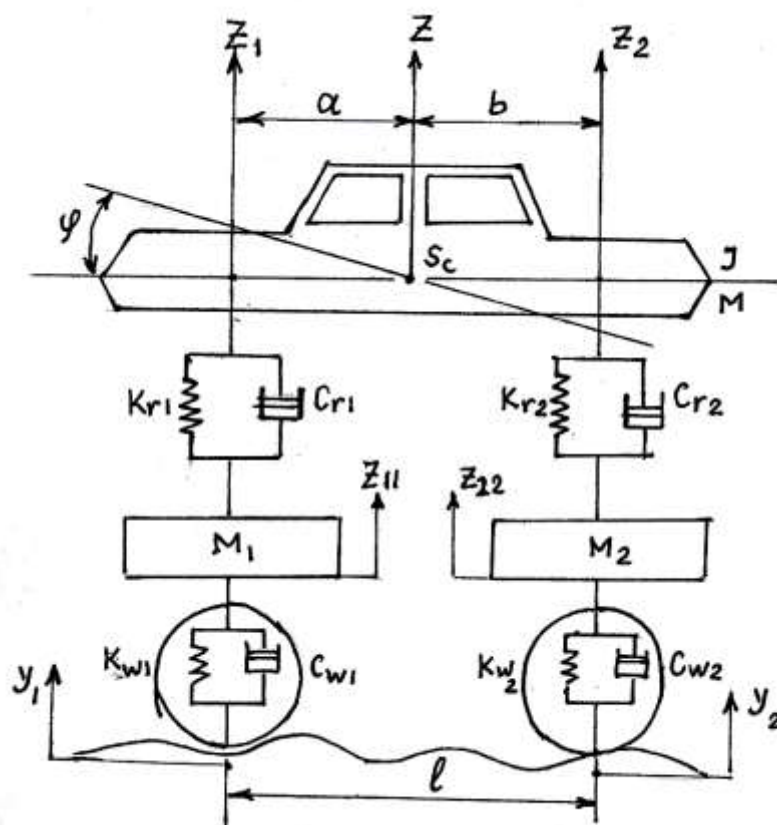
تعمل أجهزة التعليق في السيارات بوصفها وسيلة اتصال واستناد وربط لهيكل السيارة على الجسور أو حوامل العجلات، وهي تتلقى الصدمات من سطح الطريق عبر الدواليب بشكل مرن وتعمل على امتصاص طاقة الاهتزازات لمنع وصولها قدر الإمكان إلى السائق وركاب السيارة أو بمعنى آخر، تعمل أجهزة التعليق على تحقيق الحركة الانسيابية للسيارة.

تُمثل السيارة نظاماً اهتزازياً معقداً *complex vibratory system* مؤلفاً من العديد من الكتل المتصلة فيما بينها بعناصر مرنة، حيث ينشأ في تلك الكتل عند حركة السيارة اهتزازات زاوية وخطية؛ تلك التي يُعتبر مصدر التحريض الأساسي لها عدم سوية الطريق التي تتحرك عليها السيارة.

يُستخدم عند دراسة انسيابية حركة السيارة وحسابها نموذج لها بعدد محدد من الكتل، إذ تقسم السيارة إلى قسمين: كتل خاضعة لتأثير المرونة وكتل غير خاضعة لها؛ أي إن قوى الثقالة الناتجة عن الكتل الأولى (هيكل السيارة) *chassis* تؤثر في العناصر المرنة في أنظمة التعليق بينما الكتل المتبقية (الجسور والإطارات) فقوى الثقالة الناتجة عنها لا تصيب العناصر المرنة في أنظمة التعليق للسيارة وإنما تؤثر في مرونتها الذاتية (المعادن المستخدمة والإطارات المطاطية).

يتم توحيد الكتل الخاضعة للمرونة في كتلة واحدة  $M$  لها عزوم عطالة حول المحاور  $x, y, z$  هي  $J_x, J_y, J_z$  على التوالي أي حول المحور الطولي والعرضي والشاقولي المارة من مركز الثقل للسيارة  $S_c$ . كما تعتبر الكتل غير الخاضعة للمرونة كتلاً مركزة في موقعين بحسب المحاور المعتمدة في تصميم السيارة مثلاً. بهذا الشكل يكون للكتلة  $M$  ست درجات حرية إذ يمكنها أن تؤدي ثلاثة انزياحات خطية وثلاثة أخرى زاوية بالنسبة للمحاور  $x, y, z$  والتي يعتبر مركزها (0) منطبقاً على مركز الثقل للكتل الموجودة في النظام المدروس.

بيّن تحليل الدراسات حول المواصفات الاستثمارية للسيارات وحركتها [3] أن أهم ما يؤثر في انسيابية حركة السيارة نوعان من الاهتزازات للكتل الخاضعة للمرونة وهي الخطية الشاقولية (الارتفاع باتجاه الأعلى) والزاوية الطولية (الانقلاب باتجاه المقدمة) بينما لا تشكل بقية الاهتزازات تأثيراً واضحاً في انسيابية حركة السيارة وهذا ما يسمح بتبسيط المسألة وتحويل الموديل الديناميكي *dynamic model* الفراغي إلى مستو بحيث يبدو للسيارة ذات المحورين كما في الشكل(1).



الشكل (1): الموديل الديناميكي ذو الكتل الثلاث لنظام التعليق في السيارات.

تتحرك الكتلة الخاضعة للمرونة  $M$  باتجاه المحور الشاقولي  $Z$  ويمكن أن تحقق اهتزازات زاوية (حركة زاوية) وفق  $\varphi$  نسبة إلى مركز الثقل  $S_c$  وهنا يكون عزم عطالتها  $J_M = M \cdot \rho^2$  حيث  $\rho$  نصف قطر العطالة للسيارة. تتحرك الكتلتان  $M_1, M_2$  غير الخاضعتين للمرونة وفقاً للإحداثيات  $Z_{11}, Z_{22}$  ويكون للعناصر المرنة في أجهزة التعليق الأمامية والخلفية عوامل الصلابة  $K_{r2}, K_{r1}$  على التوالي وللمخمدمات المستخدمة ثوابت إخماد  $C_{r2}, C_{r1}$ ، بينما نرسم لجساءة الإطارات الأمامية والخلفية (عوامل صلابتها)  $K_{w2}, K_{w1}$ ، وعوامل أو ثوابت الإخماد لها  $C_{w2}, C_{w1}$  على التوالي. يكون مصدر التحريض الحركي لحصول الاهتزازات في السيارة هو عدم سوية الطريق تحت العجلات وفقاً للانزياحات الحاصلة فيها  $y_2, y_1$ .

بهذا الشكل فإن الموديل الديناميكي لأجهزة التعليق ذو أربع درجات حرية (عدد الإحداثيات اللازمة لتحديد الحركة الاهتزازية لعناصر النظام) والتي تتطابق مع الإحداثيات العامة  $Z, Z_{11}, Z_{22}, \varphi$ .

من أجل الحصول على الحركة الحاصلة نستخدم معادلة لاغرانج المعروفة (Lagrange's Equation):

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} = Q \quad (1)$$

حيث  $q_i$  الإحداثيات المعممة.

$E_p, E_k$  الطاقتان: الحركية والكامنة.

$E_D$  طاقة الإخماد (امتصاص طاقة الاهتزازات) (damping Energy)

ولدينا هنا أيضاً:

$$\frac{\partial E_k}{\partial q_i} = 0 \quad \text{فالطاقة الحركية غير متعلقة بالانزياح الحاصل}$$

$$Q = 0 \quad \text{لا يوجد تأثير للقوى الخارجية.}$$

وتكون الطاقة الحركية في النظام المدروس:

$$E_k = \frac{1}{2} M \cdot Z^2 + \frac{1}{2} J \cdot \varphi^2 + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot Z_{11}^2 + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot Z_{22}^2 \quad (2)$$

والطاقة الكامنة:

$$E_p = \frac{1}{2} K_{r1} \cdot \Delta_1^2 + \frac{1}{2} K_{r2} \cdot \Delta_2^2 + \frac{1}{2} K_{w1} \cdot \Delta_{w1}^2 + \frac{1}{2} K_{w2} \cdot \Delta_{w2}^2 \quad (3)$$

حيث  $\Delta_1, \Delta_2$  الانفعال أو التشوه في العناصر المرنة لأجهزة التعليق الأمامية والخلفية على التوالي:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= Z_{11} - Z_1 \\ \Delta_2 &= Z_{22} - Z_2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$\Delta_{w1}, \Delta_{w2}$  التشوه أو الانفعال القطري في العجلات الأمامية والخلفية على التوالي:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{w1} &= y_1 - z_{11} \\ \Delta_{w2} &= y_2 - z_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

يكون للانزياحين  $z_1, z_2$  للكتلة  $M$  الخاضعة للمرونة فوق الجسرين الأمامي والخلفي للسيارة:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= z + a \cdot \varphi \\ z_2 &= z - b \cdot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

فتصبح العلاقة (3) بالشكل:

$$E_p = \frac{1}{2} K_{r1} (z_{11} - z - a \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2} K_{r2} (z_{22} - z + b \cdot \varphi)^2 + \frac{1}{2} K_{w1} (y_1 - z_{11})^2 + \frac{1}{2} K_{w2} (y_2 - z_{22})^2 \quad (7)$$

أما طاقة الإخماد في النظام المدروس:

$$E_D = \frac{1}{2} C_{r1} \cdot \Delta_1^2 + \frac{1}{2} C_{r2} \cdot \Delta_2^2 + \frac{1}{2} C_{w1} \cdot \Delta_{w1}^2 + \frac{1}{2} C_{w2} \cdot \Delta_{w2}^2 \quad (8)$$

أو بإدخال القيم من (6), (5), (4) تصبح العلاقة (8) بالشكل:

$$E_D = \frac{1}{2} C_{r1} (z'_{11} - z' - a \cdot \varphi')^2 + \frac{1}{2} C_{r2} (z'_{22} - z' + b \cdot \varphi')^2 + \frac{1}{2} C_{w1} (y'_1 - z'_{11})^2 + \frac{1}{2} C_{w2} (y'_2 - z'_{22})^2 \quad (9)$$

نوجد الآن تفاضلات  $E_k, E_p, E_D$  بالنسبة للإحداثيات المعتمدة  $z, \varphi, z_{11}, z_{22}$  ثم نعوض القيم الناتجة للمشتقات في معادلة لاغرانج (1) وبعد الإصلاح نحصل على مجموعة من المعادلات مساوية لعدد الإحداثيات المعتمدة:

$$(M \cdot z'' + C_r z' + K_r \cdot z) + (A\varphi' + B \cdot \varphi) - (C_{r1} \cdot z'_{11} + K_{r1} \cdot z_{11}) - (C_{r2} \cdot z'_{22} + K_{r2} \cdot z_{22}) = 0 \quad (10)$$

$$(J \cdot \varphi'' + D\varphi' + E \cdot \varphi) + (Az' + B \cdot z) - a(C_{r1} \cdot z'_{11} + K_{r1} \cdot z_{11}) - b(C_{r2} \cdot z'_{22} + K_{r2} \cdot z_{22}) = 0 \quad (11)$$

$$(M_1 \cdot z''_{11} + C_1 z'_{11} + K_1 \cdot z_{11}) + (C_{r1} z' + K_{r1} z) - a(C_{r1} \cdot \varphi' + K_{r1} \cdot \varphi) = C_{w1} \cdot y'_1 + K_{w1} \cdot y_1 \quad (12)$$

$$(M_2 \cdot z''_{22} + C_2 z'_{22} + K_2 \cdot z_{22}) + (C_{r2} z' + K_{r2} z) + b(C_{r2} \cdot \varphi' + K_{r2} \cdot \varphi) = C_{w2} \cdot y'_2 + K_{w2} \cdot y_2 \quad (13)$$

حيث لدينا في تلك العلاقات ثوابت الإخماد والمرونة المكافئة:

$$C_r = C_{r1} + C_{r2} \quad , \quad C_1 = C_{r1} + C_{w1} \quad , \quad C_2 = C_{r2} + C_{w2} \\ K_r = K_{r1} + K_{r2} \quad , \quad K_1 = K_{r1} + K_{w1} \quad , \quad K_2 = K_{r2} + K_{w2}$$

وللتوابت A , B , C , D القيم:

$$A = C_{r1} \cdot a - C_{r2} \cdot b \quad , \quad B = K_{r1} \cdot a - K_{r2} \cdot b \\ D = C_{r1} \cdot a^2 + C_{r2} \cdot b^2 \quad , \quad C = K_{r1} \cdot a^2 + K_{r2} \cdot b^2$$

يمكن التعبير عن الإحداثيات  $Z$  ,  $\varphi$  بدلالة  $Z_1$  ,  $Z_2$  من العلاقات (6):

$$\varphi = (z_1 - z_2) / \ell \quad , \quad Z = (bz_1 + az_2) / \ell$$

ويصبح عندها مشتق الطاقة الحركية  $E_k$  بالنسبة إلى  $Z_1$  ,  $Z_2$  بالشكل:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_k}{\partial z_1} \right] &= \frac{M}{\ell^2} (b^2 + \rho^2) \cdot Z''_1 + \frac{M}{\ell^2} (a \cdot b - \rho^2) \cdot Z''_2 \\ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial E_k}{\partial z_2} \right] &= \frac{M}{\ell^2} (a^2 + \rho^2) \cdot Z''_2 + \frac{M}{\ell^2} (a \cdot b - \rho^2) \cdot Z''_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

وبالتالي تأخذ معادلات الحركة (13) , (12) , (11) , (10) الشكل التالي:

$$\left. \begin{aligned} M_F \cdot Z''_1 + C_{r1} \cdot Z'_1 + K_{r1} \cdot Z_1 - M \frac{\rho^2 - a \cdot b}{\ell^2} \cdot Z''_2 - C_{r1} \cdot Z'_{11} - K_{r1} \cdot Z_{11} &= 0 \\ M_R \cdot Z''_2 + C_{r2} \cdot Z'_2 + K_{r2} \cdot Z_2 - M \frac{\rho^2 - a \cdot b}{\ell^2} \cdot Z''_1 - C_{r2} \cdot Z'_{22} - K_{r2} \cdot Z_{22} &= 0 \\ M_1 \cdot Z''_{11} + C_1 \cdot Z'_{11} + K_1 \cdot Z_{11} - C_{r1} \cdot Z'_1 - K_{r1} \cdot Z_1 &= C_{w1} \cdot y'_1 + K_{w1} \cdot y_1 \\ M_2 \cdot Z''_{22} + C_2 \cdot Z'_{22} + K_2 \cdot Z_{22} - C_{r2} \cdot Z'_2 - K_{r2} \cdot Z_2 &= C_{w2} \cdot y'_2 + K_{w2} \cdot y_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$M_R = M \cdot \frac{a^2 + \rho^2}{\ell^2} \quad \text{حيث: } M_R \text{ هي الكتلة على المحور الخلفي:}$$

$$M_F = M \cdot \frac{b^2 + \rho^2}{\ell^2} \quad \text{حيث: } M_F \text{ هي الكتلة على المحور الأمامي:}$$

يُعطى حل المعادلات التفاضلية الأخيرة (15) علاقة الانزياحات الحاصلة (displacements) في كتل النظام المدروس في كل لحظة من الزمن  $t$  [4], كما يمكن التوصل إلى الترددات التي تحصل بها اهتزازات الكتل وهي أربعة ترددات: اثنان عليا واثنان دنيا.

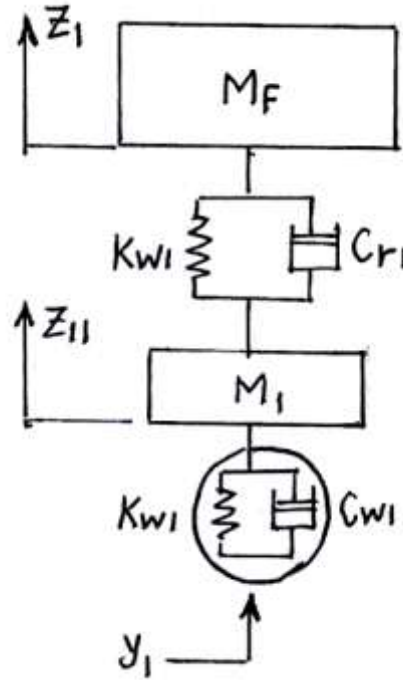
بهذا الشكل فإنه يمكن النظر إلى أنظمة التعليق في السيارة بوصفها نظاماً ديناميكياً ذا أربع كتل متصلة مركزة على المحور الأمامي  $M_F$  و  $M_1$  وعلى المحور الخلفي  $M_R$  و  $M_2$  وإذا تم تحقيق الشرط

$$a \cdot b = \rho^2 \quad (16)$$

فإن جملة المعادلات (15) تنقسم إلى قسمين مستقلين كل منهما مؤلف من معادلتين وهما تصفان اهتزاز الكتلة على المحورين الأمامي والخلفي:

$$M_F = M \cdot \frac{b}{\rho} \quad , \quad M_R = M \cdot \frac{a}{\rho}$$

وفي هذه الحالة تكون اهتزازات أجهزة التعليق الأمامية مستقلة عن اهتزازات أجهزة التعليق الخلفية ويمكن دراسة كل منهما بشكل مستقل وفي الواقع فإنه يتم إنتاج أكثر أنظمة التعليق في السيارات الحديثة بشكل مستقل إذ إن الاهتزازات التي تحصل في أحدها تنتقل بنسبة أقل عبر الأجهزة الأخرى إلى هيكل السيارة وبالتالي السائق والركاب فيها. وهكذا إذا اعتبرنا أجهزة التعليق الأمامية مثلاً فإن النظام الديناميكي الذي يمثلها يصبح ذا كتلتين  $M_1$  ,  $M_F$  [3] كما في الشكل (2).



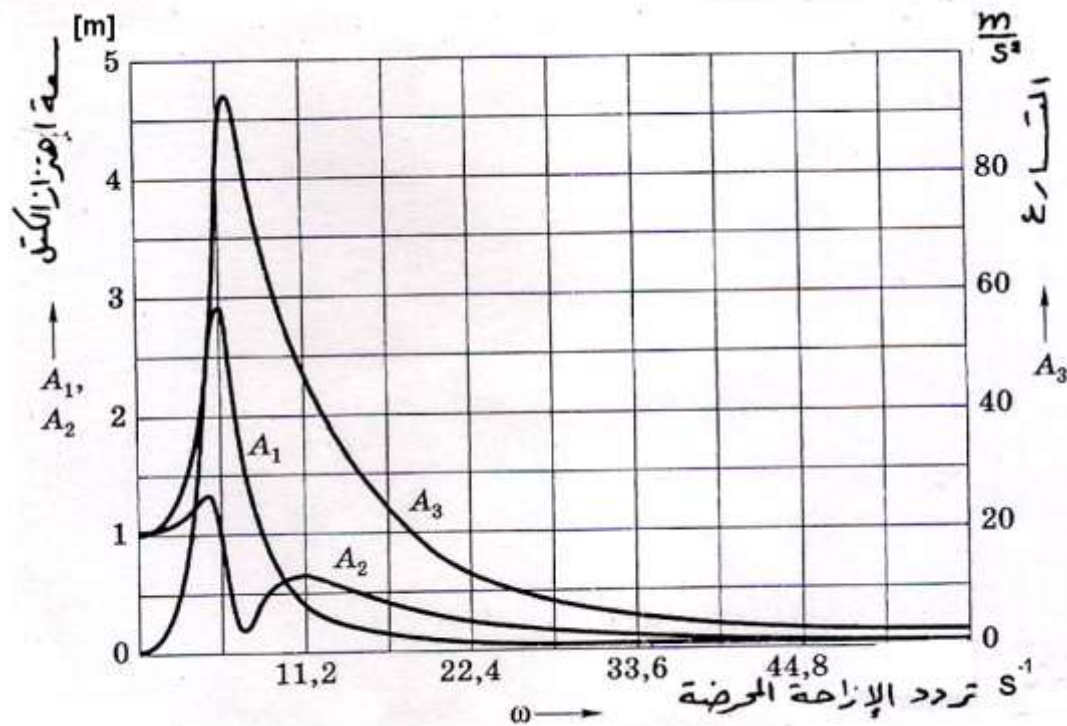
الشكل (2): الموديل الديناميكي ذو الكتلتين لنظام التعليق

تُمكن كتابة معادلات الحركة وفقاً للطريقة المقترحة وحلها التوصل إلى خصائص السعة - التردد amplitude frequency characteristic- لاهتزاز الكتلة  $M_F$  الخاضعة للمرونة و  $M_1$  غير الخاضعة للمرونة الأساسية في نظام التعليق. فمثلاً لسيارة شاحنة ولدراسة أجهزة التعليق الأمامية فيها وفقاً للبارامترات:

$$K_{r1} = 600 \text{ KN/m} \quad , \quad M_1 = 2400 \text{ kg} \quad , \quad M_F = 13000 \text{ kg} \quad , \\ C_{w1} = 1 \text{ KN} \cdot \text{S/m} \quad , \quad C_{r1} = 10 \text{ KN} \cdot \text{S/m} \quad , \quad K_{w1} = 1350 \text{ KN/m}$$



تكون نتائج الحساب على شكل منحنيات تعطي علاقة انزياح الكتلة  $M_F$  بـ  $(A_1)$  والكتلة  $M_1$  بـ  $(A_2)$  وتساير الكتلة  $M_F$  بـ  $(A_3)$  مع التردد  $\omega$  كما في الشكل (3).



الشكل (3): خصائص السعة - التردد للنظام الديناميكي ذي الكتلتين الممثل لأجهزة التعليق في السيارة.

يلاحظ من المنحنيات على الشكل السابق أنه وعند ترددات  $\omega$  منخفضة للإزاحة المؤثرة في العجلات تتوافق تقريباً سعة إزاحة الكتل  $M_1, M_F$  بينما تكون قيمها أعظمية عند ترددات للإزاحة قريبة من التردد الذاتي للنظام الديناميكي  $\frac{1}{5} \approx 5.6$  وهنا أيضاً يبلغ تسارع الكتل قيمته الأعظمية  $A_{3 \max}$ ، كما توافق الحالة التي يحصل فيها تطابق تردد الإزاحة مع التردد الذاتي للنظام حالة الطنين (resonance). لكن استخدام المخمدات ذات ثابت الإخماد الملائم وبالتالي قوة الإخماد الكافية يجعل اهتزاز الطنين يتلاشى وينعدم عملياً.

تجدر الإشارة إلى أنه يتم في السيارات الحديثة أيضاً ضمان الشرط المعطى بالعلاقة (16) والذي يُقِيم من خلال معامل توزيع الكتل في السيارة  $\varepsilon = \frac{J}{M.a.b}$  بدقة كافية حتى 80% وتقع قيمة المعامل  $\varepsilon$  في المجال:

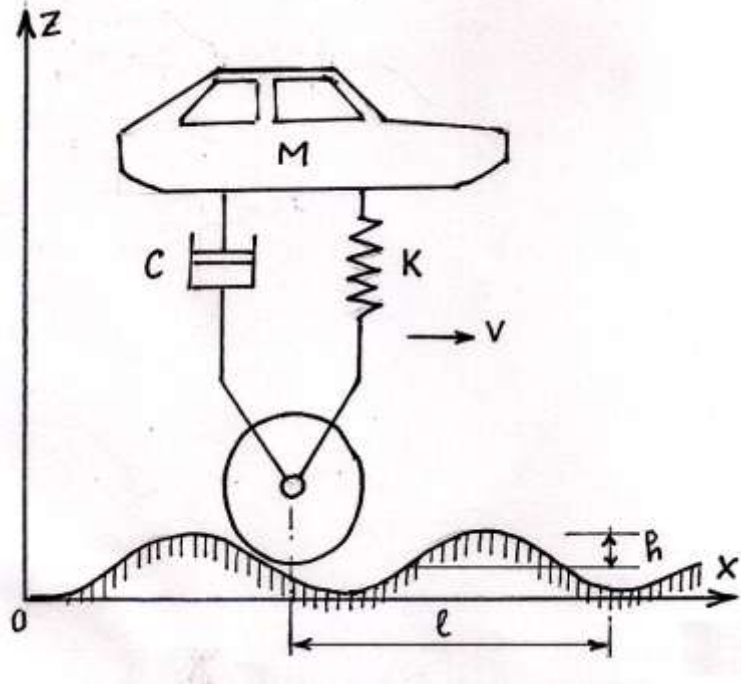
$0.8 \leq \varepsilon \leq 1.2$  حيث تتناقص بزيادته قيم الترددات الدنيا للنظام بعض الشيء بينما لا تتغير قيم تردداته العليا عملياً، يعود ذلك إلى أنه ومع زيادة  $\varepsilon$  تزداد قيمة نصف العطالة  $\rho$  وتبعاً لذلك تزداد الكتل الموزعة على المحور الأمامي  $M_F$  وعلى المحور الخلفي  $M_R$  [1].

عندما تكون قيمة المعامل  $\varepsilon = 1$  تتساوى عندها قيم الترددات الذاتية لأجهزة التعليق في السيارة كلها مع الترددات الذاتية لاهتزاز القسم الأمامي والخلفي منها.

## النتائج و المناقشة:

## 1-4- دراسة العوامل المؤثرة على انسيابية الحركة:

عند حركة السيارة على طريق غير مستوية وفقاً للنموذج المبسط المبين على الشكل (4)



الشكل (4): النموذج المدروس لحركة السيارة على طريق متعرج

تسبب عدم سوية الطريق في التحريض على اهتزاز السيارة (تحريض كينماتيكي) وهو يعادل التأثير بقوة سعتها  $F_0$  مساوية جداء سعة الانزياح المؤثر  $h$  في معامل جساءة الاستناد (صلابته)  $K$  أي أن:

$$F_0 = h \cdot K + h \cdot w \cdot c \quad (17)$$

ويكون الانتقال الستاتيكي  $Z_{st}$  الناتج عن تأثير القوة بسعتها  $F_0$  في الحالة الستاتيكية:

$$Z_{st} = \frac{F_0}{K} = h \quad (18)$$

بينما تكون سعة اهتزاز السيارة في الاتجاه الشاقولي  $Z$  وفي حال وجود المخمدات الزيتية للزجة التي تبدي مقاومة إخماد متناسبة مع السرعة  $F_D = C \cdot v$  وتساهم في امتصاص طاقة الاهتزاز معطاة بالعلاقة:

$$Z_{max} = Z_{st} \cdot \mu = \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2) + (2\eta\xi)}} \quad (19)$$

وهي تحدد خصائص السعة - التردد للنظام المدروس حيث  $\mu$  معامل الديناميكية الذي يعبر عن المواصفات الديناميكية لتأثير القوة المرخصة (وهي هنا عبارة عن قوة مكافئة للتحريض الحركي الحاصل). بينما  $\eta = \frac{\omega}{\omega_n}$  نسبة تردد القوة المرخصة إلى التردد الذاتي و  $\xi = P/\omega_n$  معامل الإخماد اللابعدي حيث  $P = \frac{C}{2M}$  معامل الإخماد و  $C$  ثابت الإخماد للمخمد المستخدم والذي يعكس صفاته وخصائصه.

أما في حال عمل أنظمة التعليق المرنة من دون المخمدات للزجة فإن قيمة معامل الديناميكية تصبح:

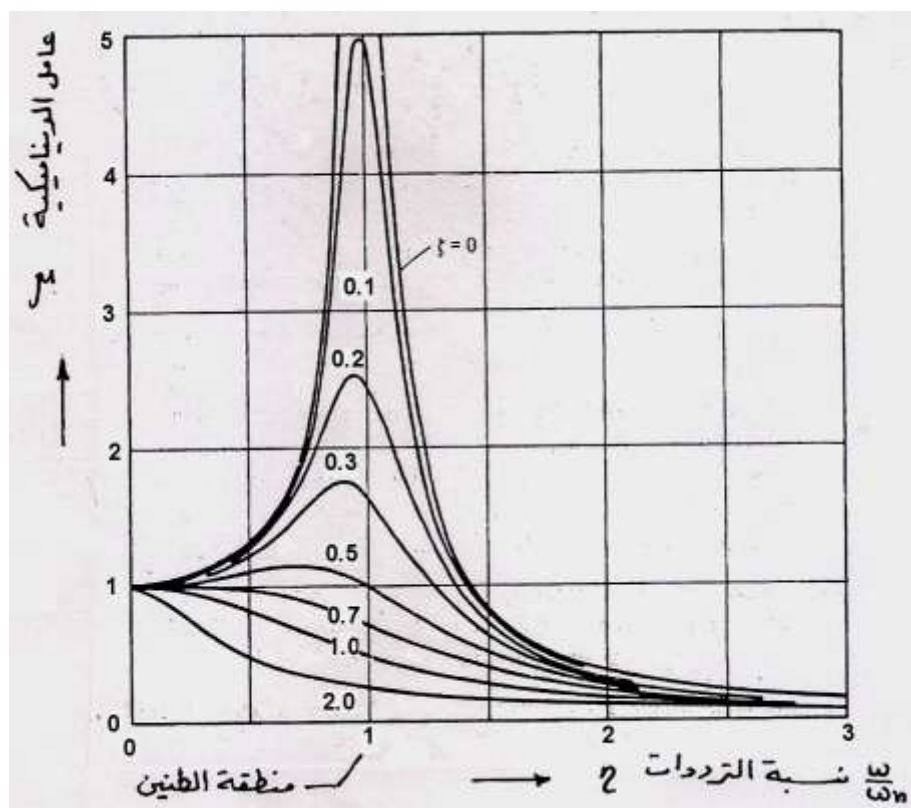
$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (20)$$

وتصبح العلاقة التي تحدد خصائص السعة - التردد للنظام في هذه الحالة:

$$Z_{\max} = Z_{st} \cdot \mu = \frac{F_0/K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \quad (21)$$

تتمثل تغيرات قيم معامل الديناميكية الواردة في العلاقات (21), (19) مع نسبة الترددات  $\frac{\omega}{\omega_n}$  في الشكل (5).

[5], [6].



الشكل (5): تغيرات معامل الديناميكية  $\mu$  مع نسبة الترددات  $\eta$  عند قيم مختلفة لمعامل التخميد الملاحدي  $\xi$

من أخطر الحالات التي تصادف في الاهتزازات الحاصلة بغياب المخمدات حالة التوافق بين تردد القوة المحرصة  $\omega$  (هنا التردد الذي تحصل فيه النبضة المؤثرة في العجلات عند عبور مناطق عدم السوية في الطريق) مع التردد الذاتي للنظام المكوّن من كتلة السيارة  $M$  وعناصر الارتباط في أجهزة التعليق وهي ما ندعوه الطنين (Resonance) كما ذكرنا، حيث تسعى قيمة  $\mu$  إلى اللانهاية وبالتالي تتزايد سعة الاهتزاز بشكل خطي مضطرب لكنها لا تصل إلى اللانهاية في وقت محدد قصير، ومن هنا نستنتج من حيث المبدأ إمكانية العبور في منطقة الطنين عند تسارع السيارة فالمساواة  $\omega = \omega_n$  قد تحصل للحظة قصيرة جداً لا تصل خلالها القيم العظمى للانحرافات الحاصلة إلى حدودها الخطيرة المؤدية إلى التحطم والانهييار.

نستطلع تلك الفكرة وتأثير الإخماد وسرعة حركة السيارة في الاهتزازات الحاصلة فيها عند عبور التعرجات في الطريق وانعكاسها على انسيابية الحركة [7]، فإذا تحركت السيارة الممثلة على الشكل (4) ذات الحمولة على المحور الخلفي مثلاً  $w = 715 \text{ N}$  على طريق معطى تغير بروفيل سطحها بالعلاقة:

$$Z = \frac{h}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi X}{\ell} \right)$$

حيث  $h$  عمق الانخفاضات في سطح الطريق ولناخذها  $h = 15 \text{ cm}$   
 $\ell$  طول موجة واحدة من تعرجات الطريق لناخذ  $\ell = 7 \text{ m}$ .

$X = v \cdot t$  المسافة المقطوعة من الطريق حيث  $v$  السرعة،  $t$  الزمن.

لندرس الحالة الأولى بوجود عناصر ارتباط مرنة  $K = 2250 \text{ N/m}$  من دون مخمدات لزجة.

يكون التردد الذاتي لأجهزة التعليق الخلفية:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2250 \times 9.81}{715}} = 5.56 \text{ 1/sec}$$

وتكون سرعة حركة السيارة الموافقة للطنين الممكن حدوثه نظرياً في تلك الحالة هي:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot v}{\ell} = \omega_n \Rightarrow v = \frac{\ell \cdot \omega_n}{2\pi} = \frac{7 \times 5.56}{2 \times 3.14} = 6.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 23 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

حيث تبلغ قيمة عامل الديناميكية هنا وفقاً للعلاقة (20) اللانهائية وبالتالي  $Z_{\max} \rightarrow \infty$  نظرياً تحصل مثل هذه السرعة في مرحلة تسارع السيارة لكن التوافق المذكور  $\omega = \omega_n$  يتم لمدة قصيرة جداً فقط، تكون غير كافية لحدوث الطنين ويتم العبور خلال منطقة الطنين كما ذكرنا.

نلاحظ من النتائج المعروضة في الجدول أن إضافة مخمد لزج وعلى الرغم من القيمة المتدنية لثابت الإخماد فيه، وفي حالة توافق الترددات تتناقص قيمة  $Z_{\max}$  بشكل كبير نسبياً لكننا نتجنب حدوث الطنين بكل تأكيد.

يؤدي عبور التعرجات بسرعة  $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  إلى إزاحة شاقولية قليلة لصندوق السيارة  $Z_{\max} = 0.87 \text{ cm}$  لكن تردد الاهتزاز بلغ  $\omega = 22.42 \text{ 1/sec}$ .

يتوافق تخفيض سرعة العبور إلى النصف  $45 \text{ km/h}$  مع زيادة في الانزياح

الجدول (1) يبين تأثير الانزياح الأعظمي بوجود مخمدات أو عدمها

نظام التعليق	سرعة الحركة (km/h) v	التردد الذاتي $\omega_n$ (1/S)	تردد التحريض القسري $\omega$ (1/S)	عامل الديناميكية $\mu$	الانزياح الاعظمي $Z_{\max}$ cm	تقييم الحالة
بدون مخمدات لزجة	23	5.56	5.56	$\infty$	$\rightarrow \infty$	يحدث الطنين نظرياً
	25	"	6.22	3.98	59.76	عبور الطنين والانزياح كبير
	30	"	7.48	1.25	18.75	انخفاض قيمة $Z_{\max}$
	90	"	22.4	0.065	0.975	انخفاض قيمة $Z_{\max}$ وزيادة $\omega$ بشكل كبير
بوجود مخمدات لزجة	23	"	5.56	0.71	10.5	لا يحدث الطنين و $Z_{\max}$ اقل نسبياً
	45	"	11.21	0.197	2.96	انخفاض قيمة $Z_{\max}$ وزيادة $\omega$
	90	"	22.42	0.058	0.87	الحالة نفسها لكن بدرجة أكبر
	180	"	44.85	0.0153	0.229	الحالة نفسها لكن بدرجة أكبر

الحاصل بمقدار ثلاث مرات ونصف، لكن تردد التحريض القسري بلغ نصف قيمته، بينما تؤدي زيادة السرعة بمقدار الضعف ( $v = 180 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ) إلى انخفاض قيمة الانزياح بمقدار أربع مرات تقريباً في الوقت الذي يزداد فيه التردد بمقدار مرتين. وهنا نتوقف عند تقييم الحركة الانسيابية للسيارة حيث يبدو للوهلة الأولى أن المؤشر الحقيقي لتقييم تلك الحالة هو الانزياح الشاقولي لحركتها نحو الأعلى غير أنه وعند الاهتزازات الحاصلة في صندوق السيارة وعلى محاورها الأمامية والخلفية مثلاً وفقاً للتابع

$$Z_1 = A_1 \cdot \sin \omega_1 t$$

على التوالي، قد يكون الشعور الفيزيولوجي للراكب بالاهتزازات الحاصلة حتى في حالة توافق القيم العظمى لتسارعات تلك الاهتزازات أي عندما يتحقق  $A_1 \cdot \omega_1^2 = A_2 \cdot \omega_2^2$  لأن المسألة هنا لا تتعلق بالقيم العظمى للتسارعات وإنما بالطريقة والنظام الذي يحدث فيه تغير تلك التسارعات أيضاً (شكل تغير القيم العظمى للتسارعات) حيث تحصل الاهتزازات غير المريحة عند القيم العظمى للتسارعات (تعطي شعوراً مزعجاً للسائق أو الركاب في السيارة) مع التغير السريع لها والتي يحصل بنتيجتها اهتزاز ذو تردد عالٍ، ولهذا فإن الكثير من الدراسات والمصادر تعتبر مقياساً لتقييم انسيابية حركة السيارة. قيمة جداء التسارع الأعظمي بتردد الاهتزازات  $A \cdot \omega^2$  وهي تكافئ القيمة العظمى للمشتق الثالث للإزاحة  $Z''''_{\max}$  والتي تسمى أحياناً خشونة الحركة [7].

تشير القيم الناتجة إلى صحة التقييم السابق لحركة السيارة وعبورها للتعرجات حيث يؤثر هنا بشكل أكبر التردد  $\omega$  الذي يتم وفقه التحريض الحركي على الاهتزاز والذي يزداد كما نلاحظ مع زيادة السرعة الخطية لحركة السيارة عند عبورها للتعرجات أي بمعنى آخر يكون الشعور غير المريح للراكب في السيارة عند عبور المناطق غير المستوية من الطرقات متعلقاً ليس بقيمة الانزياح الحاصل وإنما بسرعة حدوثه أي تردده كما يكون عبور التعرجات بسرعة منخفضة مترافقاً مع انزياح شاقولي أعلى لكنه يكون سلساً وهادئاً ولا يعطي شعوراً مزعجاً مقارنة مع حالة العبور بسرعة عالية، تلك التي تعطي تردداً عالياً مزعجاً على الرغم من تناقص الانزياح الشاقولي الحاصل بشكل واضح.

#### 4-2- الإطارات ودورها في انسيابية حركة السيارة:

تعمل الإطارات وسادة بين الطريق وعجلات السيارة من أجل امتصاص الصدمات الناتجة عن عدم استواء سطح الطريق وذلك نتيجة لما لها من صفة المرونة مما يقلل من تأثير الصدمات في الركاب ومكونات السيارة والحمولات المنقولة بوساطتها. فضلاً عن ذلك فإن الإطارات تقوم بتحمل قوى التماسك ونقلها، بين السيارة والطريق بحيث يمكن الحصول على أداء جيد لوسيلة النقل (حركتها) ويعمل ذلك على تحمل قوة الدفع على السيارة في أثناء التسارع وكذلك منع السيارة من الانزلاق عند المنحنيات نتيجة لقوى الطرد المركزي فضلاً عن إيقاف السيارة عند الفرملة [2].

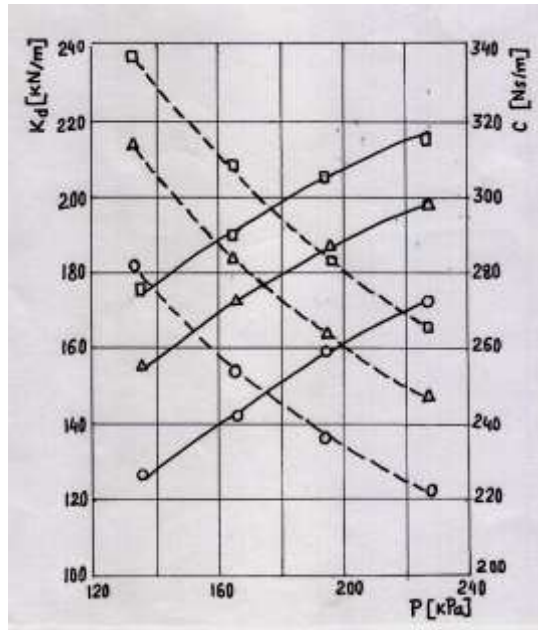
تلعب الإطارات دوراً مهماً في الاهتزازات الحاصلة في السيارة والضجيج الناتج عن الحركة واحتكاكها بسطح الطريق وهناك عوامل تؤثر في أداء الإطارات منها: بنيتها، ضغط الهواء فيها، شكل مداس الإطار والتآكل الحاصل فيه وكذلك الحمولات المؤثرة في الإطارات، أي أن الإطارات تعتبر ناقلاً للاهتزازات من سطح الطريق إلى هيكل السيارة وبالتالي الركاب فيها ولهذا فهي عنصر مهم في النظام الديناميكي المقترح لدراسة انسيابية حركة السيارة مما يجعلنا ندرس معاملات مرونتها الديناميكية ومعاملات الخمد لها وتأثيرها في انسيابية الحركة.

تمّ بشكل تجريبي دراسة تأثير العوامل السابقة وتحليلها، في أداء الإطارات [8]، وقد أُستخدم من أجل ذلك منصة اختبار تمكن من توليد الاهتزازات في الإطار المطاطي أو في حامل العجلة وتسجيل الذبذبات الناتجة والمنقلة عن حركة الإطار بواسطة جهاز راسم الإشارة، وقد أُجريت الدراسة على أنواع مختلفة البنية من الإطارات وفي شروط مختلفة من ضغط الهواء والحمولات المطبقة عليها ووفرت تلك الدراسة الحصول على الكثير من النتائج المفيدة والمهمة، والتي نأخذ منها الجانب المتعلق بالجساءة الديناميكية والإخماد ونحاول معالجتها وتحليلها والاستفادة منها في مجال انسيابية حركة السيارة الأمر الذي لم يعالج سابقاً فيها.

تم معالجة نتائج القياس وتسجيلات الراسم للحصول على قيمة دور الاهتزازات  $T_d$  تجريبياً (الزمن اللازم لانقضاء الهزة الواحدة) ثم حساب المتناقص اللوغاريتمي Logarithmic decrement  $\delta = \ln \frac{X_1}{X_2}$  (درجة التخماد) والتي تعبر عن سرعة تناقص سعة الاهتزازات. ثم إيجاد نسبة التخماد  $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$  (Damping ratio) والتردد الذاتي Natural frequency للنظام الاهتزازي  $\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$  حيث  $\omega_d$  تردد التخماد في الحركة ويساوي  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$ ، كما تم حساب معامل الجساءة الديناميكية  $K_d$  من العلاقة  $K_d = m \cdot \omega_n^2$  وبعدها إيجاد ثابت الإخماد أو معامل الإخماد  $C$  Damping coefficient حيث تساوي  $C = \xi \cdot C_c$  حيث لدينا معامل الإخماد الحرج critical Damping coefficient يساوي  $C_c = 2 \cdot m \cdot \omega_n$ .

تعتمد جساءة الإطار المطاطي أو صلابته على مقدار التشكل أو التشوه الحاصل فيه (التغير في شكله) من جراء تأثير قوة خارجية محددة يتعرض لها الإطار ويكافئها كما ذكرنا ارتفاع العجلة أو انخفاضها على الطريق غير المستوية بينما يتأثر معامل إخماد الإطار بالطاقة التي تضيع في عملية التشكل أو التشوه للإطار وتبعاً لبنيته الداخلية وقدرت على العودة إلى حالته الأولية.

يُظهر الشكل (6) تغير معامل الصلابة أو الجساءة الديناميكية  $K_d$  ومعامل الإخماد  $C$  مع ضغط الهواء في الإطارات وعند تطبيق حمولات مختلفة عليها.



الشكل(6): تغير معامل الجساءة الديناميكية  $K_d$  - ومعامل الإخماد  $C$  --- مع تغير ضغط الهواء في الإطار  $P$  وعند حمولات

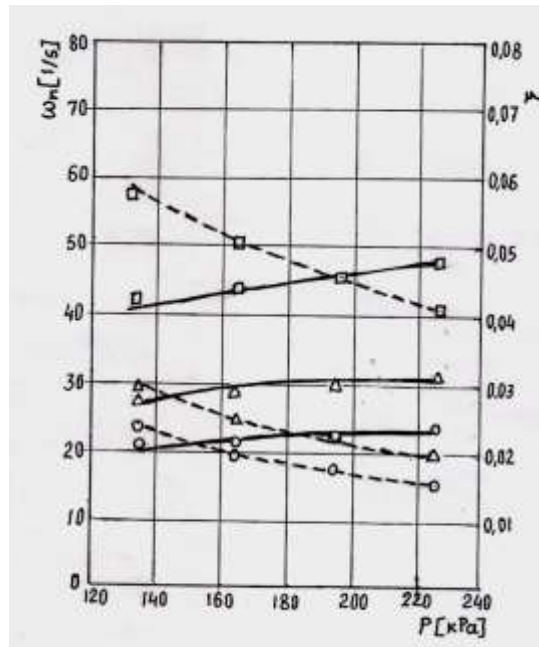
مختلفة:  $3000 \text{ N} - \circ$   $2000 \text{ N} - \Delta$   $1000 \text{ N} - \square$

تدل النتائج المعروضة بشكل عام على زيادة الجساءة الديناميكية  $K_d$  مع زيادة ضغط الهواء في الإطار عند حمولة ثابتة معينة حيث تزداد قيمة  $K_d$  بمعدل وسطي 30% مقابل زيادة في قيمة الضغط بحدود 50% لأن التردد الطبيعي الذاتي  $\omega_n$  يزداد مع زيادة الضغط  $P$  (تجريبياً تناقص الدور  $T$ ).

تكون قيم الجساءة الديناميكية في حالة الحمولات الزائدة (مثلاً 3000 N) أقل مما هي عليه في حالة الحمولات الأدنى (1000 N) وعند الضغوط نفسها بمعدل 30% يعود ذلك إلى أنه عند زيادة الحمولة على الإطار وعند ضغط ثابت للهواء فيه يتعرض الجزء الملاصق لسطح الطريق إلى قوى ضغط إضافية تزيد من تشكل الإطار أو تشوهه، وبالتالي تماسه أكثر مع السطح مما يقلل من جساءة الإطار بعض الشيء. أما تجريبياً فقد ازداد دور الاهتزاز  $T$  مما قلل من قيمة  $\omega_n$  وبالتالي قيمة  $K_d$  وفقاً للعلاقات التي تربطها  $(K = \omega_n^2 \cdot M, \omega_n = \frac{2\pi}{T})$ .

أما بالنسبة إلى معامل الإخماد للإطار  $C$  فإن قيمته بشكل عام تقل مع زيادة الضغط عند حمل ثابت معين حيث تتناقص قيمة  $C$  بمعدل وسطي 20% مقابل زيادة للضغط بحدود 50% وتكون قيم معاملات الإخماد  $C$  في حالة الحمولات الزائدة (3000 N) أقل مما هي عليه في حالة الحمولات الدنيا (1000 N) وعند الضغوط نفسها بمعدل 17% يعود ذلك إلى أنه ومع زيادة ضغط الهواء في الإطارات وعند حمولة ثابتة تقل قيمة معامل الإخماد  $C$  للإطار بسبب التغير المحدود نسبياً في شكل الإطار وبالتالي قلة الطاقة التي تضيع في عملية تشكل أو تشوه الإطار وعودته إلى شكله الأساسي من دون تشوه (طاقة الاهتزاز تضيع في التشوه المرن للمادة المطاطية التي يتشكل منها الإطار).

نبيّن على الشكل (7) تغير التردد الطبيعي الذاتي  $\omega_n$  للاهتزاز الحاصل في العجلات ونسبة الإخماد فيها  $\xi$  مع تغير ضغط الهواء في الإطارات وعند حمولات مختلفة مطبقة على الإطار. حيث دلت النتائج على أن قيمة التردد  $\omega_n$  تتناقص بمعدل 60% مع زيادة الحمولة من 1000 N وحتى 3000 N وعند قيمة محددة لضغط ثابت  $P$ .



الشكل (7): تغير التردد الطبيعي  $\omega_n$  ونسبة الإخماد  $\xi$  مع ضغط الهواء في الإطارات  $P$  وعند حمولات مختلفة:  $3000\text{ N} - \circ$  ،  $2000\text{ N} - \Delta$  ،  $1000\text{ N} - \square$

كما أن قيمة  $\omega_n$  تتزايد بمعدلات وسطية بسيطة حوالي 17% مع زيادة لضغط الهواء في الإطارات بحدود 50% عند حمولة ثابتة ويعود ذلك إلى زيادة الجساءة الديناميكية مع زيادة الضغط (صلابة الإطار).  
يلاحظ أيضاً أن نسبة الإخماد  $\xi$  تتناقص بمعدل وسطي أكثر من 30% مع تزايد ضغط الهواء في الإطارات من 137 Кра إلى 221 Кра وعند حمولات ثابتة، كما إن قيمة  $\xi$  تتناقص بمعدل 60% مع زيادة الحمولة من 1000 N إلى 3000 N ويعود ذلك إلى تناقص معامل الإخماد C مع تزايد الضغط في الإطارات والحمولة عليها للأسباب التي تم ذكرها سابقا وبالتالي تتناقص قيمة  $\xi = \frac{C}{C_c}$ .

### الاستنتاجات والتوصيات:

سمحت الدراسة التي أجريت بالوصول إلى النتائج الآتية:

- 1- يصعب وضع موديل ديناميكي، يعكس بشكل دقيق كل العناصر المؤثرة في الاهتزازات الحاصلة في السيارة، وأنظمة التعليق فيها، لكن الموديل المقترح يوفر الحصول على تقييم ملائم لأهم مؤشرات الحركة الاهتزازية من تردد وسعة والتي تأخذ قيمة أعظمية عند تطابق تردد الإزاحة المؤثرة  $\omega$  مع التردد الذاتي  $\omega_n$  للنظام المعرض لها.
- 2- تؤدي سرعة الحركة العالية للسيارة عند عبور التعرجات إلى اهتزاز بسعة أقل مقارنةً مع العبور بسرعة أدنى لكن التردد الذي تحصل به الاهتزازات عندها يكون كبيراً لدرجة أنه يؤثر سلباً في أنظمة التعليق وبالتالي تنتقل عبرها الاهتزازات مؤدية لشعور غير مريح وضرر للسائق والركاب في السيارة.
- 3- تؤدي الحالات التي تزيد من الجساءة الديناميكية للإطارات  $K_H$  ومنها ضغط الهواء فيها إلى زيادة الانزياح الشاقولي الحاصل في السيارة عند حركتها على طريق غير مستو، وهذا ما يؤثر سلباً في انسيابية حركتها بينما تؤدي زيادة الحمولة على المحاور إلى عكس ذلك.
- 4- تتناقص قيمة عامل الإخماد للإطارات عند زيادة ضغطها والحمولة عليها مما يضعف خصائص الإخماد للإطار وإمكانية امتصاص طاقة الاهتزاز وهذا ما يجعل الاهتزازات الحاصلة نتيجة نبضة على الإطار من سطح الطريق المتعرج تنتقل بسعة أكبر إلى هيكل وصندوق السيارة مما يقلل من انسيابية حركتها أيضاً.

### المراجع :

- 1- Гришкевич, А, И. *Автомобили Теория*. Минск , 1996 г.
- 2- Тарасик, В, П. *Теория движения Автомобиля*. Лептербург, 2006 г.
- 3- Молибошко, Л. А. *исследования динамических систем с помощью передаточных функций*. 2001 г.
- 4- Молибошко, Л, А. *решение инженерных задач численными методами*. Минск, 2011 г.
- 5- Madhujit, M. *Vibrations , Dynamics and structural systems*. Delhi, 1989, 525.
- 6- Dilip, K, A. *Theory and applications of mechanical vibrations*. Delhi, 2007, 450.
- 7- Пановка, Я, Г. *основы прикладной Теории колбаний и удара*. Ленинград, 1976г.
- 8- م. هيثم رجوب. *دراسة خواص الخمد لأنواع مختلفة من الإطارات*. رسالة ماجستير، القاهرة، 1998 م.