

## Geometrical nonlinear analysis of thin plates Using modified finite element method

Dr. Sulaiman Abo Diab\*  
Ibraheem Hassn\*\*

(Received 12 / 4 / 2017. Accepted 23 / 8 / 2017)

### □ ABSTRACT □

In this study, thin plates are analyzed using modified finite element displacement approach in the geometrical nonlinear case (large deflections , small rotations), wherein the displacement function of the rectangular plate element (ACM) which has 12 degrees of freedom, is modified by adding new terms to it in order to consider the effect of the external loading acting at the finite element level. As a result, we obtain shape functions consist of two parts a homogenous part related to the degrees of freedom of the element and a particular part (non homogenous) dependent on the element loading at the finite element level.

An incremental iterative approach is used and stiffness matrixes, external force vector and new terms resulting from the application of the modified finite element approach is concluded by using the virtual displacement concept.

A Matlab language code is developed for the analysis of thin plates, some examples are computed and plotted and the results of the displacements, stresses, strains and internal forces are compared with those produced by MSC Patran as well as the analytical solution.

The comparison showed that the developed modified approach gave a solution closer to the exact solution than that of MSC Patran. even by using a finite mesh.

**Keywords** : modified approach - finite element method – nonlinear analysis of plates geometric nonlinear analysis – geometric stiffness matrix.

---

\* Assistant Professor, Department of structure engineering, Faculty of Civil engineering ,Tishreen University ,Lattakia, Syria.

\*\* Postgraduate student, Department of structure engineering, Faculty of Civil engineering , Tishreen University ,Lattakia, Syria.

## التحليل اللاخطي الهندسي للبلاطات الرقيقة باستخدام طريقة العناصر المنتهية المعدلة

الدكتور سليمان أبو دياب\*

ابراهيم حسن\*\*

(تاريخ الإيداع 12 / 4 / 2017. قُبِلَ للنشر في 23 / 7 / 2017)

### □ ملخص □

تم في هذه الدراسة نمذجة و تحليل البلاطات الرقيقة عبر اعتماد مقارنة معدلة لطريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات - و ذلك ضمن المجال اللاخطي الهندسي (انتقالات كبيرة ، دورانات صغيرة). حيث تم تعديل تابع الانتقال في طريقة الانتقالات التقليدية لعنصر البلاطة المستطيل ذو 12 درجة حرية المعروف بـ (ACM) و إضافة حدود جديدة تأخذ تأثير الحمولة الخارجية المؤثرة على البلاطة بعين الاعتبار، و نتيجة لذلك أصبحت توابع الشكل مؤلفة من جزأين : جزء متجانس متعلق بدرجات الحرية للعنصر و جزء آخر غير متجانس مرتبط بالحمولات الخارجية المؤثرة على العنصر .

تم اعتماد المنهج التزايدى التكراري في الحل و تطبيقه على مبدأ الانتقالات الوهمية و استنتاج مصفوفات الصلابة، شعاع القوى الخارجية و الحدود الإضافية الناتجة عن الطريقة المعدلة.

بالإضافة إلى ذلك تم تطوير كود برمجي في البيئة البرمجية للبرنامج المعروف الماتلاب (MATLAB) لتحليل البلاطات الرقيقة، و حسبت و رسمت مخططات الانتقالات، الإجهادات، التشوهات و قوى المقطع و درست بعض الأمثلة و قورنت بالنتائج التي يعطيها برنامج MSC Patran و مع الحل الدقيق أيضاً.

بينت النتائج أن الكود البرمجي المطور للطريقة المعدلة أعطى قيم أقرب للحل الدقيق من برنامج MSC Patran و ذلك على الرغم من استخدام شبكة خشنة عند تقسيم البلاطة (عدد عناصر صغير نسبياً).

**الكلمات المفتاحية :** مقارنة معدلة - طريقة العناصر المنتهية- التحليل اللاخطي الهندسي للبلاطات الرقيقة - مصفوفة الصلابة الهندسية.

\* أستاذ مساعد - قسم الهندسة الإنشائية - كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين اللاذقية - سورية .

\*\* طالب ماجستير - قسم الهندسة الإنشائية كلية الهندسة المدنية - جامعة تشرين اللاذقية - سورية .

## مقدمة

يندرج هذا البحث ضمن سلسلة بحوث العلوم الأساسية الرياضية و الهندسية و يتناول معالجة البلاطات الرقيقة بطريقة العناصر المنتهية من نموذج الانتقالات في إطار الهندسية اللاخطية. و بالرغم من أن هذه المسألة قد درست بشكل واسع في الأدبيات العالمية [1,2,3,4] إلا أنها ما تزال تجذب عدداً كبيراً من الباحثين [5,6,7,8] نظراً للصعوبات التي تنشأ عددياً عند مزج مرتبتين من الأرقام للحصول على الحل النهائي.

من المساهمات الأولى في مسألة التحليل اللاخطي الهندسي للبلاطات الرقيقة تلك التي أوردها مارتن (Martin) في [9] حيث قام باشتقاق مصفوفة الإجهادات البدائية لعنصر البلاطة المثلي عبر توظيف مبدأ الطاقة الكامنة الأصغري ثم استخدم هذه المصفوفة وفق منهج خطي تزايدى. قام بعده أرغيريس (Argyris) [10] باشتقاق مصفوفة الصلابة الهندسية التي أوجدها ضمن جملة الإحداثيات الطبيعية لكنه لم يستخدم المنهج الذي اقترحه في حل أية أمثلة أو تطبيقات. ثم بعد ذلك استخدم موراي و ويلسون (Murray and Wilson) [4] مصفوفة الصلابة في حالة الانتقالات الصغيرة و ربطها مع منهج تكراري بهدف الوصول إلى حالة التوازن و قد كانت النتائج مقبولة. بينما وظف شميت (Schmit) [11] الحدود اللاخطية للانتقال - التشوه في مبدأ الطاقة أي أنه قام بإيجاد الطاقة الكامنة الكلية لكامل المنشأة مع إدخال الحدود المعيرة عن اللاخطية الهندسية في علاقات الانتقال - التشوه.

في إطار بحثنا سوف ندرس الهندسية اللاخطية للبلاطات الرقيقة بطريقة العناصر المنتهية المعدلة و التي تتطلب عدداً أكبر من الثوابت الاختيارية لتابع الانتقالات التقريبي (و هو في حالة العناصر المنتهية نموذج الانتقالات التقليدية مساوي لعدد درجات الحرية للعنصر المنتهي) و هذا يسمح فقط بإيجاد علاقة تربط توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر بدرجات الحرية لعقد العنصر. مما يعني أنه لا توجد علاقة مباشرة على مستوى العنصر المنتهي بين توابع الانتقالات والحمولات الخارجية المطبقة عليه، إذ تظهر علاقة الحمولات بالانتقالات فقط على مستوى المنشأة ككل بعد تشكيل جملة المعادلات الجبرية لكامل الجملة المدروسة وذلك بشكل نقطي على عقد الجملة بدون ظهور أي تأثير لشكل توابع الحمولات ضمن العنصر نفسه على شكل توابع الانتقالات.

اقترحت في العام (1991) مقارنة معدلة لخوارزمية طريقة العناصر المنتهية - نموذج الانتقالات - بحيث يتم إدخال توابع الحمولات المؤثرة على العنصر في أساسيات اشتقاق التوابع التقريبية للانتقالات وبالتالي الإجهادات بشكل منظم بحيث تتحقق العلاقة الدقيقة بين حمولات العنصر وتوابع الانتقالات التقريبية فيه على المستوى النفاضلي، حيث استخدمت هذه الطريقة في معالجة عنصر فراغي إيطاري ضمن نظرية المرتبة الأولى محمل بحمولات تتغير بشكل خطي على شكل شبة منحرف.

تعتمد الطريقة المعدلة على فصل التابع التقريبي للانتقالات إلى جزأين أحدهما متعلق بانتقالات العقد، وآخر متعلق بالمؤثرات الخارجية، وهذه الطريقة مشروحة بالتفصيل في المرجع [12].

استخدمت هذه المقاربة في المرجع [13] لنمذجة وإنشاء عنصر منتهي يستند إلى فرضيات فلاسوف في فنل الجيزان المرنة ذي الجدران الرقيقة والمقاطع العرضية المفتوحة، وقد طور من خلال هذا البحث كود برمجي *Thin-Walled Finite Element Method Program TWFEM* لاختبار العنصر المدروس، حيث اختبر عدد من الجوائز البسيطة المؤلفة من فتحة واحدة والمحملة بحمولات موزعة ولكن بشروط استناد مختلفة.

كما استخدمت في المرجع [14] لدراسة الإطارات المستوية و الفراغية وفق نظرية المرتبة الثانية، و أيضاً تم تطوير كود برمجي *Samm (Second order modified method)* باستخدام الـ *MATLAB* و مقارنة النتائج التي

أعطاهما مع نتائج التحليل وفق برنامج *SAP 2000* . و قد لوحظ تحسن في النتائج مقارنةً مع نتائج برامج عالمية معروفة.

### أهمية البحث و أهدافه

- يندرج البحث الحالي ضمن إطار البحوث النظرية في العلوم الأساسية . في إطاره سيتم تطبيق طريقة العناصر المنتهية المعدلة نموذج الانتقالات في دراسة البلاطات الرقيقة في المجال الهندسي اللاخطي و سوف تقتصر في بحثنا على المجال الذي تكون فيه الانتقالات كبيرة (علاقات الانتقالات التشوهات ستتضمن الحدود اللاخطية) و الدورانات صغيرة (بحيث يبقى تشوه البلاطة ضمن مستويها مهمل) .
- البحث عن الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية في المجال الهندسي اللاخطي و استخدامها كتوابع تقريبية في التطبيق .
- تحسين أداء الطريقة والحصول على حلول أكثر دقة إذ أن العمل يتم بآلية طريقة العناصر المنتهية ولكن بآليات استنباط هندسية جديدة تربط الانتقالات بتابع الحموله على مستوى العنصر المنتهي.
- كما سيتم برمجة الطريقة بالكامل باستخدام الـ *Matlab* .

### طرائق البحث و مواد

يقوم البحث على إنجاز كود برمجي بلغة برنامج الماتلاب، حيث يمكن لهذا الكود إنجاز تحليل لا خطي هندسي للبلاطات الرقيقة مع أخذ تأثير الإضافات الناتجة عن استخدام طريقة العناصر المنتهية المعدلة، ثم حساب و رسم مخططات الإجهادات، التشوهات، الانتقالات و قوى المقطع لهذه البلاطات.

### التحليل اللاخطي الهندسي للبلاطات الرقيقة

#### فرضيات نظرية انعطاف البلاطات الرقيقة في حالة الانتقالات الكبيرة :

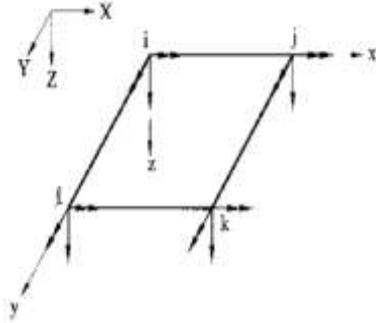
- الألياف المستقيمة العمودية على السطح الوسطي قبل التشوه تبقى مستقيمة (بقاء المقاطع مستوية) و متعامدة معه بعد التشوه (فرضية كيرشوف - لوف)، و طول هذه المستقيمت يبقى ثابتاً و هذا يعني أن التشوه الناظمي ( $\epsilon_z$ ) و التشوهات القصية المعامدة للمستوي الوسطي ( $\gamma_{xz}$ ) و ( $\gamma_{yz}$ ) يمكن إهمالها.
- الإجهاد المتعامد مع السطح الوسطي ( $\sigma_z$ ) صغير بالمقارنة مع مركبات الإجهاد الأخرى و يمكن إهماله في علاقات الإجهاد التشوه و تدعى هذه الفرضية بفرضية غياب الضغط المتبادل بين الطبقات الشاقولية.
- السهم ( $w$ ) كبير بما فيه الكفاية بحيث يمكن مقارنته بسماكة البلاطة أو أكبر قليلاً و لكن يجب أن تبقى قيمته صغيرة بالنسبة لأبعاد البلاطة الأخرى، مركبات الانتقالات ( $u, v$ ) اللتين تم إهمالهما في النظرية الخطية يتم أخذهما بعين الاعتبار و لكن هذه المركبات يفترض أنها صغيرة بالمقارنة مع السهم ( $w$ )، أي أن :  

$$|u| \ll |w| ; |v| \ll |w| .$$

- مشتقات الانتقالات ( $u, v$ ) بالنسبة لـ ( $x, y$ ) على التوالي صغيرة بالمقارنة مع مشتق السهم ( $w$ ) بالنسبة لـ ( $x, y$ ) على التوالي.

### معالجة البلاطات الرقيقة بطريقة العناصر المنتهية :

يفرض السطح الوسطي للبلاطة واقع ضمن المستوي (y, x) و المحور (z) عمودي على السطح الوسطي و يتجه نحو الأسفل لتشكل المحاور الثلاثة جملة محاور ديكارتية نظامية يمينية و باعتبار أن مركبات شعاع الانتقال



لنقطة ما من السطح الوسطي للبلاطة هي  $(w, \theta_x, \theta_y)$  و فوق المحاور  $(z, x, y)$  على التوالي عندها تكون المركبة الشاقولية لشعاع الانتقال هي السهم  $(w)$  و الدوران حول المحور (x) هو  $(\theta_x)$  و الدوران حول المحور (y) هو  $(\theta_y)$ .

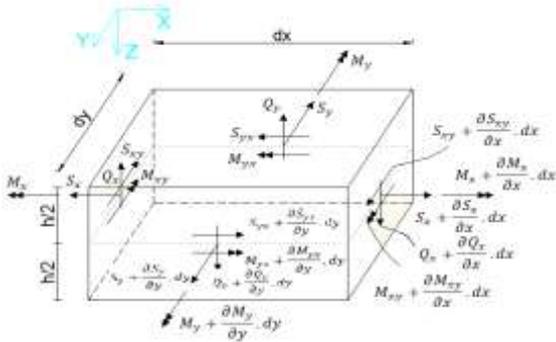
$$\{\delta_i\} = [w_i \quad (\theta_x)_i \quad (\theta_y)_i] = \left[ \begin{matrix} w_i \\ (\theta_x)_i \\ (\theta_y)_i \end{matrix} \right] = - \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_i^T \quad (4.1)$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} ; \quad \theta_y = - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.2) \quad \text{حيث :}$$

الشكل (1) : درجات الحرية

يفرض أننا قمنا باقتطاع جزء تفاضلي من البلاطة بواسطة زوجين

للبنية [5]



من المستويات الموازية لـ (xz) ، (yz) كما هو مبين

بالشكل (2) تكون القوى الداخلية للبلاطة على الشكل التالي

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (4.3)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_{xy} \\ M_{yx} \\ M_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (4.4)$$

$$\begin{Bmatrix} S_x \\ S_{xy} \\ S_{yx} \\ S_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_y \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (4.5)$$

الشكل (2) : قوى المقطع لعنصر تفاضلي من البلاطة [5]

حيث :  $\{S_x, S_{xy}, S_y\}$  : القوى الناعمة و المماسية (القوى العشائية) ،  $\{M_x, M_{xy}, M_y\}$  : عزوم

الانعطاف و الفتل ،  $\{Q_x, Q_y\}$  : القوى القاصة لواحدة الطول من مقطع البلاطة.

$\{\sigma_x, \sigma_{xy}, \sigma_y\}$  : الإجهادات الناعمة و المماسية .

علاقات التشوهات - الانتقالات :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (4.6)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \quad (4.8)$$

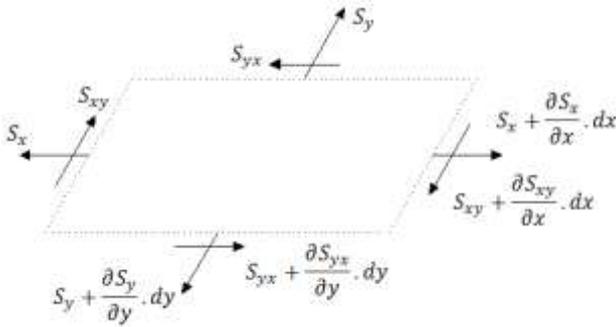
$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (4.9)$$

حيث :  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_y\}$  : التشوهات الناظمية و المماسية ، حيث تتكون موتره التشوهات من جزء خطي و جزء لا خطي.

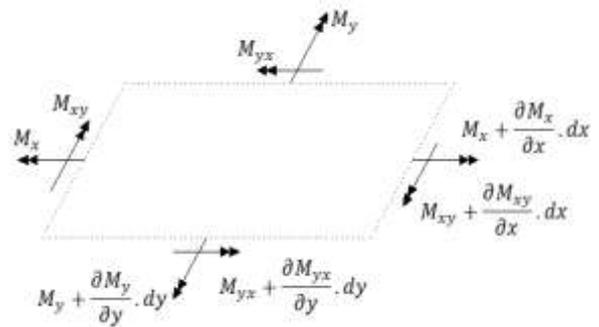
قانون السلوك :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ \sigma_y \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\vartheta^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & (1-\vartheta)/2 & (1-\vartheta)/2 & 0 \\ 0 & (1-\vartheta)/2 & (1-\vartheta)/2 & 0 \\ \vartheta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_y \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

معادلات التوازن على العنصر التفاضلي للبلاطة :



الشكل (4) : القوى الغشائية [5]



الشكل (3) : عزوم الانعطاف [5]

المعادلة الأولى إسقاط وفق المحور  $x$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{yx}}{\partial y} + P_x = 0 \quad (4.11)$$

المعادلة الثانية إسقاط وفق المحور  $y$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + P_y = 0 \quad (4.12)$$

حيث :  $P_x$  ،  $P_y$  : القوى الخارجية الموزعة على وحدة المساحة في البلاطة.

و المعادلة الثالثة معادلة تنتج من مجموع مساقط قوى القص و القوى الخارجية على المحور  $z$  مع اعتبار

مساقط القوى الغشائية على المحور  $z$  بنتيجة دوران المقطع مع اعتبار أن هذه الدورانات صغيرة

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left[ q + S_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cdot S_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} + S_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (4.13)$$

آلية ربط التوابع التقريبية بحمولات العنصر ودرجات الحرية (الطريقة المعدلة)

: [12,15,16,17,18,19]

تقوم الطريقة المعدلة للعناصر المنتهية المقترحة [12] بإدخال توابع حمولات العنصر المنتهي في أساسيات

اشتقاق التوابع التقريبية للانتقالات أو الإجهادات بشكل منظم و غير عشوائي بحيث تتحقق العلاقة الدقيقة بين حمولات

العنصر و توابع الانتقالات التقريبية فيه على المستوى التفاضلي [15,16].

في البدء نختار توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر ككثير حدود بثوابت اختيارية عددها  $n$  ثابتاً :

$$u_i = x_i^n \cdot c_n \quad (4.14)$$

حيث :  $u_i$  : توابع الانتقالات التقريبية التي يمكن بمعرفتها وصف الحالة الانتقالية لكل نقطة من نقاط العنصر وصفاً تاماً.

$x_i^n$  : مصفوفة متعلقة فقط بالإحداثيات الديكارتيية المحلية المستقلة، و  $c_n$  ثوابت اختيارية ليس لها في البدء أي مضمون إنشائي و نعتبر عددها في البداية لا نهائياً.

نفرض أن المعادلة التفاضلية التي تحكم المسألة المدروسة من الشكل :

$$\Delta^{ij}.u_i = \bar{p}^j \quad (4.15)$$

حيث :  $\Delta^{ij}$  : مصفوفة من المعاملات التفاضلية ،  $\bar{p}^j$  : توابع الحملات الخارجية الموزعة.

إن تطبيق المعادلة التفاضلية السابقة على التوابع التقريبية يعطي علاقة تربط الثوابت الاختيارية بالحملات الخارجية .

$$(\Delta^{ij}.x_i^n).c_n = \bar{p}^j \quad (4.16)$$

جملة المعادلات هذه تقبل بشكل عام عدداً لا نهائياً من الحلول و تتعلق هذه الحلول بشكل إعطاء توابع الحملات الخارجية. فإذا كانت توابع الحملات الخارجية معطاة بشكل تحليلي، عندها يمكن تحويل هذه التوابع مثلاً إلى كثيرات حدود بنشرها حول نقطة ما من العنصر المنتهي ( و لتكن مركز ثقل المقطع ) وفق سلسلة تايلور مثلاً، و عندها يمكن بالمقارنة بين الحدود المتشابهة انتقاء حل مناسب و تعيين بعض الثوابت الاختيارية بدلالة الحملات الخارجية، أو يمكن في الحالة العامة أن تعطى توابع الحملات الخارجية كحلول لا على التعيين موصوفة بشكل نقطي على عقد العنصر و في نقاط مميزة منه، و ذلك بإعطاء شداتها في النقاط المذكورة، و في هذه الحالة يمكن استخدام التوابع التقريبية للحصول على توزيع تقريبي لتوابع الحملات الخارجية ضمن العنصر المنتهي بدلالة شدة الحملات الخارجية على عقد العنصر و ذلك بتطبيق مماثل لما ورد في حالة الانتقالات عند تعيين توابع الانتقالات التقريبية بدلالة انتقالات عقد العنصر، فيكون لتوزع الحملات الشكل التالي

$$\bar{p}^j = NP_r^j . \bar{p}_0^r \quad (4.17)$$

حيث  $NP_r^j$  توابع الشكل، و تتعلق بالمتحولات الإحداثية المستقلة.

في هذه الحالة يمكن بمطابقة حدود طرفي المعادلة (4.16) انتقاء حل مناسب يحدد الثوابت الاختيارية المتعلقة بالحملات الخارجية. و ينصح عادةً بانتقاء أبسط حل ممكن و بعد تحديد الثوابت الاختيارية المتعلقة بالحملات الخارجية يجب أن يكون عدد الثوابت الاختيارية التي لم يتم تحديدها مساوياً لعدد درجات الحرية للعنصر مضروباً بعدد عقد العنصر المدروس حتى تتمكن من تعيين الثوابت المتبقية بدلالة انتقالات العقد، أي العدد المعروف في الطريقة التقليدية.

التابع الناتج يجب أن يحقق متطلبات الاستمرارية و ينقسم إلى جزء متجانس و آخر غير متجانس موافقين لحل

المعادلات التفاضلية غير المتجانسة للمسألة المدروسة [17]. عندها يأخذ تابع الانتقالات التقريبية الشكل :

$$u_i = M_i^k . c_k + \bar{M}_{ij} . \bar{p}^j \quad (4.18)$$

حيث :  $c_k$  : عدد من الثوابت الاختيارية مكافئ لعدد عقد العنصر مضروباً بعدد درجات الحرية للعقدة،.

$\bar{M}_{ij}$  ,  $M_i^k$  : مصفوفتان تمثلان على التوالي الجزء المتجانس و الجزء غير المتجانس للتوابع التقريبية و متعلقان بالإحداثيات المحلية المستقلة المستخدمة.

باستخدام الشروط الطرفية الهندسية على العنصر المنتهي نعوض إحداثيات العقد في العلاقة (4.18) و حل جملة المعادلات الناتجة للحصول على الثوابت الاختيارية بدلالة انتقالات العقد و من ثم تعويض هذه الثوابت في العلاقة السابقة نفسها و تجميع الحدود لنحصل على تابع شكل جزأين أحدهما متجانس و الآخر غير متجانس :

$$u_i = N_i^{m(\epsilon)} \cdot u_{m(\epsilon)} + \bar{N}_{ij} \cdot \bar{p}^j \quad (4.19)$$

و بذلك نكون قد حصلنا على علاقة تربط بين توابع الانتقالات التقريبية ضمن العنصر من جهة و بين انتقالات عقد العنصر بالإضافة إلى الحمولات الخارجية الموزعة المطبقة على العنصر من جهة أخرى [18,19].

## النتائج و المناقشة

### - تطبيق الطريقة المعدلة و تقييم الحدود الجديدة الناتجة

لتحليل البلاطات الرقيقة في حالة الانتقالات الكبيرة (الهندسية اللاخطية و الفيزيائية الخطية) تم اعتماد مبدأ الانتقالات الوهمية كأساس متغيراتي لطريقة العناصر المنتهية نموذج الانتقالات في الأوساط المرنة و التي يقتضي فيها أن يكون متغير الطاقة الكلية للوسط المتشوه مكافئاً للصفر

$$\pi \delta = 0 \quad (5.1)$$

و هذه الصيغة مكافئة وفق المقولة الأولى لحساب المتغيرات لتحقيق معادلات التوازن ضمن عنصر تفاضلي من الوسط الإنشائي و تحقق معادلات التوازن على أطراف هذا الوسط و ذلك بالشكل التكاملي.

باعتماد المنهج التزايدي لتحويل المسألة اللاخطية إلى مسألة خطية نعطي انتقالات حالة مستقرة أساسية (متوازنة) معلومة  $u_i^0$  تزايداً بمقدار  $u_i$  فينتقل الجسم إلى وضعية غير مستقرة (مجاورة) انتقالاتها  $\tilde{u}_i$  (مبدأ التشويش) و يكون :

$$\tilde{u}_i = u_i^0 + u_i \quad (5.2)$$

$u_i$  : نصف ما يسمى (increment) .

بحسب مبدأ الانتقالات الوهمية لدينا متغير الطاقة الكلية للحالة الأساسية كما يلي :

$$\delta \pi^0 = \int_V \epsilon_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 dV - \int_V \delta u_i \bar{f}_i dV - \int_{S_\sigma} \delta u_i \bar{T}_i dS = 0 \quad (5.3)$$

حيث :  $\epsilon_{ij}^0$  ,  $\sigma_{ij}^0$  : موترة الإجهادات و التشوهات في الحالة الأساسية (المتوازنة) على التوالي.

$\bar{T}_i$  ,  $\bar{f}_i$  : القوى الخارجية الحجمية و السطحية على التوالي ،  $S_\sigma$  : جزء من سطح الجسم خاضع

للإجهادات.

و لأن  $\tilde{u}_i$  هي حالة انتقالات غير معلومة و كذلك حالة الإجهادات الموافقة لها فيجب في البدء أن ننطلق من حالة توازن أساسية معلومة و نعطي تزايداً لحالة الانتقالات بمقدار صغير جداً.

$$\tilde{u}_{i+1} = \tilde{u}_i + \Delta u_{i+1} \quad (5.4)$$

و هذا ما يؤدي إلى تزايد في التشوهات و الإجهادات كما يلي :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + \Delta \epsilon_{ij} ; \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \Delta \sigma_{ij} \quad (5.5)$$

$\sigma_{ij}^0$  ,  $\epsilon_{ij}^0$  : تتسوري الإجهاد و التشوه على التوالي للحالة البدائية (الحالة الخطية) .

$\Delta\sigma_{ij}, \Delta\varepsilon_{ij}$  : تزايد صغير في تنسوري الإجهاد و التشوه على التوالي ناتج عن تطبيق تزايد صغير في الانتقال .

و باعتبار أن هذا التزايد صغير يمكن معالجة المسألة على غرار الحالة الخطية إذا بدأنا من حالة التوازن الأساسية و نصل إلى ما يسمى المنهج التكراري التزايدية.

بحساب المتغير الأول للطاقة الكلية في الحالة المجاورة و اعتبار أن المقادير التي تخضع للتغيير هي  $\Delta u_i$  و ليس نفسها نحصل على :

$$\int_V \delta(\Delta\varepsilon_{ij})c^{ijkl}(\varepsilon_{kl}^0 + \Delta\varepsilon_{kl})dV - \int_V \tilde{f}_i \delta(\Delta u_i)dV - \int_{S_\sigma} \delta(\Delta u_i)\tilde{T}_i dS = 0 \quad (5.6)$$

$$\int_V \delta(\Delta\varepsilon_{ij})c^{ijkl}\varepsilon_{kl}^0 dV + \int_V \delta(\Delta\varepsilon_{ij})c^{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}dV - \int_V \tilde{f}_i \delta(\Delta u_i)dV - \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i \delta(\Delta u_i)dS = 0 \quad (5.7)$$

حيث :  $C_{ijrs}$  : تنسور ثوابت المرونة .

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (5.8)$$

و بالانتقال من الحالة الثلاثية الأبعاد للوسط الإنشائي إلى الحالة الثنائية الأبعاد لحالة البلاطات الرقيقة يصبح تنسور التشوهات المجزأ كما يلي :

$$\varepsilon_{ij} = \chi_{ij} + \eta_{ij} \quad (5.9)$$

$\chi_{ij}$  : موتر الانحناءات في الحالة الخطية نتيجة انعطاف البلاطة .

$\eta_{ij}$  : التشوهات الغشائية و الناتجة عن الانتقالات ضمن مستوي البلاطة مع اعتبار لاختية البلاطة .

$$\varepsilon_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot (w_x)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot (w_y)^2 \end{array} \right\} - z \cdot \left\{ \begin{array}{l} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_x \cdot w_y \end{array} \right\} = \eta_{ij} + z \cdot \chi_{ij} \quad (5.10)$$

بأخذ المتغير الأول و ملاحظة أن الذي يخضع للتغيير هو  $\Delta\varepsilon_{ij}$  و ليس  $\varepsilon_{ij}^0$  نحصل على :

$$\delta\eta_{ij} = \begin{bmatrix} w_x & 0 \\ 0 & w_y \\ w_y & w_x \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta w_x \\ \delta w_y \end{Bmatrix} ; \delta\chi_{ij} = - \begin{Bmatrix} \delta w_{,xx} \\ \delta w_{,yy} \\ \delta w_x \cdot w_y + w_x \cdot \delta w_y \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

توابع الانتقالات :

باعتبار توابع الشكل  $N$  لعقدة من عنصر البلاطة (العقدة  $a$ ) كما يلي :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N_a^w \quad N_a^{\theta_x} \quad N_a^{\theta_y}] \cdot \begin{Bmatrix} w_a \\ (\theta_x)_a \\ (\theta_y)_a \end{Bmatrix} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} w_a \\ (\theta_x)_a \\ (\theta_y)_a \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\delta\chi_{ij} = - \begin{bmatrix} N_{a,xx}^w & N_{a,xx}^{\theta_x} & N_{a,xx}^{\theta_y} \\ N_{a,yy}^w & N_{a,yy}^{\theta_x} & N_{a,yy}^{\theta_y} \\ N_{a,xy}^w & N_{a,xy}^{\theta_x} & N_{a,xy}^{\theta_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta w_a \\ \delta(\theta_x)_a \\ \delta(\theta_y)_a \end{Bmatrix} = N_{,ij} \cdot \begin{Bmatrix} \delta w_a \\ \delta(\theta_x)_a \\ \delta(\theta_y)_a \end{Bmatrix} ; i = x, y ; j = x, y \quad (5.13)$$

$$\delta \eta_{ij} = \begin{bmatrix} N_{a,x}^w & N_{a,x}^{\theta_x} & N_{a,x}^{\theta_y} \\ N_{a,y}^w & N_{a,y}^{\theta_x} & N_{a,y}^{\theta_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix} = N_{,i} \cdot \begin{Bmatrix} \delta w_{,x} \\ \delta w_{,y} \end{Bmatrix} ; i = x, y \quad (5.14)$$

حيث :  $N_{,i}$  : مصفوفة تمثل مشتقات توابع الشكل من المرتبة الأولى.

حيث :  $N_{,ij}$  : مصفوفة تمثل مشتقات توابع الشكل من المرتبة الثانية.

بما أننا اخترنا تابع السهم (الانتقال) ككثير حدود كما يلي :

$$w(x, y) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot y + c_3 \cdot x^2 + c_4 \cdot x \cdot y + c_5 \cdot y^2 + c_6 \cdot x^3 + c_7 \cdot x^2 \cdot y + c_8 \cdot x \cdot y^2 + c_9 \cdot y^3 + c_{10} \cdot x^3 \cdot y + c_{11} \cdot x \cdot y^3 + c_{12} \cdot x^2 \cdot y^2 + c_{13} \cdot x^4 \cdot y + c_{14} \cdot x \cdot y^4 + c_{15} \cdot x^3 \cdot y^3 \quad (5.15)$$

الآن سنقوم بتحديد الثوابت الجديدة الخاصة بالجزء غير المتجانس.

نعوض تابع الانتقال في المعادلة التفاضلية الحاكمة لسلوك البلاطة في الحالة الخطية و نطبق النتيجة مع

المعادلة التي تمثل تابع الحموله ليصبح التابع الجديد كما يلي :

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ x^2 \\ x \cdot y \\ y^2 \\ x^3 \\ x^2 \cdot y \\ x \cdot y^2 \\ y^3 \\ x^3 \cdot y \\ x \cdot y^3 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \\ c_{11} \end{Bmatrix} + \frac{1}{D} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x^2 \cdot y^2}{32} - \frac{x^4 \cdot y}{96 \cdot a} - \frac{x \cdot y^4}{96 \cdot b} + \frac{x^3 \cdot y^3}{288 \cdot a \cdot b} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x^2 \cdot y^2}{32} + \frac{x^4 \cdot y}{96 \cdot a} - \frac{x \cdot y^4}{96 \cdot b} - \frac{x^3 \cdot y^3}{288 \cdot a \cdot b} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x^2 \cdot y^2}{32} + \frac{x^4 \cdot y}{96 \cdot a} + \frac{x \cdot y^4}{96 \cdot b} + \frac{x^3 \cdot y^3}{288 \cdot a \cdot b} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x^2 \cdot y^2}{32} - \frac{x^4 \cdot y}{96 \cdot a} + \frac{x \cdot y^4}{96 \cdot b} - \frac{x^3 \cdot y^3}{288 \cdot a \cdot b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{Bmatrix} q_z(i) \\ m_x(i) \\ m_y(i) \\ q_z(j) \\ m_x(j) \\ m_y(j) \\ q_z(k) \\ m_x(k) \\ m_y(k) \\ q_z(l) \\ m_x(l) \\ m_y(l) \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

و بالتالي يكون الجزء المتجانس من تابع الشكل :

$$(N)^T = \begin{bmatrix} \frac{-((a-x).(b-y).(b^2.x^2)+a.b^2.x+a^2.y^2+a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^3.b^3} \\ \frac{((a-x).(b+y).(b-y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{-((a+x).(b-y).(a-x)^2)}{8.a^2.b} \\ \frac{-((a+x).(b-y).(b^2.y)-a.b^2.x+a^2.y^2+a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^3.b^3} \\ \frac{((a+x).(b+y).(b-y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{((a-x).(b-y).(a+x)^2)}{8.a^2.b} \\ \frac{-((a+x).(b+y).(-b^2.x^2)+a.b^2.x-a^2.y^2+a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^3.b^3} \\ \frac{-((a+x).(b-y).(b+y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{((a-x).(b+y).(a+x)^2)}{8.a^2.b} \\ \frac{-((a-x).(b+y).(b^2.x^2)+a.b^2.x+a^2.y^2-a^2.b.y-2.a^2.b^2)}{8.a^3.b^3} \\ \frac{-((a-x).(b-y).(b+y)^2)}{8.a.b^2} \\ \frac{-((a+x).(b+y).(a-x)^2)}{8.a^2.b} \end{bmatrix}^T \quad (5.17)$$

الجزء غير المتجانس من توابع الشكل و هو يمثل إضافة جديدة :

$$\begin{aligned}
 (\bar{N})^T = & \left[ \frac{x.y.(9.b^4.x.y+3.b^5.y^3).a-x.y.(6.b^4.x^3-2.b^5.x^2.y^2+3.b.x^3+x^2.y^2).a^3}{2304} + \frac{x.y.(3.b^4.x^3+b^5.x^2.y^2)}{2304.D.a^4.b^4} + \frac{x.y.(18.b^4.x}{2304.D.a^5} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a.y-x^2).(3.b^4.x-b^5.y^2+3.x.b+y^2)}{2304.D.a.b^3} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a^3.x^3-9.a^4.x.y+9.a^2.x.y+3.a.x^3-9.a.x.y-3.x^3)}{2304.D.a^5} - \frac{x.y.(a^3.x^2.y^2-3.a^4.y^3+3.a^2.y^3+a.x^2.y^2+}{2304.D.a^5.b} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(9.b^4.x.y+3.b^5.y^3).a-x.y.(6.b^4.x^3-2.b^5.x^2.y^2+3.b.x^3+x^2.y^2).a^3}{2304} + \frac{x.y.(3.b^4.x^3+b^5.x^2.y^2)}{2304.D.a^4.b^4} + \frac{x.y.(18.b^4.x}{2304.D.a^5} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a.y-x^2).(3.b^4.x-b^5.y^2+3.x.b+y^2)}{2304.D.a.b^3} \right. \\
 & \left. \frac{-x.y.(3.a^3.x^3-9.a^4.x.y+9.a^2.x.y+3.a.x^3+9.a.x.y+3.x^3)}{2304.D.a^5} - \frac{x.y.(-a^3.x^2.y^2+3.a^4.y^3-3.a^2.y^3-a.x^2.y^2}{2304.D.a^5.b} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(9.b^4.x.y+3.b^5.y^3).a-x.y.(6.b^4.x^3-2.b^5.x^2.y^2+3.b.x^3+x^2.y^2).a^3}{2304} + \frac{x.y.(3.b^4.x^3+b^5.x^2.y^2)}{2304.D.a^4.b^4} + \frac{x.y.(18.b^4.x}{2304.D.a^5} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a.y-x^2).(3.b^4.x-b^5.y^2+3.x.b+y^2)}{2304.D.a.b^3} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a^3.x^3-9.a^4.x.y+9.a^2.x.y+3.a.x^3-9.a.x.y-3.x^3)}{2304.D.a^5} - \frac{x.y.(a^3.x^2.y^2-3.a^4.y^3+3.a^2.y^3+a.x^2.y^2+}{2304.D.a^5.b} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(9.b^4.x.y+3.b^5.y^3).a-x.y.(6.b^4.x^3-2.b^5.x^2.y^2+3.b.x^3+x^2.y^2).a^3}{2304} + \frac{x.y.(3.b^4.x^3+b^5.x^2.y^2)}{2304.D.a^4.b^4} + \frac{x.y.(18.b^4.x}{2304.D.a^5} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a.y-x^2).(3.b^4.x-b^5.y^2+3.x.b+y^2)}{2304.D.a.b^3} \right. \\
 & \left. \frac{x.y.(3.a^3.x^3-9.a^4.x.y+9.a^2.x.y+3.a.x^3-9.a.x.y-3.x^3)}{2304.D.a^5} - \frac{x.y.(a^3.x^2.y^2-3.a^4.y^3+3.a^2.y^3+a.x^2.y^2+}{2304.D.a^5.b} \right.
 \end{aligned}$$

بتعويض تابع الانتقال في مبدأ الانتقالات الوهمية، و أخذ المتغير الأول، و من ثم استخدام مبدأ التشويش (أخذ حالة توازن مجاورة للحالة الأساسية) نحصل على صيغ مصفوفات الصلابة و أشعة القوى المركزة في العقد و المكافئة للحمولات الموزعة.

إن الحد الأول من مبدأ الانتقالات الوهمية سيصبح بعد إدخال الجزء غير المتجانس كما يلي :

$$\varepsilon_{kl} = N_{,kl} \bar{w} + \bar{N}_{,kl} \bar{p}^l \quad , \quad \varepsilon_{ij} = N_{,ij} \bar{w} + \bar{N}_{,ij} \bar{p}^j \quad (5.19)$$

لدينا :  $N_{,kl}$  ,  $N_{,ij}$  : هي مشتقات توابع الشكل (الجزء المتجانس) من المرتبة الثانية .

$\bar{N}_{,kl}$  ,  $\bar{N}_{,ij}$  : هي مشتقات توابع الشكل (الجزء غير المتجانس) من المرتبة الثانية .

$\bar{w}$  : هي الانتقالات العقدية ،  $\bar{p}^i$  ,  $\bar{p}^j$  : هي القوى العقدية .

$$T_1 = \int_V \delta \Delta \varepsilon_{ij} \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta \varepsilon_{kl}^0 \cdot dv = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \delta \Delta \varepsilon_{ij} \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta \varepsilon_{kl}^0 \cdot dA \cdot dz =$$

$$h \cdot \int_A \delta \Delta \left\{ \begin{matrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,x} \cdot w_{,y} \end{matrix} \right\} \cdot \frac{E \cdot h^3}{12(1-\theta^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \Delta \left\{ \begin{matrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,x} \cdot w_{,y} \end{matrix} \right\} \cdot dA \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}
 T_1 = & h \cdot \int_A \delta \Delta (N_{,ij} \bar{w} + \bar{N}_{,ij} \bar{p}^j) \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta (N_{,kl} \bar{w} + \bar{N}_{,kl} \bar{p}^l) dA = \\
 & \delta \Delta \bar{w} \cdot \left\{ \int_A N_{,ij} \cdot C_{ijkl} \cdot N_{,kl} \cdot dA \right\} \cdot \Delta \bar{w} + \delta \Delta \bar{w} \cdot \left\{ \int_A N_{,ij} \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta (\bar{N}_{,kl} \bar{p}^l) \cdot dA \right\} + \\
 & \left\{ \int_A \delta \Delta (\bar{N}_{,ij} \bar{p}^j) \cdot C_{ijkl} \cdot N_{,kl} \cdot dA \right\} \cdot \Delta \bar{w} + \int_A \delta \Delta (\bar{N}_{,ij} \bar{p}^j) \cdot C_{ijkl} \cdot \Delta (\bar{N}_{,kl} \bar{p}^l) \cdot dA \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

سنعتبر من الآن و صاعداً أن  $\bar{w}$  هو تزايد صغير في الانتقال لتجنب كتابة الرمز  $\Delta$  في كل مرة و بالتالي :

$$T_1 = h. [\delta \bar{w}. \{ \int_A N_{,ij}. C_{ijkl}. N_{,kl}. dA \}. \bar{w} + \delta \bar{w}. \{ \int_A N_{,ij}. C_{ijkl}. (\bar{N}_{,kl}. \bar{p}^l). dA \} + \{ \int_A \delta (\bar{N}_{,ij}. \bar{p}^j). C_{ijkl}. N_{,kl}. dA \}. \bar{w} + \{ \int_A \delta (\bar{N}_{,ij}. \bar{p}^j). C_{ijkl}. (\bar{N}_{,kl}. \bar{p}^l). dA \}] \quad (5.22)$$

إن الحدين  $\{ \int_A \delta (\bar{N}_{,ij}. \bar{p}^j). C_{ijkl}. N_{,kl}. dA \}$  ،  $\{ \int_A \delta (\bar{N}_{,ij}. \bar{p}^j). C_{ijkl}. (\bar{N}_{,kl}. \bar{p}^l). dA \}$  ينعدمان

عند أخذ المتغير الأول لانتقالات العقد بوصفهما قيمة معلومة و نحن نعلم أن متغير قيمة معلومة يساوي الصفر .

$$T_{11} = h. [\delta \bar{w}. \{ \int_A N_{,ij}. C_{ijkl}. N_{,kl}. dA \}. \bar{w} + \delta \bar{w}. \{ \int_A N_{,ij}. C_{ijkl}. (\bar{N}_{,kl}. \bar{p}^l). dA \}] \quad (5.23)$$

و هذا الحد يمثل السلوك الخطي للبلاطة (مصنوفة الصلابة الخطية للحالة الانعطافية) مع إضافة حد جديد يدخل تأثير الحمولات الخارجية من اعتبارات الطريقة المعدلة .

الحد الباقي من العلاقة (5.7) يتضمن ثلاثة حدود و بعد إدخال الجزء غير المتجانس من توابع الشكل يحدد

كما يلي :

باعتبار التشوهات الغشائية  $\eta_{ij}$  تحدد وفق العلاقة (5.10) و (5.11) فيكون لدينا :

$$u_{k,i} = N_{,i}. \bar{w} + \bar{N}_{,i}. \bar{p}^i \quad , \quad (5.24) \quad u_{k,j} = N_{,j}. \bar{w} + \bar{N}_{,j}. \bar{P}^j$$

حيث :  $N_{,i}$  ,  $N_{,j}$  : هي مشتقات توابع الشكل (الجزء المتجانس) من المرتبة الأولى .

$\bar{N}_{,i}$  ,  $\bar{N}_{,j}$  : هي مشتقات توابع الشكل (الجزء غير المتجانس) من المرتبة الأولى .

$\bar{w}$  : هي الانتقالات العقدية ،  $\bar{P}^i$  ,  $\bar{P}^j$  : هي القوى العقدية .

$$T_{12} + T_{21} = h. \left[ \int_A \delta \Delta \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,x}.w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot \frac{E.h^3}{12(1-\theta^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \Delta \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2} \cdot (w_{,y})^2 \\ w_{,x}.w_{,y} \end{Bmatrix} \right] \cdot dA +$$

$$\int_A \delta \Delta \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \cdot (w_{,x})^2 \\ \frac{1}{2} \cdot (w_{,y})^2 \\ w_{,x}.w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot \frac{E.h^3}{12(1-\theta^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \Delta \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,x}.w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot dA \quad (5.25)$$

$$T_{12} = T_{21} = \frac{1}{2} \cdot h. \int_A \delta \Delta \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot \frac{E.h^3}{12(1-\theta^2)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \theta & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\theta}{2} \end{bmatrix} \cdot \Delta \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdot \Delta \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot dA =$$

$$\frac{1}{2} \cdot h. \int_A \delta \Delta \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_x & M_{xy} \\ M_{yx} & M_y \end{bmatrix} \cdot \Delta \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \cdot dA = \frac{1}{2} \cdot h. [\delta \bar{w}. \{ \int_A N_{,i}. M_{ij}. N_{,j}. dA \}. \bar{w}] \quad (5.26)$$

هذين الحدين يمثلان العمل المشترك الانعطافي و الغشائي للبلاطة حيث لدينا مشتقات توابع الشكل من المرتبة

الأولى مضروبة بالعزوم (التي تنتج من الانحناءات التي هي المشتقات من المرتبة الثانية) .

الحد الثالث سيصبح بعد إدخال الجزء غير المتجانس كما يلي :

$$T_2 = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \Delta \eta_{ij} \cdot dv = \frac{1}{2} \cdot \int_V \delta \Delta u_{k,i} \cdot \sigma_{ij} \cdot \Delta u_{k,j} \cdot dv = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \delta \Delta u_{k,i} \cdot \sigma_{ij} \cdot \Delta u_{k,j} \cdot dA \cdot dz =$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot \int_A \delta \Delta \left\{ \begin{matrix} w_x \\ w_y \end{matrix} \right\} \cdot \left( \frac{E \cdot h}{1 - \nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \Delta \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \cdot (w_x)^2 \\ \frac{1}{2} \cdot (w_y)^2 \\ w_x \cdot w_y \end{matrix} \right\} \right) \cdot \Delta \left\{ \begin{matrix} w_x \\ w_y \end{matrix} \right\} \cdot dA =$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot \int_A \delta \Delta (N_{i,i} \cdot \bar{w} + \bar{N}_{i,i} \cdot \bar{p}^i) \cdot S_{ij} \cdot \Delta (N_{j,j} \cdot \bar{w} + \bar{N}_{j,j} \cdot \bar{P}^j) \cdot dA \quad (5.27)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot [\delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot S_{ij} \cdot N_{j,j} \cdot dA \} \cdot \bar{w} + \delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot S_{ij} \cdot (\bar{N}_{j,j} \cdot \bar{P}^j) \cdot dA \}] \quad (5.28)$$

الحدين الثالث و الرابع من مبدأ الانتقالات الوهمية يمثلان عمل القوى الخارجية و يحددان كما يلي :

$$R = \int_V \tilde{f}_i \delta (\Delta u_i) dV + \int_{S_G} \tilde{T}_i \delta (\Delta u_i) dS \quad (5.29)$$

الحد  $\left( \int_{S_G} \tilde{T}_i \delta (\Delta u_i) dS \right)$  معدوم نظراً لعدم خضوع البلاطة لأية قوى على محيطها.

$$R = \int_V \tilde{f}_i \delta (\Delta u_i) dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \tilde{f}_i \cdot \delta (\Delta u_i) \cdot dA \cdot dz = h \cdot \int_A \tilde{f}_i \cdot \delta (N_{i,i} \cdot w_i + \bar{N}_{i,i} \cdot \bar{p}^i) \cdot dA =$$

$$h \cdot [\delta w_i \cdot \int_A \tilde{f}_i \cdot N_{i,i} \cdot dA + \int_A \tilde{f}_i \cdot \delta (\bar{N}_{i,i} \cdot \bar{p}^i) \cdot dA] = R_1 + R_2 \quad (5.30)$$

بتعويض العلاقات (5.23) ، (5.26) ، (5.28) و (5.30) في علاقة العمل الوهمي (5.7) يصبح لدينا :

$$h \cdot [\delta \bar{w} \cdot \{ \int_A N_{i,i} \cdot C_{ijkl} \cdot N_{kl} \cdot dA \} \cdot \bar{w} + \delta \bar{w} \cdot \{ \int_A N_{i,i} \cdot C_{ijkl} \cdot (\bar{N}_{kl} \cdot \bar{p}^l) \cdot dA \}] +$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot [\delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot M_{ij} \cdot N_{j,j} \cdot dA \} \cdot \bar{w}] + \frac{1}{2} \cdot h \cdot [\delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot M_{ij} \cdot N_{j,j} \cdot dA \} \cdot \bar{w}] +$$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot [\delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot S_{ij} \cdot N_{j,j} \cdot dA \} \cdot \bar{w} + \delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot S_{ij} \cdot (\bar{N}_{j,j} \cdot \bar{P}^j) \cdot dA \}] = h \cdot [\delta w_i \cdot \int_A \tilde{f}_i \cdot N_{i,i} \cdot dA +$$

$$\int_A \tilde{f}_i \cdot \delta (\bar{N}_{i,i} \cdot \bar{p}^i) \cdot dA] \quad (5.31)$$

$$\left[ K_E + \frac{1}{2} \cdot K_{EG} + \frac{1}{2} \cdot K_{EG} + \frac{1}{2} \cdot K_G \right] \cdot \delta \bar{w} + \delta \bar{w} \cdot \{ \int_A N_{i,i} \cdot C_{ijkl} \cdot (\bar{N}_{kl} \cdot \bar{p}^l) \cdot dA \} +$$

$$\frac{1}{2} \cdot \delta \bar{w} \{ \int_A N_{i,i} \cdot S_{ij} \cdot (\bar{N}_{j,j} \cdot \bar{P}^j) \cdot dA \} = R_1 + R_2 \quad (5.32)$$

$$[K_T] \cdot \delta \bar{w} + T_3 + T_4 = R_1 + R_2 \quad ; \quad \left[ K_E + K_{EG} + \frac{1}{2} \cdot K_G \right] = [K_T] \quad (5.33)$$

$$[K_T] \cdot \delta \bar{w} = R_1 + R_2 - T_3 - T_4 \quad (5.34)$$

$K_E$  : مصفوفة الصلابة الخطية للبلطة ،  $K_{EG}$  : مصفوفة العمل المشترك ،  $K_G$  : مصفوفة الصلابة

الهندسية و تمثل الحدود  $(R_2, T_3, T_4)$  نواتج تطبيق الطريقة المعدلة.

و تمثل المصفوفة  $(M_{ij})$  عزوم الانعطاف للبلطة و المصفوفة  $(S_{ij})$  القوى الغشائية ضمن المستوي و هما

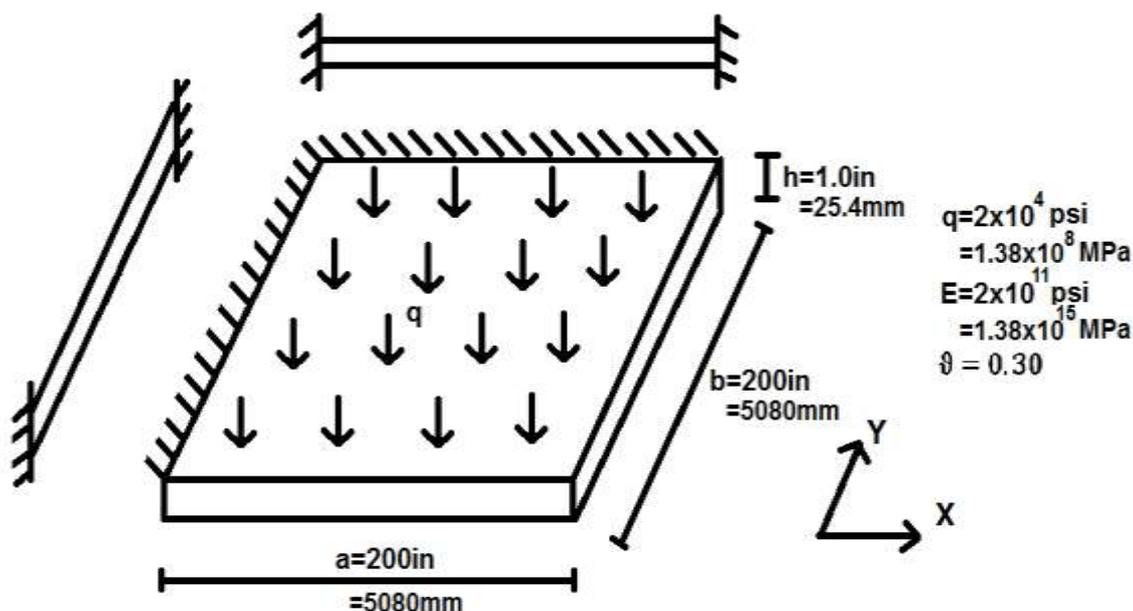
محددتين بالعلاقات (4.4) و (4.5) على التوالي، في الفقرة اللاحقة سوف نستعرض نتائج هذا التعديل دون الأخذ

بعين الاعتبار تأثير الانتقالات على تغير إحداثيات عقد العناصر المنتهية و ذلك لعدم وجود المحور الشاقولي في

صياغة مسألتنا المستوية.

## النتائج العددية

في مثالنا الأول سوف ندرس البلاطة الموثوقة من جميع أطرافها بالأبعاد و المواصفات الهندسية المعطاة في الشكل (5) و سوف تتم مقارنة النتائج لحالة الحل التقليدي المتطابق مع العنصر  $ACM$  أي بدون الجزء غير المتجانس و نتائج العنصر المطور مع الجزء غير المتجانس.

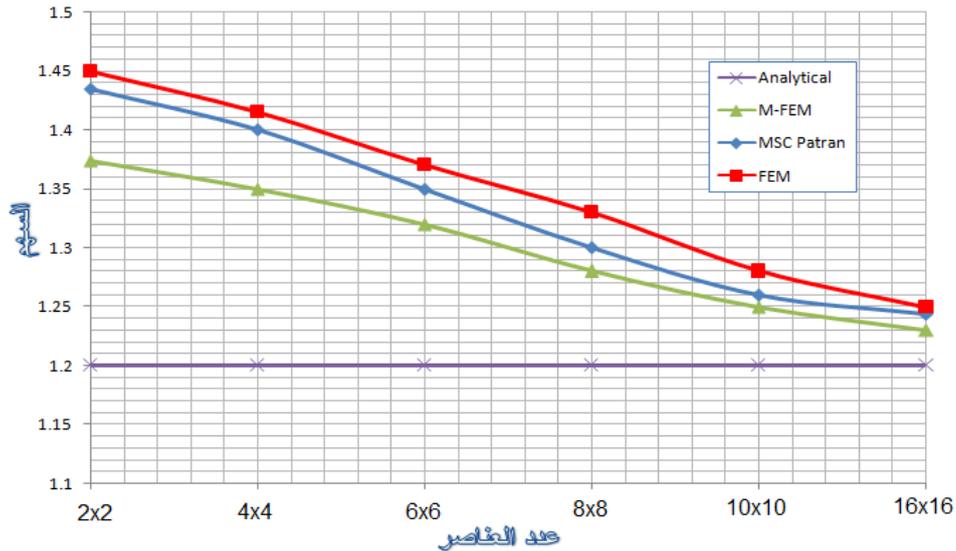


الشكل (5) . أبعاد البلاطة الموثوقة و خصائصها الهندسية [20]

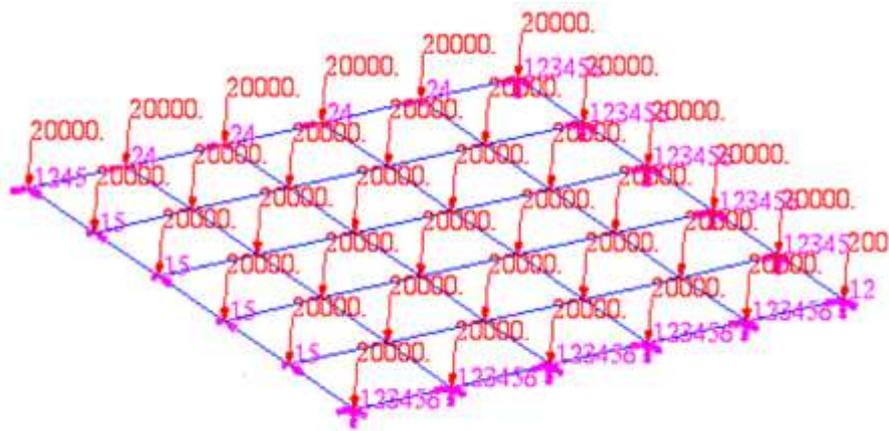
يبين الجدول (1) مقارنة بين قيم السهم في مركز البلاطة وفق الطريقة التقليدية (FEM)، المعدلة (M-FEM)، الحل التحليلي و وفق برنامج MSC Patran و مع تقسيم البلاطة إلى 16 عنصر .  
الجدول (1) . مقارنة قيم السهم في مركز البلاطة

الاختلاف (%)	السهم في مركز البلاطة Inch (m)	عدد العناصر (Meshing)	طريقة التحليل المستخدمة
-	1.2 (0.03048)	-	الحل التحليلي (الدقيق)
5%	1.2611 (0.03203)	10x10	MSC Patran
16.5%	1.4022 (0.03561)	4x4	
18%	1.4156 (0.03595)	4x4	FEM
12%	1.3574 (0.03448)	4x4	M-FEM

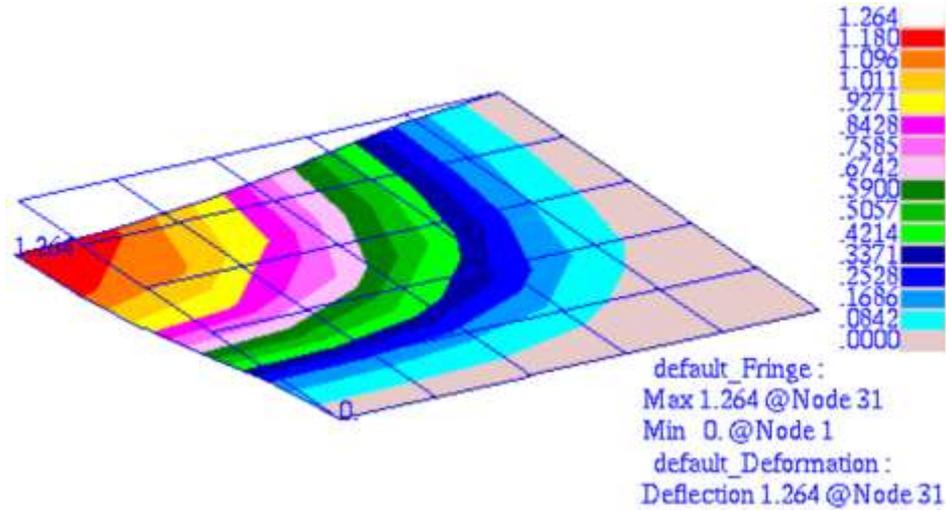
بينت النتائج أن طريقة العناصر المنتهية المعدلة أعطت أقرب قيم للحل الدقيق و أنه عند التحليل باستخدام برنامج MSC Patran يجب تقسيم البلاطة إلى عدد كبير من العناصر (100 عنصر) للحصول على حل أدق من الطريقة المعدلة، كما قمنا برسم مخطط لتوضيح تقارب الحل وفق كل طريقة من الحل الدقيق حيث كان المحور الأفقي يمثل عدد العناصر الذي تم تقسيم البلاطة وفقه و المحور الشاقولي يمثل السهم في مركز البلاطة. عند التحليل باستخدام MSC Patran قمنا بنمذجة ربع البلاطة فقط مع أخذ شروط التناظر بعين الاعتبار و ذلك لتقليل الزمن اللازم لعملية النمذجة.



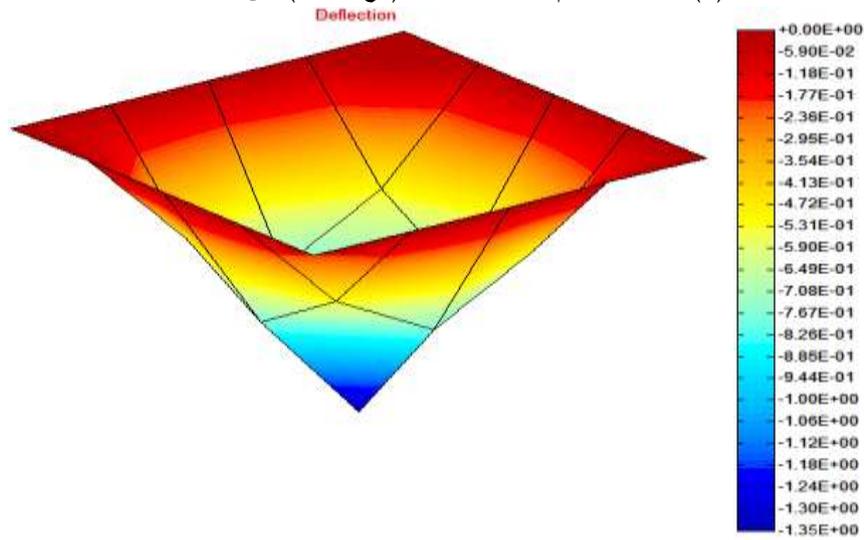
الشكل (6) . مقارنة قيم السهم في مركز البلاطة الموثوقة مع تغير عدد العناصر



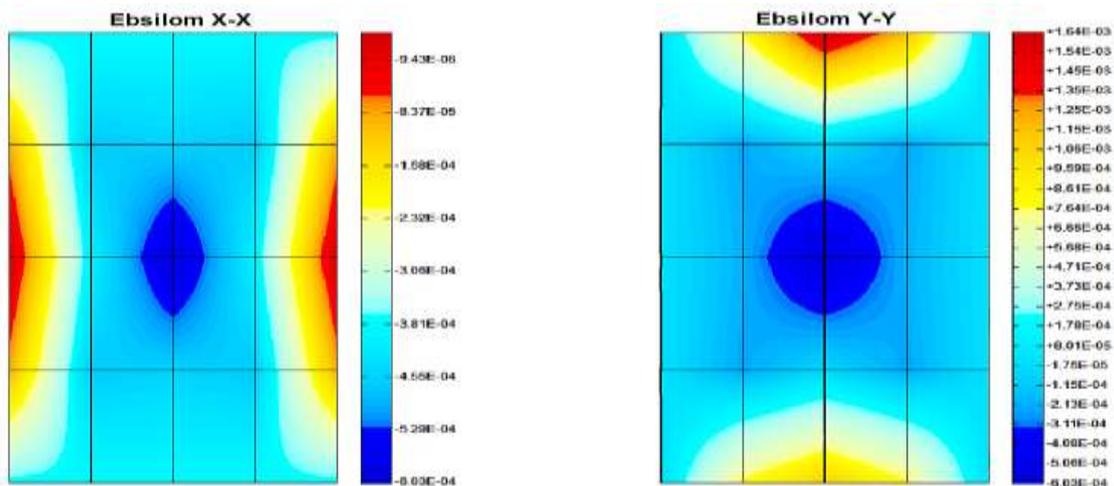
الشكل (7) . نمذجة ربع البلاطة الموثوقة (5x5) باستخدام برنامج MSC Patran



الشكل (8) . مخطط السهم للبلاطة الموثوقة (ربع البلاطة) وفق MSC Patran



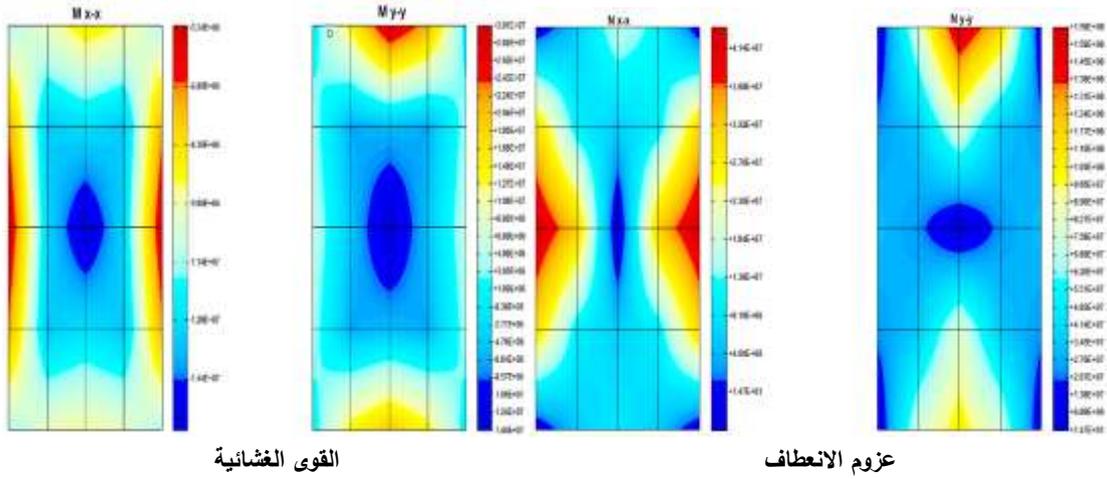
الشكل (9) . مخطط السهم للبلاطة الموثوقة وفق الطريقة المعدلة



التشوه الناظمي وفق المحور  $y$

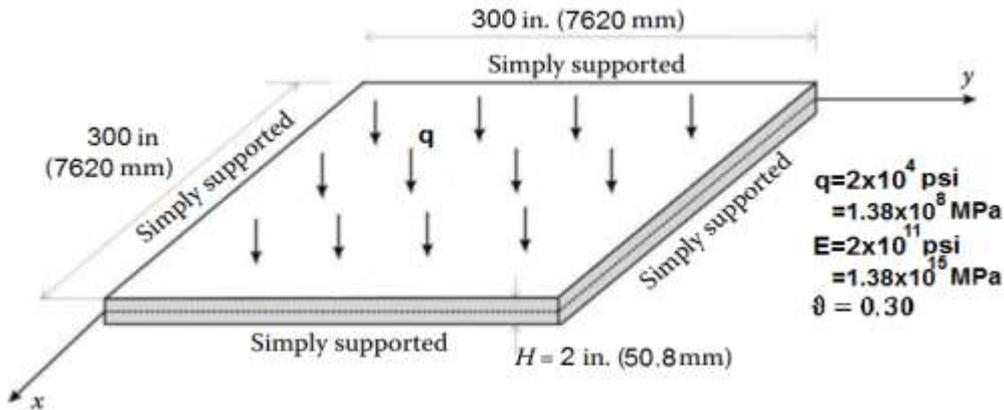
التشوه الناظمي وفق المحور  $x$

الشكل (10) . كونتور التشوه وفق المحورين  $(x, y)$  للبلاطة الموثوقة وفق الطريقة المعدلة



الشكل (11) . كونتورات عزوم الانعطاف و القوى الغشائية للبلطة الموثوقة وفق الطريقة المعدلة

في المثال الثاني سوف ندرس البلاطة ذات الاستناد البسيط من جميع أطرافها بالأبعاد و المواصفات الهندسية المعطاة في الشكل (12) و سوف تتم مقارنة النتائج لحالة الحل التقليدي المتطابق مع العنصر  $ACM$  أي بدون الجزء غير المتجانس و نتائج العنصر المطور مع الجزء غير المتجانس.

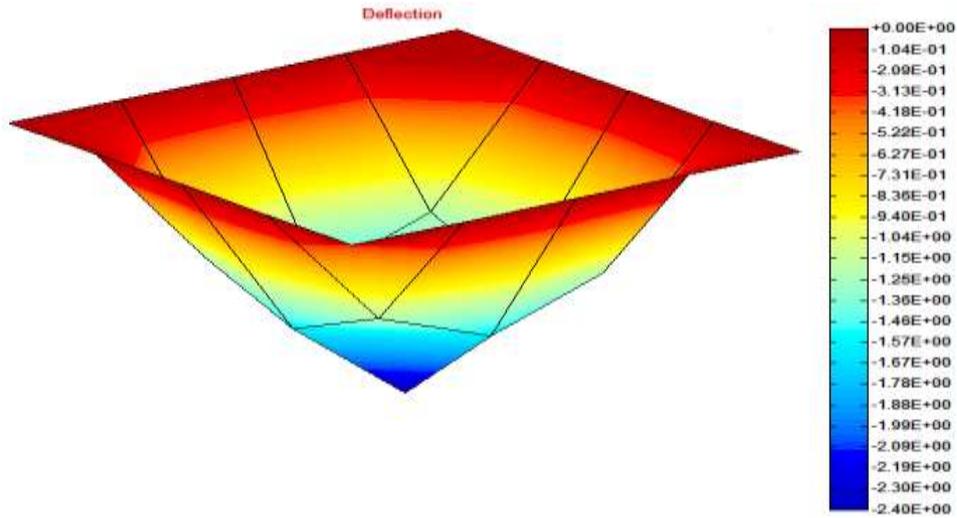


الشكل (12) . أبعاد البلاطة ذات الاستناد البسيط و خصائصها الهندسية [20]

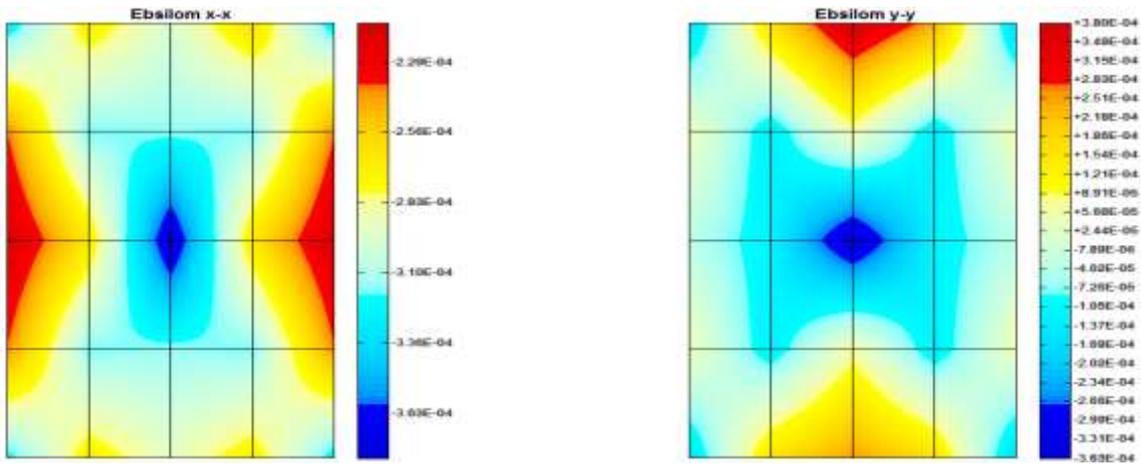
يبين الجدول (2) مقارنة بين قيم السهم في مركز البلاطة وفق الطريقة التقليدية (FEM)، المعدلة (M-FEM)، و وفق برنامج MSC Patran و مع تقسيم البلاطة إلى 16 عنصر.

الجدول (2) . مقارنة قيم السهم في مركز البلاطة

السهم في مركز البلاطة (Inch) (m)	عدد العناصر (Meshing)	طريقة التحليل المستخدمة
2.4824 (0.06305)	4x4	MSC Patran
2.5506 (0.06478)	4x4	FEM
2.4034 (0.06104)	4x4	M-FEM



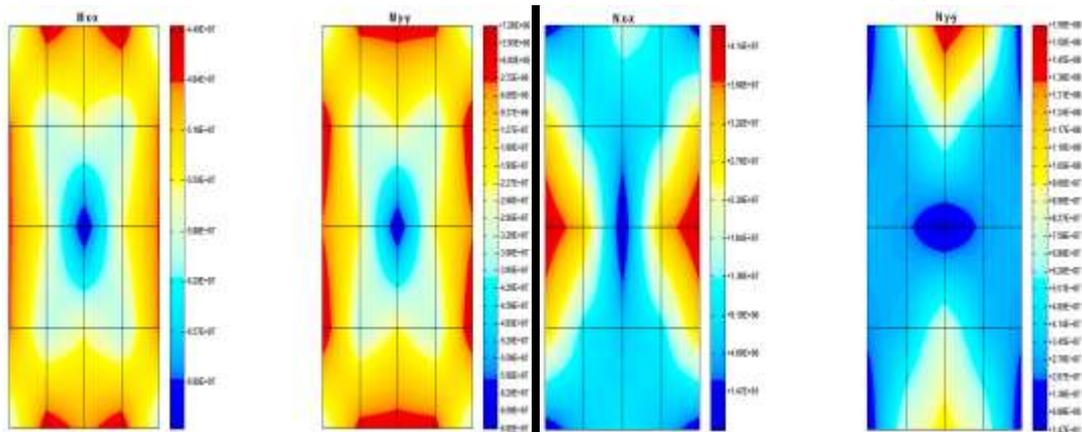
الشكل (13) . مخطط السهم للبلطة ذات الاستناد البسيط وفق الطريقة المعدلة



التشوه الناظمي وفق المحور  $y$

التشوه الناظمي وفق المحور  $x$

الشكل (14) . كونتور التشوه وفق المحورين  $(x, y)$  للبلطة ذات الاستناد البسيط وفق الطريقة المعدلة



القوى الغشائية

عزوم الانعطاف

الشكل (15) . كونتورات عزوم الانعطاف و القوى الغشائية للبلطة ذات الاستناد البسيط وفق الطريقة المعدلة

## الاستنتاجات و التوصيات

### الاستنتاجات

- قيم الانتقالات الناتجة باستخدام الطريقة المعدلة كانت الأقرب للحل الدقيق و بالتالي هذه الطريقة أظهرت فعالية مقارنةً بطريقة العناصر المنتهية التقليدية و النتائج التي يولدها برنامج Patran .
- تخفض الطريقة المعدلة من الزمن اللازم لعملية التحليل (حجم العمل المبذول من قبل الحاسب) كونها تعطي حل جيد على الرغم من تقسيم الشبكة لعدد عناصر قليل نسبياً .

### التوصيات

- نوصي بالبدء بتطوير برمجيات تستخدم طريقة العناصر المنتهية المعدلة في تحليل البلاطات الرقيقة لكفاءتها مقارنةً مع طريقة العناصر المنتهية التقليدية و الطرق الأخرى المعتمدة في برامج عالمية معروفة كبرنامج Patran أو أية برامج أخرى .

### المراجع :

- [1] HERMOGENES ,B.S. " *Elastic Second-Order Computer Analysis Of Beam-Column And Frames*", Presented to the Faculty of the Graduate School of The University of Texas at Austin in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of MASTER,1991,128.
- [2] PICA, A. "Geometrically nonlinear Analysis of Mindlin plates by finite element method" . University of Wales, Swansea, U.K.C/M/132/78 (Mar. 1978), 24 .
- [3] MELLIERE, R.A. "A finite element method for geometrically nonlinear large displacement problems in thin elastic plates and shells". Mechanical engineering, University of Missouri – Rolla : USA (1969), 104 .
- [4] MURRY, D.W. WILSON, E.L. "Finite element large deflection analysis of plates". A.S.C.E 95(EMI), (Feb. 1969), 143-165 .
- [5] VENTSEL ,E. KRAUTHAMMER ,Th. "Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications". New York : Marcel Dekker, Inc ; 2001, 651 .
- [6] ZIENKIEWICZ, O.C. TAYLOR, R.L. "The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics Sixth edition". New York : Elsevier ; 2005, 459 .
- [7]BAKKER, MCM. ROSMANIT, M. HOFMEYER, H., "Approximate large deflection analysis of simply supported rectangular plates under transverse loading using plate post-buckling solution" , Struct, Design, 46(11), 2008 ,1224-1235 .
- [8]WANG, D. EL-SHEIKH, A.I., "Large-deflection mathematical analysis of rectangular plates", Journal of Engineering Mechanics, Vol 131, Issue 8, 2005 , pp 809-821.
- [9]MARTIN, H. C., "On the derivation of stiffness matrices for the analysis of large deflection and stability problem", Proceedings of the conference of matrix methods in structural mechanics, Ohio USA, 1966, TR-66-80.
- [10]ARGYRIS, J. H., "Matrix Analysis of Three-Dimensional Elastic Media, Small and Large Displacements", AIAA Journal, Vol. 3, No. 1, Jan. 1965, pp. 45-51.
- [11]SCHMIT, L. A. , BOGNER, F. K. and FOX, R. L., "Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Shell Discrete Elements", AIAA Journal, Vol. 6, No. 5, May 1968, pp. 781-791.

- [12] أبو دياب، سليمان. " طرق الطاقة في ميكانيك الإنشاءات الخطي"، طرق العناصر المنتهية الستاتيكية"، دار الحصاد، دار الكلمة، دمشق 1998، 156.
- [13] زروف، علي. " استخدام الطريقة المعدلة للعناصر المنتهية (نموذج الانتقالات) لحل جيزان فلاسوف الرقيقة"، دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الهندسة من جامعة تشرين، اللاذقية، 2009، 106.
- [14] إسماعيل، نادين. " دراسة الإطارات المستوية (و الفراغية) وفق نظرية المرتبة الثانية باستخدام طريقة العناصر المنتهية المعدلة"، دراسة أعدت لنيل درجة الماجستير في الهندسة المدنية من جامعة تشرين، اللاذقية 2013، 133.
- [15] ABO DIAB, S. "Generalization of a reduced Trefftz type approach –some numerical results", sixth U.S. National congress on Computational Mechanics, Dearborn Michigan, USA, 01-04, August 2001, pp.595.
- [16] ABO DIAB, S. "Formatting of Quadrilateral Finite element", Fifth World congress on Computational Mechanics (WCCMV), Vienna, Austria, (Editors: Mang H.A, Rammer stoffer, F.G, Eberhardsteinerm J. publisher Vienna University of Technology ,Austria, ISBN 3-9501554-06; <http://wccm.tuwien.ac.at>, July 2002.
- [17] ABO DIAB, S., "The natural boundary conditions as a variational basis for finite element methods – quadrilateral plate bending elements". In CD-ROM: Numerical Methods in Continums Mechanics 2000 Eds. V. Kompis, M. Zmindak, E. W. A. Maunder, Liptovsky Jan, Slovakia, 2000, Paper No. 083.
- [18] ABO DIAB, S., "Quadrilateral folded plate structure elements of reduced Trefftz Type", CAMES, vol. 10: No. 4, 2003, pp. 391-406.
- [19] ABO DIAB, Y. S., "Finite Element based on Reduced Trefftz Type Concepts", Sixth World Congress on Computational Mechanics (WCCM VI), Beijing, China, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, <http://www.wccm6-apcom04.org.cn>, 5-10 September, 2004.
- [20] MSC Patran 2012.2, Reference Manual Part 6, "Results Post processing", MSC Software Corporation, USA, 2012, 466 .