

Dynamic modeling of the stresses at contact points between the deformed bodies surface depending on Hertz theory and Fourier transforms

Dr. Thaer Osman¹
Dr. Suleiman Ali²

(Received 16 / 11 / 2017. Accepted 18 / 2 / 2018)

□ ABSTRACT □

The main objective of this article is to simulate the contact stresses distribution between the deformed bodies using Hertz theory to distribution of normal pressure and inverse fast Fourier transform, with consideration of the friction ,sinusoidal roughness effects and the change of contact point position with the time. In order to determine the distribution of stresses and the maximal value of equivalent Von Misses stress et its position under the surface. The obtained results show the large effects of friction and roughness on distribution of stresses and on maximal values of Von Misses stress and its position.

Keywords: stress – inverse fast Fourier transforms – friction – roughness .

¹ Associate professor – Design and Production Department- Mech and Elect Engineering Faculty – Tishreen- university - Syria

² Associate professor – Design and Production Department- Mech and Elect Engineering Faculty – Tishreen- university - Syria

نمذجة ديناميكية لتوزع الإجهادات في نقاط التماس بين سطوح الأجسام القابلة للتشوه بالاعتماد على نظرية هرتز وتحويلات فورييه.

د. ثائر عثمان¹

د. سليمان علي²

(تاريخ الإيداع 16 / 11 / 2017. قُبل للنشر في 18 / 2 / 2018)

□ ملخص □

يهدف البحث المقدم هنا، إلى نمذجة توزع الإجهادات في جميع نقاط التماس بين الأجسام القابلة للتشوه، وذلك بتطبيق نظرية هرتز لتوزع الضغط الناظمي بين السطوح المتماصة وتحويلات فورييه، مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير كل من الاحتكاك وتوزع الخشونة الجيبية بين السطوح من جهة، وتغير موضع إحداثيات نقطة التماس مع الزمن من جهة أخرى. إن منطقة التماس تم تقسيمها إلى عدد كبير من العناصر المادية الصغيرة، وذلك بهدف تحديد توزع الإجهادات وحساب القيمة الأعظمية لإجهاد فون ميسس المكافئ ومكان توضعها ضمن طبقات المادة. تشير النتائج الحاصلة إلى تأثير كبير لكل من الاحتكاك والخشونة على توزع الإجهادات وقيمها من جهة ومكان توضع القيم الأعظمية لهذه الإجهادات من جهة أخرى.

الكلمات المفتاحية: إجهاد- تحويلات فورييه العكسية - احتكاك - خشونة

¹مدرس - قسم هندسة التصميم والإنتاج - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - سورية
²مدرس - قسم هندسة التصميم والإنتاج - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين - سورية

مقدمة:

تتعرض الأجسام المتماسة فيما بينها، وبوجود الحركة النسبية بين سطوحها (انزلاقية أو دورانية أو كليهما معاً)، كالمسنتات، الرولمانات، دواليب القطارات مع السكك الحديدية... الخ. إلى ظهور العديد من العيوب (التعب، الاهتراء، التآكل، التنقر، الكسور...) التي تؤثر بشكل أساسي على أدائها الوظيفي من حيث إنقاص فترة عملها من جهة و التقليل من مردودها من جهة أخرى. يرتبط ظهور هذه العيوب بالعديد من العوامل الوظيفية والتريبولوجية ومن أهم هذه العوامل شروط التحميل وبالتالي قيم الإجهادات المتكونة في طبقات المادة للسطوح المتماسة. حيث يعتمد ظهور التعب والكسر الابتدائي في المادة (على سبيل المثال)، بأماكن تموضع القيم الأعظمية لإجهادات القص (أو الإجهادات المكافئة لفون ميسس) ضمن طبقات المادة. وتحت تأثير الحمل المتكرر ونتيجة لتأرجح قيم الإجهادات مع الزمن فإن هذه العيوب ستنتشر ضمن المادة حتى الوصول لمرحلة الانهيار. لذلك من المهم حساب ومعرفة توزع هذه الإجهادات بدقة ضمن طبقات المادة. لقد أجريت العديد من الدراسات في المراجع العلمية لنمذجة وحساب توزع الإجهادات [1-4] في طبقات المادة للسطوح المتماسة، لكن غالبيتها اعتمدت على وصف الإجهادات في نقطة تماس ثابتة ومحددة بالاعتماد على العلاقات التحليلية بعيد واحد المقدمة من قبل العالم Johnson عام 1986. حيث أهملت تأثير حركة السطوح وتغير موضع نقطة التماس مع الزمن في شروط الأجسام الصلبة غير القابلة للتشوه.

2. أهمية البحث وأهدافه:

في هذا البحث وبالاعتماد على لغة الماتلاب، تم تطوير نموذج حسابي لنمذجة توزع الإجهادات على السطح وضمن طبقات المادة في نقاط التماس، ضمن شروط نظرية هرتز لتوزع الضغط. حيث تم نمذجة توزع الإجهادات بالاعتماد على تحويلات فورييه العكسية (التي يرمز لها اختصاراً بالرمز IFFT)، وضمن شروط الانفعالات المستوية، طالما أن سماكة السطوح تكون كبيرة جداً مقارنة مع عرض منطقة التماس. مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير الاحتكاك وحالة السطوح (الخشونة). إن موضع نقطة التماس تتغير إحدائياتها مع الزمن وذلك بالاعتماد على سرعة السطوح المتماسة. بهذه الطريقة فإن حقل توزع الإجهادات وقيمه يكون محسوب في كل نقطة تماس بين السطوح بالاعتماد على المنهجية المتبعة في تحديد حقل الإجهادات المقدمة في هذا البحث، يستطيع الباحث والمهتم بدراسة العيوب والضرر في الأجزاء والعناصر الميكانيكية التنبؤ بخطر ظهورها اعتماداً على القيم الأعظمية للإجهادات.

3. مواد البحث ومواده:

3-1 : نمذجة حقل توزع الإجهادات النازمية والمماسية:

عندما يتواجد جسمين في طور التماس مع بعضهما البعض، فإن التلامس يتم بالبداية من خلال نقطة واحدة أو على طول خط وذلك تبعاً لهندسية السطحين المتلامسين. تحت تأثير تزايد الحمل المطبق فإن الجسمين سيتشوهان في المنطقة المجاورة لأول نقطة تلامس وبالتالي فإن منطقة التلامس ستكون صغيرة جداً مقارنة مع أبعاد الجسمين. مما يتطلب التنبؤ بشكل منطقة التلامس وكيف تتزايد في الحجم مع ازدياد الحمل المطبق. بالمقابل، فإن الضغط النازمي والمماسي المتكون سينتقل نتيجة لذلك من خلال سطوح التلامس بين الجسمين. مما يتطلب القدرة على حساب ومعرفة توزع الإجهادات والتشوهات في كلا الجسمين في منطقة التشوه. لذلك تستخدم نظرية هرتز لتحديد حجم منطقة التماس المرنة لسطحي جسمين في طور التماس ضمن معطيات هندسية، خصائص مرنة وحمل محدد. حيث تفترض هذه

النظرية أن كل جسم يمكن اعتباره كجسم صلب نصف مرن. وبالتالي عندما يقع جسمين في طور التماس فإن مساحة التماس تكون صغيرة جداً مقارنة مع قيم الضغط المؤثر الذي يملك قيم مرتفعة جداً. بالاعتماد على هذه الشروط فإن أي نقطة تماس بين السطوح ستعرض لضغط ناظمي $P(x)$ و ضغط مماسي $q(x)$ ، الشكل (1). وبالتالي فإن قوى الشد العاملة على السطح في أي نقطة تماس (النقطة B ، فرضاً)، تبعد مسافة s عن المركز، على مساحة عنصرية من العرض قدرها ds هي عبارة عن تركيز للقوى الناتجة من $P.ds$ الناظمية على السطح والقوى الناتجة عن $q.ds$ المماسية على السطح. حيث إن الإحداثيات المرجعية توصف بالشكل $(x_0=0, y_0=0)$. ونتيجة للحركة النسبية بين السطوح وتغير موضع نقطة التماس، فإن الإحداثي x سيتغير موضعه مع الزمن t وفق العلاقة التالية:

$$x = x_0 + Vt \quad (1)$$

حيث V : تمثل سرعة أحد الجسمين 1 أو 2.

بينما الإحداثي y (الذي يمثل إحداثي العمق تحت السطح) يوصف وفق مايلي: $y = y_0 + \Delta y$. الشكل (1). حيث Δy يمثل مقدار التزايد. إن الضغط المماسي يحسب بالاعتماد على علاقة كولومب وفق الصيغة التالية: $q(x) = \mu . P(x)$ حيث μ يمثل معامل الاحتكاك بين السطوح. ونتيجة لذلك فإن إحداثيات أي نقطة تماس توصف بالشكل $A(x,y)$ ، الشكل (1).

بعد حساب قيم الضغط الناظمي والمماسي في كل نقطة تماس وضمن شروط الانفعالات المستوية فإن مركبات الإجهادات تتحدد بالمركبات الثلاث $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ وبالنتيجة فإن مركبات الإجهادات في أي نقطة ضمن طبقات المادة ($y>0$) والناتجة عن توزع الضغط الناظمي (σ_{ij}^n) والمماسي (σ_{ij}^t) ، تعطى بالعلاقات التالية [5]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^n + \sigma_{ij}^t \quad \forall i, j \in (x, y, z) \quad (2)$$

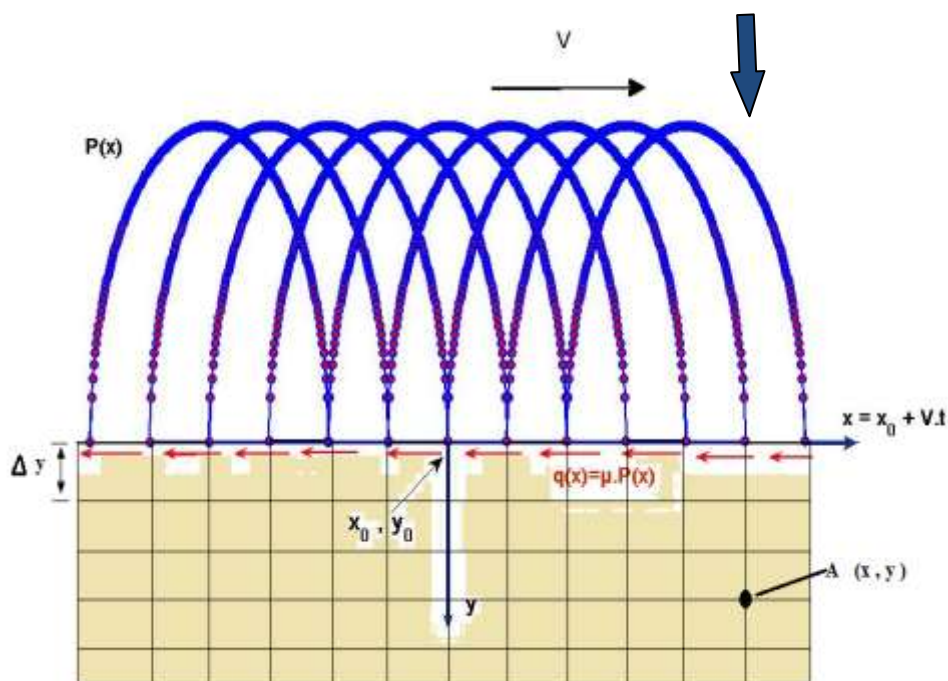
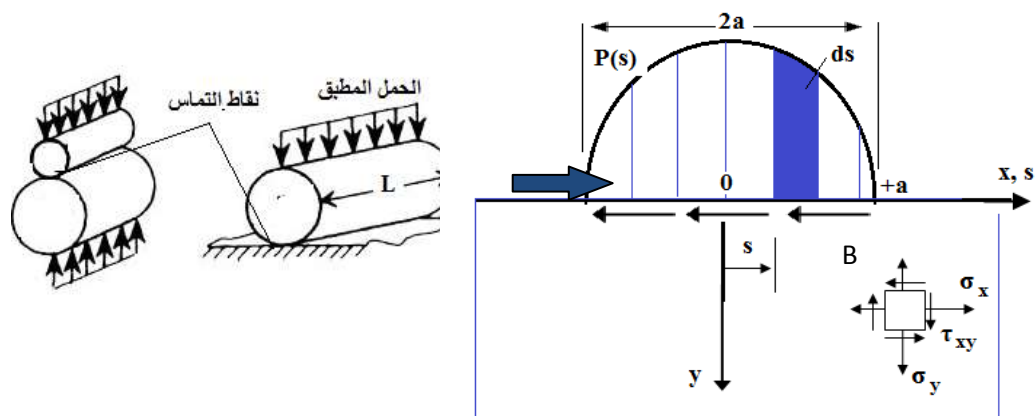
$$\sigma_x(x, y, t) = -\frac{2y}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{P(s,t)(x-s)^2}{[(x-s)^2+y^2]^2} ds - \frac{2}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(s,t)(x-s)^3}{[(x-s)^2+y^2]^2} ds \quad (3)$$

$$\sigma_y(x, y, t) = -\frac{2y^3}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{P(s,t)}{[(x-s)^2+y^2]^2} ds - \frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(s,t)(x-s)}{[(x-s)^2+y^2]^2} ds \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x, y, t) = -\frac{2y^2}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{P(s,t)(x-s)}{[(x-s)^2+y^2]^2} ds - \frac{2y}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(s,t)(x-s)^2}{[(x-s)^2+y^2]^2} ds \quad (5)$$

$$\sigma_z(x, y, t) = v \left(\sigma_x(x, y, t) + \sigma_y(x, y, t) \right) \quad (6)$$

حيث أن v تمثل نسبة بواسون.



الشكل (1): نمذجة حقل توزيع الإجهادات ضمن طبقات المادة (a : يمثل عرض منطقة التماس).

بعد حساب قيم الضغط الناظمي والمماسي في كل نقطة تماس وضمن شروط الانفعالات المستوية فإن مركبات الإجهادات تتحدد بالمركبات الثلاث $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ وبالنتيجة فإن مركبات الإجهادات في أي نقطة ضمن طبقات المادة ($y > 0$) والناتجة عن توزيع الضغط الناظمي (σ_{ij}^n) والمماسي (σ_{ij}^t)، تعطى بالعلاقات التالية [5]:

على السطح حيث أن $y=0$ ، فإن مركبات الإجهادات تصبح وفق مايلي:

$$\sigma_y(x, 0, t) = -P(x, t) \quad , \quad \tau_{xy}(x, 0, t) = -q(x, t) \quad (7)$$

$$\sigma_x(x, 0, t) = -P(x, t) - \frac{2}{\pi} \int_{-a}^{+a} \frac{q(x, t)}{x-s} ds \quad (8)$$

باستخدام تحويلات فورييه $P(w)$ و $Q(w)$ لكل من الضغط الناظمي $P(x)$ والمماسي $q(x)$ على الترتيب والتي تعطى وفقاً لما يلي:

$$Q(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) \cdot e^{-2\pi i x w} dx \quad ; \quad P(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \cdot e^{-2\pi i x w} dx \quad (9)$$

لأجل القيم الموجبة لـ w ، فإن دالة Airy للإجهادات يعبر عنها بالصيغة التالية [6]:

$$\phi = \frac{\{P(w)+2\pi yw[P(w)-iQ(w)]\}e^{-2\pi zw}}{(2\pi w)^2} e^{2\pi ixw} \quad (10)$$

بالاعتماد على هذه الدالة، فإن مركبات الإجهادات يجب أن تحقق معادلة التوازن وفق الشكل التالي:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad (12)$$

وبالتالي فإن مركبات الإجهادات تعطى وفق الشكل التالي:

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -[P(w) - iQ(w)]. e^{-2\pi yw}. e^{-2\pi ixw} = F_1(w). e^{2\pi ixw} \quad (13)$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \{2\pi zw[P(w) - iQ(w)] + iQ(w)\}. e^{-2\pi yw}. e^{-2\pi ixw} = F_2(w). e^{2\pi ixw} \quad (14)$$

$$\tau_{xy} = i\{2\pi zw[P(w) - iQ(w)] + iQ(w)\}. e^{-2\pi yw}. e^{-2\pi ixw} = F_3(w). e^{2\pi ixw} \quad (15)$$

وبالنتيجة فإن مركبات الإجهادات تحسب بالاعتماد على تحويلات فورييه العكسية (inverse fast Fourier

transform) والتي يرمز لها بالرمز IFFT وفق مايلي:

$$F_1(w) \xrightarrow{IFFT} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (16)$$

$$F_2(w) \xrightarrow{IFFT} \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad (17)$$

$$F_3(w) \xrightarrow{IFFT} \tau_{xy} \quad (18)$$

2: نمذجة تأثير الخشونة:

من المعلوم أن وجود الخشونة على سطوح الأجسام المتماسية سيغير من توزع الضغط الناظمي، من جهة، ويزيد من خطر التعب من جهة أخرى. هذه الخشونة تتعلق بدرجة إنهاء السطوح ويتناقص سماكة طبقة التزيت الفاصلة بين السطوح المتماسية. حيث تشير الدراسات المرجعية على أن تناقص كمية الزيت بين السطوح المتماسية تؤدي لتناقص سماكة فلم التزيت وبالتالي زيادة الاحتكاك وتزايد خطر التعب بين السطوح. إن تحديد حقل توزع الضغط الناتج عن الخشونة (وبالنتيجة حقل توزع الإجهادات في نقاط التماس) يتم غالباً باستخدام العلاقات التحليلية لتوزع الخشونة الجيبية أو باستخدام نماذج عددية متطورة [6-8]. في بحثنا المقدم هنا، سنعتبر أن توزع الخشونة يتم بشكل موجات جيبية وذلك اعتماداً على النتائج التجريبية لشكل توزع الخشونة [5, 7, 8]، وفق الشكل التالي:

$$\vartheta(x) = amp. \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}. x\right) \quad (19)$$

حيث تمثل amp، λ : مطال و طول الموجة للخشونة الجيبية على الترتيب.

وبالتالي اعتماداً على الضغط المطبق وهندسية الخشونة يمكننا أن نميز منطقتين لسطح التماس، حيث يمكن

أن تكون مستمرة أو متقطعة وذلك بالاعتماد على البارامتر χ الذي يعطى بالعلاقة التالية، [8]:

$$\chi = \frac{\pi.E}{2.P_{max}} \frac{amp}{\lambda} \quad (20)$$

حيث P_{max} : ضغط هرتز الاعظمي. E : موديل اللدونة المكافئ للسطحين المتماسين

كما هو موضح في الجدول (1) الذي يعطي قيمة الضغط الأعظمي الناتج عن الخشونة وذروة (*peak*) هذا الضغط بالنسبة للقيمة الأعظمية لضغط هرتز.

الجدول (1): ميزات مناطق التماس تحت تأثير الخشونة الجيبية تبعاً لقيم البارامتر χ

قيمة البارامتر χ	$\chi < 1$	$\chi > 1$
منطقة التماس	مستمرة	متقطعة
الضغط الأعظمي	$P_R = P_{max}(1 + \chi)$	$P_R = 2 \cdot \sqrt{\chi} P_{max}$
قيمة ذروة الضغط دون بعد	$\Delta P = \frac{\Delta p}{P_{max}} = \chi$	$\Delta P = \frac{\Delta p}{P_{max}} = 2\sqrt{\chi-1}$

وبالتالي فإن توزع الضغط بوجود الخشونة الجيبية على سطوح التماس يعطى بالعلاقة التالية، [8]:

$$P_R(x) = \Delta p \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \quad (21)$$

بناء على ذلك فإن نمذجة حقل توزع الإجهادات في نقاط التماس هي عبارة عن تراكب (*superposition*) حقل إجهادات هرتز (سطوح ناعمة) وحقل الإجهادات الناتجة عن الخشونة. هذه النمذجة تعتمد على بارامترين فقط وهما مطال وطول موجات الخشونة. ونتيجة لذلك وباستخدام شروط الانفعالات المستوية وتحويلات فورييه (*Fourier Transforms*) تبعاً لنوع مساحة التماس (متقطعة أو مستمرة) فإن حقل توزع الإجهادات في أي نقطة تماس يعطى بالعلاقات التالية:

$$\sigma_x = \Delta p \cdot \left[1 - \frac{2\pi}{\lambda} x\right] e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (22)$$

$$\sigma_y = \Delta p \cdot \left[1 + \frac{2\pi}{\lambda} x\right] e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (23)$$

$$\sigma_z = 0.6 \Delta p \cdot e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = -\Delta p \cdot \left[\frac{2\pi}{\lambda} x\right] e^{-\frac{2\pi}{\lambda} y} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (25)$$

النتائج والمناقشة:

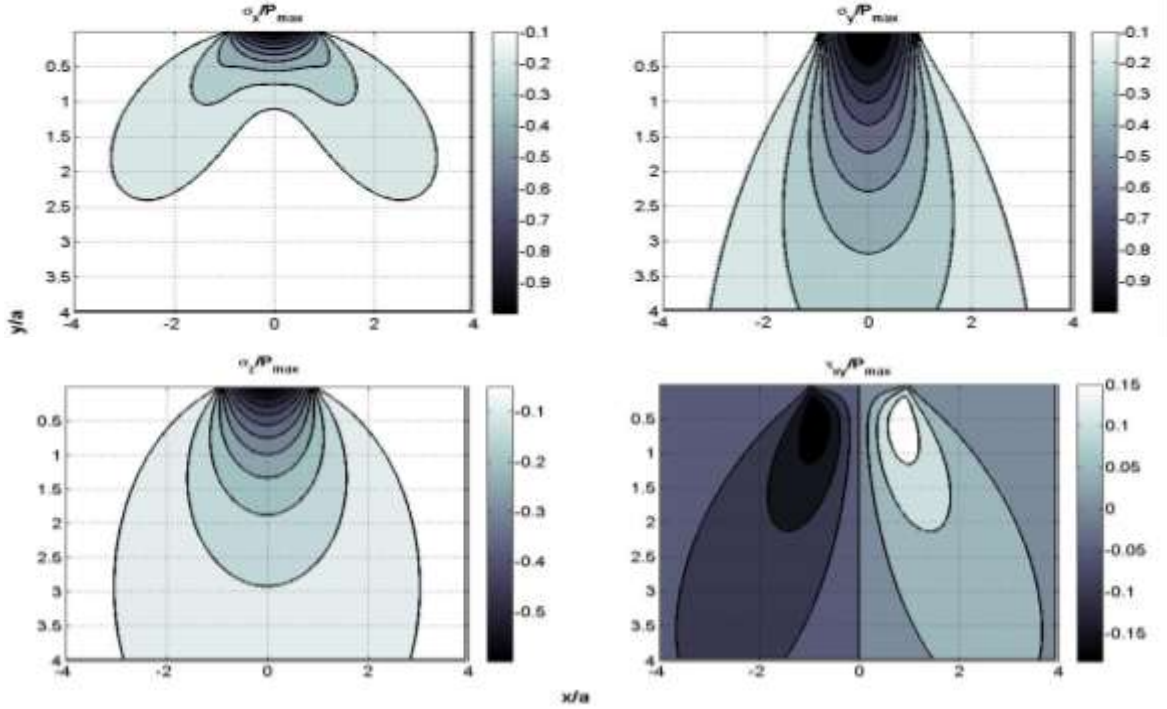
خلال عملية النمذجة، فإن حقل حساب الإجهادات لكل منطقة تماس تم تقسيمها إلى العديد من العناصر المادية وفق الأبعاد التالية ($N \times M = 1600 \times 4000$)، حيث يشير البعد N إلى العناصر المادية المدروسة حسب المحور x و البعد M عدد تلك العناصر المدروسة حسب المحور y. إن زيادة عدد العناصر المادية المدروسة يعطي معرفة دقيقة لتوزع الإجهادات وبالنتيجة التحديد الدقيق لتموضع القيم الأعظمية للإجهادات.

إن المعطيات الهندسية والوظيفية لحساب توزع الإجهادات في نقاط التماس للجسمين المتماسين (والذان هما عبارة عن جسمين إسطوانيين في مثالنا هذا) موضحة في الجدول (2).

الجدول (2): المعطيات الهندسية المستخدمة في عملية النمذجة لتوزع الإجهادات

E_1, E_2 (GPa)	معامل يونغ (المرونة) للجسمين 2&1	207
ν_1, ν_2	نسبة بواسون للجسمين 2&1	0.3
P_{max} (GPa)	قيمة الضغط الأعظمي المؤثر	1.5
a (mm)	نصف عرض منطقة التماس بين الجسمين	0.250
Δy	مقدار التزايد في الاحداثي y ضمن طبقات المادة	$\Delta y = 0.001$
Δt (sec)	مقدار التزايد في الزمن	0.001
V_1, V_2 (m/sec)	سرعة الجسمين 2&1	5

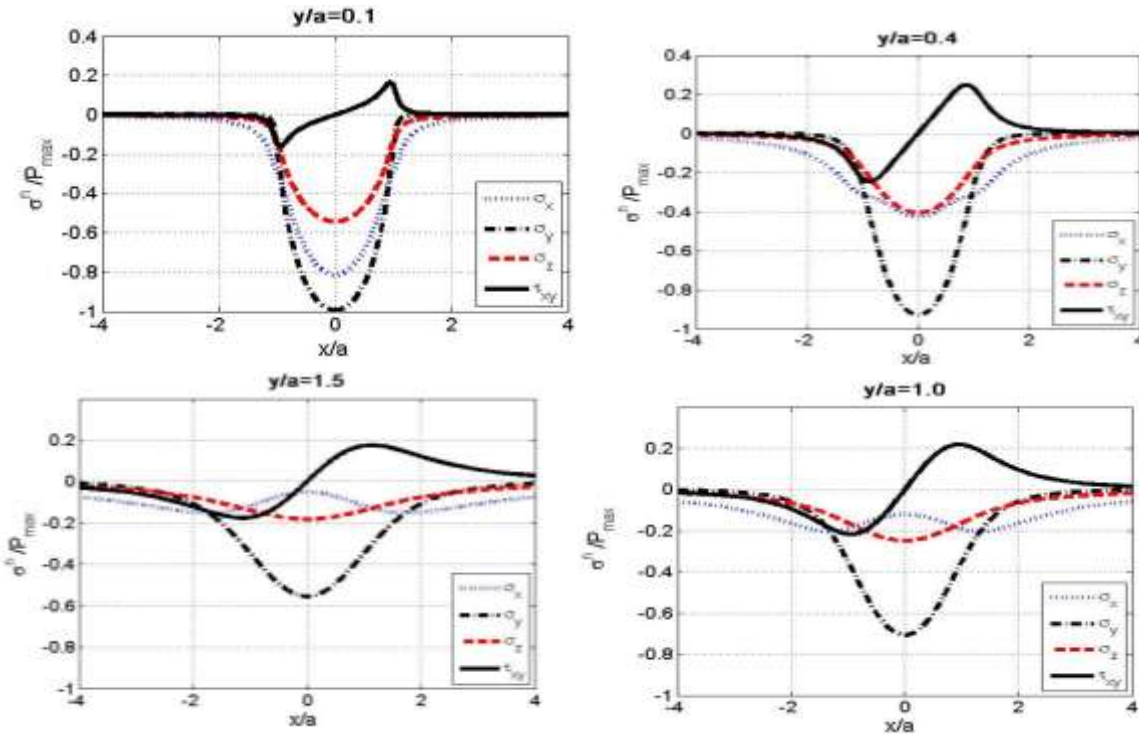
إن النتائج الحاصلة لحقل توزع مركبات الإجهادات ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$) في نقاط التماس بين الجسمين (بإهمال تأثير الاحتكاك والخشونة) موضحة في الشكل (2). حيث يمكننا ملاحظة أن مركبات الإجهادات الناظمية $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ تملك قيم سالبة في جميع نقاط التماس باستثناء إجهادات القص τ_{xy} التي تملك قيمة سالبة (بعكس اتجاه الحركة) وقيمة موجبة (في اتجاه الحركة). مما يمكننا من الاستنتاج بأن مركبة إجهاد القص τ_{xy} هي المركبة الأكثر تأثيراً في حصول التعب في المادة بسبب امتلاكها لقيم موجبة للإجهاد في اتجاه الحركة. نستنتج من الشكل (2) أن قيم إجهادات القص τ_{xy} الموجبة هي التي تؤثر سلباً على مقاومة التعب وظهور الشقوق الابتدائية، بينما تؤثر باقي المركبات الناظمية ومركبة إجهادات القص السالبة بعكس الحركة إيجابياً على مقاومة التعب.



الشكل (2): حقول توزع الإجهادات في نقاط التماس بالنسبة للضغط الأعظمي (P_{max} , $\mu=0$)، بإهمال تأثير الخشونة

بالإضافة لذلك، تبلغ القيم الأعظمية لمركبات الإجهادات الناظمية في مركز منطقة التماس ($x=0$) وعلى السطح ($y=0$) ثم تتناقص قيمها باتجاه العمق ضمن طبقات المادة (كلما ابتعدنا عن السطح) وعن مركز منطقة التماس. بالمقابل، تتقدم قيم إجهادات القص على السطح وتبلغ القيم الأعظمية ضمن المادة أي تحت السطح وخارج منطقة التماس وتبلغ القيمة العظمى لإجهاد القص τ_{xy} عند $x = \pm 0.87 a$ وعلى عمق $y=0.5a$ وتبلغ قيمتها العظمى $max(\tau_{xy}) \cong 0.25 * P_{max}$. الشكل (3)، وذلك بإهمال تأثير خشونة السطح.

إن استخدام طريقة النمذجة السابقة تسمح لنا بتحديد قيم مركبات الإجهادات الناظمية وإجهادات القص في أي نقطة تماس بغض النظر عن إحدائياتها، كما هو مبين في الجدول (3) والجدول (4) وذلك في حالة إهمال تأثير خشونة السطح المتلامسة. حيث يمكننا ملاحظة أن مركبات الإجهاد σ_x, σ_y تساوي لقيمة الضغط الأعظمي ($\sigma_x = \sigma_y = P_{max}$) في مركز نقطة التماس ($x=0, y=0$) وعلى السطح، ثم تبدأ القيم بالتناقص بالابتعاد سواء ضمن طبقات المادة أو باتجاه أو عكس الحركة للسطح.



الشكل (3): تأثير موضع نقطة التماس تحت السطح على قيمة وتوزيع الاجهادات بالنسبة للضغط الأعظمي P_{max} ، $\mu=0$ ، بإهمال تأثير الخشونة) هنا يجب التنويه على أن قيم الاجهاد الناظمي σ_z لم توضع قيمه في الجدول (3) لأنه يعطى كمجموع جبري لمركبات الاجهاد σ_x, σ_y مضروب بنسبة بواسون ($\nu=0.3$ في مثالنا هذا). الجدول (4) يعرض قيم إجهاد القص τ_{xy} بالنسبة لقيمة الضغط الأعظمي P_{max} لإحداثيات مختلفة لنقاط التماس. حيث نلاحظ أن إجهاد القص τ_{xy} يعدم على السطح ويبلغ قيمته الأعظمية ضمن طبقات المادة و خارج مركز منطقة التماس وذلك عند إحداثيات تحت السطح ضمن المادة $\pm x/a = 0.8$ و $y/a = 0.6$ ، كما هو واضح من الجدول (4). إن هذه القيم تتطابق مع حقول توزيع الإجهادات في نقاط التماس بالنسبة للضغط الأعظمي P_{max} عند إهمال الخشونة المبينة في الشكل (3) السابق.

الجدول (3): قيم مركبات الاجهادات σ_x, σ_y بالنسبة لقيمة الضغط الأعظمي P_{max} لأجل إحداثيات مختلفة لنقطة التماس.

y/a	$\pm x/a=0$		$\pm x/a=0.2$		$\pm x/a=0.4$		$\pm x/a=0.8$		$\pm x/a=1$		$\pm x/a=1.5$	
	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y	σ_x	σ_y
0	1.00	1.00	0.980	0.980	0.917	0.917	0.600	0.600	0	0	0	0
0.2	0.659	0.981	0.642	0.959	0.591	0.892	0.402	0.549	0.329	0.212	0.124	0.006
0.4	0.426	0.928	0.416	0.906	0.391	0.834	0.330	0.509	0.316	0.281	0.197	0.034
0.6	0.275	0.857	0.272	0.843	0.267	0.765	0.270	0.490	0.276	0.320	0.221	0.074
0.8	0.180	0.781	0.182	0.760	0.188	0.699	0.217	0.474	0.232	0.342	0.218	0.114
1	0.121	0.707	0.125	0.660	0.135	0.638	0.173	0.457	0.192	0.352	0.201	0.148
1.5	0.051	0.555	0.054	0.544	0.065	0.514	0.099	0.410	0.118	0.346	0.148	0.202

القيم الأعظمية والأصغرية لقيم إجهادات القص في مختلف نقاط التماس (على السطح أو دون طبقات المادة)، بهدف التحديد بدقة لموضع نشوء شق التعب الابتدائي والذي هو مكان تأثير إجهاد القص الأعظمي، موضحة في الجدول (4).

الجدول (4): قيم إجهاد القص τ_{xy} بالنسبة لقيمة الضغط الأعظمي P_{max} لأجل إحداثيات مختلفة لنقطة التماس

y/a	$\pm x/a$						
	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.5
0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0	0.038	0.080	0.131	0.192	0.192	0.025
0.4	0	0.064	0.130	0.195	0.242	0.230	0.076
0.6	0	0.075	0.147	0.209	0.245	0.238	0.119
0.8	0	0.075	0.145	0.200	0.231	0.231	0.147
1	0	0.070	0.133	0.182	0.211	0.217	0.161
1.5	0	0.050	0.096	0.134	0.160	0.173	0.162

1: تأثير الاحتكاك بين السطوح:

يرتبط زيادة الاحتكاك، غالباً، بتناقص سماكة طبقة التزييت الفاصلة بين السطوح المتماسية وذلك نتيجة لزيادة درجة الحرارة، زيادة الحمل المؤثر وتناقص اللزوجة الديناميكية للزيت المستعمل، كما في حالة المسننات وأعمدة نقل الحركة. حيث يؤدي زيادة الاحتكاك بين السطوح إلى تزايد قيم الضغط المماسي وبالنتيجة زيادة الإجهادات المماسية. إن النتائج الحاصلة لتأثير زيادة قيم عامل الاحتكاك على توزع الإجهادات المكافئة لفون ميسس σ_{VM} والتي تعطى بالعلاقة التالية:

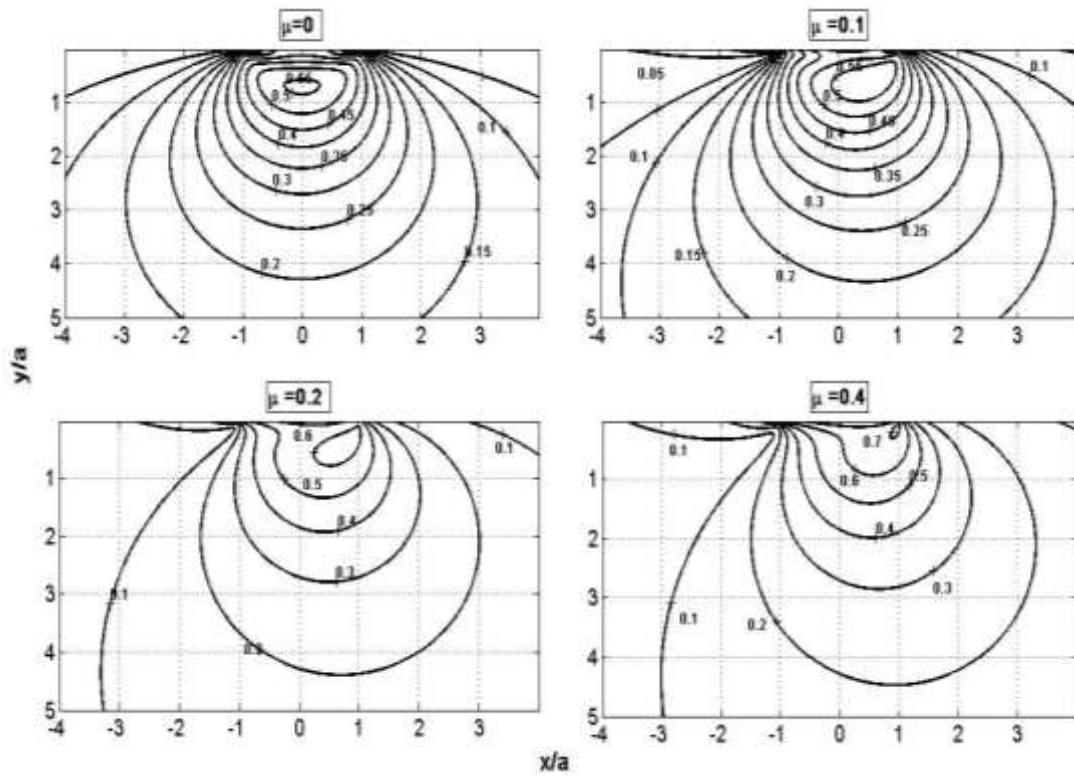
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6\tau_{xy}^2 \right]} \quad (26)$$

موضحة في الشكل (4). حيث يمكننا ملاحظة مايلي:

- تزايد قيم الاحتكاك (أي تزايد قيم عوامل الإحتكاك μ من من 0.1 إلى 0.4) تؤدي لتزايد قيمة الاجهادات المكافئة لفون ميسس كما يبين الشكل (4).
- إن موضع القيمة الأعظمية للاجهادات المكافئة لفون ميسس ينزاح باتجاه السطح وتتموضع على السطح (باتجاه الحركة عند قيمة $x=a$) عند قيم لعامل الاحتكاك أكبر من 0.3 ($\mu > 0.3$) ، الشكل (5). وفقاً لما يلي:

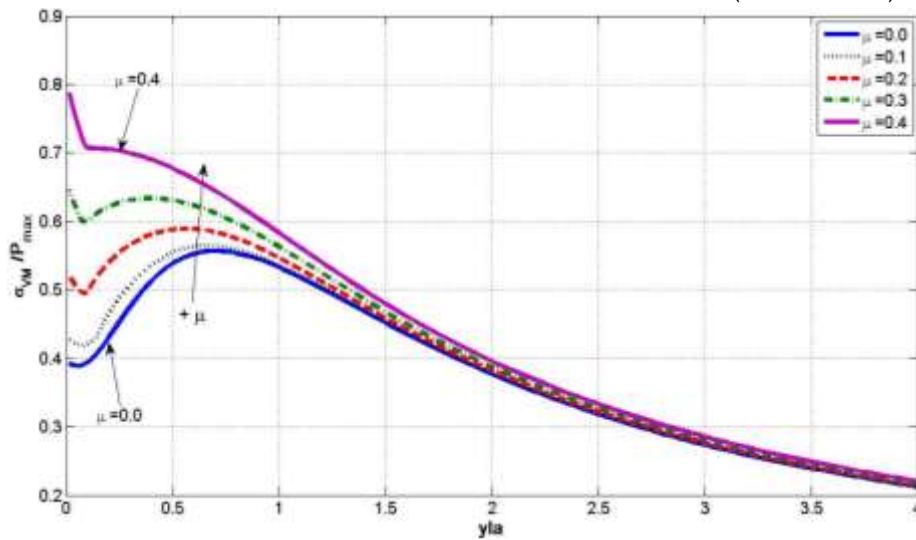
عندما $\mu=0.0$ فإن $\max\{\sigma_{VM}\} = 0.5575 * P_{max}$ عند $x=0.0$ ، $y=0.7*a$
عندما $\mu=0.1$ فإن $\max\{\sigma_{VM}\} = 0.5654 * P_{max}$ عند $x=+a$ ، $y=0.66*a$
عندما $\mu=0.2$ فإن $\max\{\sigma_{VM}\} = 0.5900 * P_{max}$ عند $x=+a$ ، $y=0.56*a$
عندما $\mu=0.3$ فإن $\max\{\sigma_{VM}\} = 0.6458 * P_{max}$ عند $x=+a$ ، $y=0.0$
عندما $\mu=0.4$ فإن $\max\{\sigma_{VM}\} = 0.7874 * P_{max}$ عند $x=+a$ ، $y=0.0$

ونتيجة لذلك فإن ظهور التعب يرتبط بقيم عوامل الاحتكاك بين السطوح المتماسية، حيث يرتبط مكان ظهور التعب الأولي (الشق الأولي للتعب) بمكان تموضع القيمة الأعظمية للاجهادات لفون ميسس (أو إجهادات القص الأعظمية). حيث يظهر التعب ضمن طبقات المادة عند قيم منخفضة جداً لعوامل الاحتكاك وينزاح باتجاه السطح مع تزايد قيم عوامل الاحتكاك حيث تبلغ إجهادات القص الأعظمية قيماً مرتفعة فعندما يبلغ معامل الإحتكاك القيمة $\mu=0.4$ فإن الإجهادات المكافئة لفون ميسس تصل إلى القيمة التالية: $\max\{\sigma_{VM}\} = 0.7874 * P_{max}$.



الشكل (4): تأثير الاحتكاك على توزيع إجهادات فون ميسس المكافئة بالنسبة لقيمة الضغط الأعظمي

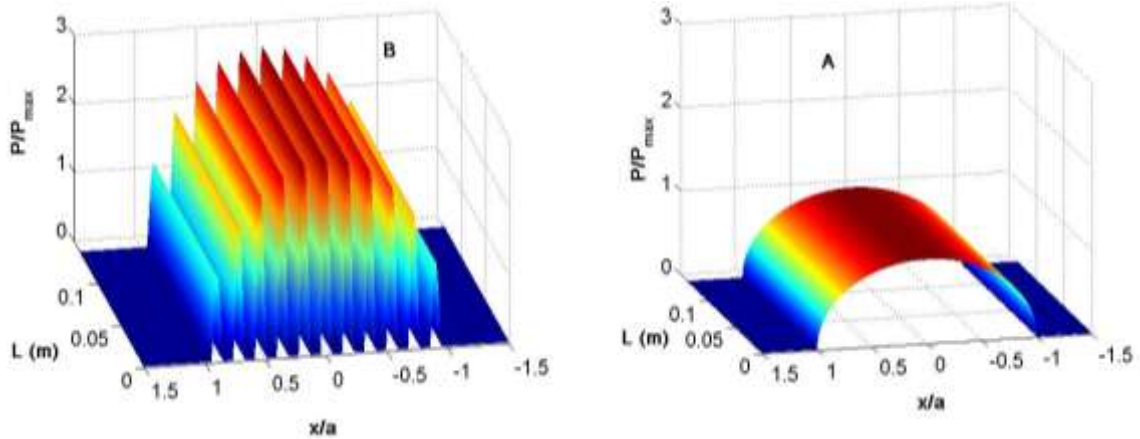
في هذا السياق، يجب التنويه على أن ظهور شق التعب الأولي ضمن طبقات المادة يؤدي لتعب التنقر (pitting) حيث كمية المادة المزالة من سطح الجسم تكون كبيرة بسبب التعب، بينما ظهوره على السطح يؤدي إلى تعب التنقر الدقيق (micropitting)، [9].



الشكل (5): توزيع القيمة الاعظمية للأجهادات المكافئة لفون ميسس بالنسبة للضغط الأعظمي تبعاً للعمق تحت السطح

2: تأثير خشونة السطوح:

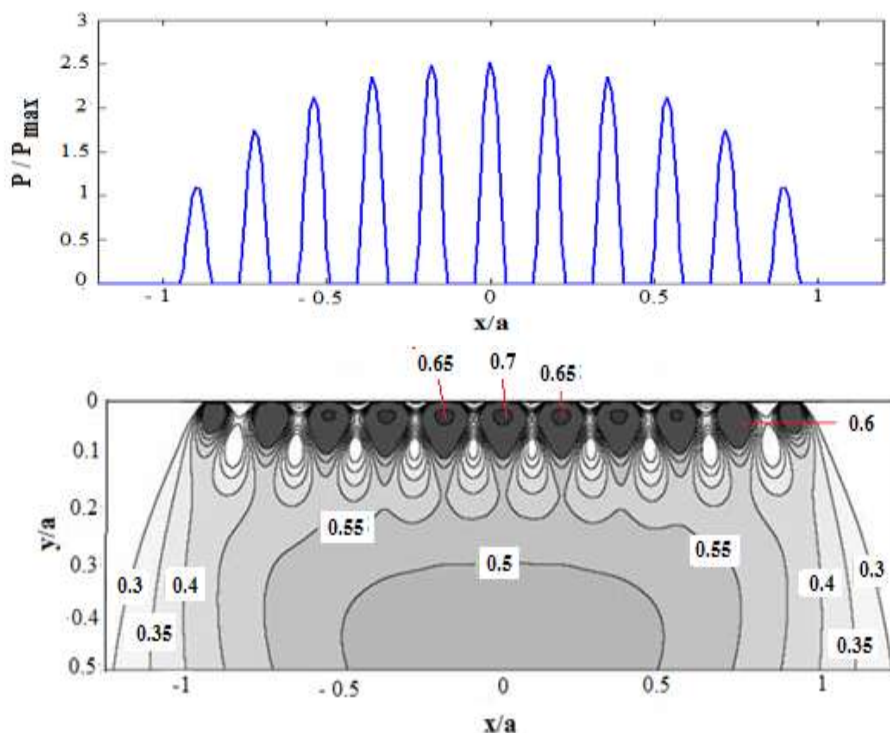
إن وجود الخشونة على سطوح الأجسام المتماصة يغير بشكل كبير من توزع الضغط الناظمي لهرتز وذلك بسبب اختلاف موقع نقاط التماس من جهة، واختلاف قيم الحمل المؤثر في هذه النقاط من جهة أخرى. كما هو موضح في الشكل (6). إن قيمة وتوزع الإجهاد تتغير في كل نقطة على طول عرض التماس $2a$ ، حيث تتزايد قيمة P_{max} الأعظمية لتصل قيمتها إلى أكثر من ضعفي القيمة في حالة السطح الأملس كما يبين الشكل (6). إن هذا التوزع للإجهاد يعتمد طبعا على قيمة كلا من طول موجة الخشونة ومطالها λ ، amp ، حيث يتركز التماس في نقاط محددة مما يؤدي إلى ارتفاع قيمة الضغط بسبب تغير توزعه، حيث تتمركز القيمة الأعظمية في مركز عرض التماس ($a=0$).



الشكل(6): تمثيل 3D لتأثير الخشونة الجيبية لتوزع الضغط على طول منطقة التماس
A: سطح أملس B: سطح خشن ($\lambda/a = 0.81$, $amp/a = 0.00081$)

حيث يؤدي وجود الخشونة (الجيبية في مثالنا هذا) إلى تغير في توزع الضغط الناظمي على طول منطقة التماس وازدياد كبير في قيمته. مما يؤدي إلى تغير كبير في أداء الأجسام المتماصة، وارتفاع في مستوى الضجيج والاهتزازات، وبالنتيجة تناقص في مردود هذه الأجسام وفي فترة عملها. إن التزايد الكبير في قيم الضغط الناظمي المؤثر على السطوح الخشنة سيؤدي بالنتيجة إلى تزايد كبير في قيم الإجهادات المكافئة لفون ميسس من جهة، وانزياح مكان تركيز قيمها الأعظمية من ضمن طبقات المادة، تحت السطح، لتتمركز على السطح، الشكل (7)، من جهة أخرى، مقارنة بالسطوح الملساء (أنظر الشكل (4)، عندما $\mu=0.0$).

إن تأثير الخشونة على توزع الإجهاد المكافئ لفون ميسس يشبه تأثير زيادة قيم عامل الاحتكاك، من حيث أن الخشونة والقيم المرتفعة لمعامل الاحتكاك تؤدي إلى زيادة في قيم الإجهاد وانتقال مكان توضع القيمة الأعظمية له من تحت السطح (ضمن طبقات المادة) باتجاه السطح، بالمقابل، فإن القيم المرتفعة لمعامل الاحتكاك تسبب في تركيز القيمة الأعظمية للإجهاد في نقطة تماس واحدة وهي نقطة نهاية حدود منطقة التماس ($x=+a$) بينما الخشونة المرتفعة تسبب في تركيز القيم المرتفعة للإجهاد على طول منطقة التماس على السطح، كما يبين الشكل (7).



الشكل (7): تأثير الخشونة الجيبية على توزيع الإجهادات المكافئة لفون ميسس بالنسبة لقيم الضغط الأعظمي.

$$((amp/a = 0.00081, \quad \lambda/a = 0.81))$$

هنا لا بد من التنويه على أنه في مثالنا هذا وبالاعتماد على قيم طول موجة الخشونة ومطالها فإن مساحة منطقة التماس هي مساحة منقطعة لأن قيمة البارامتر $\chi = 1.118 > 1$ (انظر الجدول (1) ميزات مناطق التماس تحت تأثير الخشونة الجيبية تبعاً لقيم البارامتر χ).

بالمقابل فإن طريقة النمذجة المتبعة تسمح لنا بتحديد القيمة الأعظمية لإجهاد فون ميسس والتي تعطى بالعلاقة

التالية :

$$\max\{\sigma_{VM}\} = 0.628 * \Delta p = 0.6524 * (2. \sqrt{\chi} - 1) * P_{max} \quad (27)$$

وبالتالي فإن القيمة الأعظمية في مثالنا هنا تبلغ

$$\max\{\sigma_{VM}\} = 0.628 * (2 * \sqrt{1.118} - 1) * P_{max} \cong 0.7 * P_{max} \quad (28)$$

بالمقارنة مع السطح الأملس (الشكل (4) عند $\mu = 0.0$) حيث تبلغ القيمة الأعظمية لإجهادات القص أو

$$\text{للإجهاد المكافئ فون ميسس } \max\{\sigma_{VM}\} = 0.5575 * P_{max}.$$

الاستنتاجات والتوصيات:

في البحث المقدم هنا، تم نمذجة توزيع الإجهادات في نقاط التماس بين سطوح الأجسام القابلة للتشوه، ضمن شروط الانفعالات المستوية وبتطبيق نظرية هرتز مع الأخذ بعين الاعتبار تأثير الاحتكاك و خشونة السطوح الجيبية بالاعتماد على تحويلات فوربييه. إن الدراسة المقدمة هنا تسمح بتحديد دقيق لموضع تركيز الإجهادات المكافئة وقيمها الأعظمية والتي تعتبر الخطوة الأولى لدراسة التعب بين السطوح المتماسمة (العناصر الميكانيكية المختلفة كالمسننات ، الرولمانات...على سبيل المثال). حيث يمكننا استنتاج ما يلي:

- يؤدي الاحتكاك إلى زيادة في قيم الإجهادات المتكونة ضمن طبقات المادة وينقل مكان تركز القيمة الأعظمية للإجهاد المكافئ لفون ميسس باتجاه السطح وبالتالي يظهر ضرر التعب الأولي المترافق مع قيم كبيرة لمعامل الاحتكاك على سطح الجسم.
- تؤدي الخشونة دور مماثل لتأثير القيم المرتفعة لمعامل الاحتكاك في التأثير على توزع الإجهاد ونقل مكان تركز القيمة الأعظمية. بالمقابل فإن القيم الأعظمية للإجهاد المكافئ تتركز على السطح على كامل عرض منطقة التماس على خلاف تأثير القيم المرتفعة للاحتكاك حيث تتركز القيمة الأعظمية للإجهاد في نقطة واحدة فقط وهي نقطة نهاية حدود منطقة التماس وباتجاه الحركة $(x=+a)$.
- هنا لا بد من التأكيد على :
- الاهتمام بدرجة إنهاء السطوح لتقليل الخشونة قدر الإمكان.
- تقليل الاحتكاك عن طريق استخدام سوائل تزييت ذات لزوجة ديناميكية جيدة بين السطوح المتماسية بهدف المحافظة على سماكة ثابتة لفلم التزييت في طور العمل وتحت تأثير زيادة الحمل المطبق.

المراجع:

- [1] YU, C. WANG, Z. LIU, G. KEER, M, L. WANG, J. *Maximum Von Mises stress and its location in trilayer materials in contact*. Journal of Tribology. Vol. 134, 2016, P.115-128.
- [2] JABBOR, T. GHAZI, A. *Tooth stress calculation of metal spur and helical gears*. Mechanics and Machine Theory, Vol. 92, 2015, P. 375 – 390.
- [3] FUJINO, T. IWAMOTO, K. AKUZAWA, N. TANAKA, K. *Stress distribution of a coated film with an interlayer under elastohydrodynamic lubrication conditions*. Journal of Engineering Tribology. Part J. Vol. 223, 2009. P. 553-562.
- [4] GOVINDARAJAN, N. GNANAMOORTHY, R. *Rolling/sliding contact fatigue life prediction of sintered and hardened steels*. Wear. Vol. 262, 2007, P. 70-78.
- [5] QIAO, H. EVANS, P, H. SNIDLE, W. R. *Comparison of fatigue model results for rough surface elastohydrodynamic lubrication*. Journal of Engineering Tribology. Part J. Vol. 222, 2008. P. 381-393.
- [6] QIAO, H. *Prediction of contact fatigue for the rough surface elastohydrodynamic line contact problem under rolling and sliding conditions*, PhD Thesis, Cardiff University, 2005. 275P.
- [7] LIU, S. WANG, Q. LIU, G. *A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analysis*. Wear, Vol. 243. 2000, P. 101-111.
- [8] PAULIN, C. VILLE, F. SAINOT, P. COULON, S. LUBRECHT, A, A. *Effect of rough surface on rolling contact fatigue – Theoretical and experimental analysis*. Tribology Series. Vol. 43. 2003, P. 611-617.
- [9] LIU. C. R., CHOI. Y. *Rolling contact fatigue life model incorporating residual stress scatter*. International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 50, 2008, P.1572- 1577.