مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (27) العدد (2) 2005
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Engineering Sciences Series Vol. (27) No (2) 2005

إضافة جديدة في استنباط التكاملات المحددة

الدكتور سهيل محمد علي*

(قبل للنشر في 2005/6/9)

□ الملخّص □

يتضمن هذا العمل طريقة جديدة لاستنباط التكاملات المحددة، والطريقة مبنية على تمثيل الإشارات (آو التوابع) في مجالين متعاكسين في البعد: الزمن والتردد، والفضل عائد إلى أن التمثيل يتم وفق تحويل فورييه المعرف بصيغ تكاملية.

أن الطريقة المقترحة بسيطة نسبيا ولكنها – في الواقع – وسيلة فعالة لإنشاء مكتبة عريضة من التكاملات المحددة مع إمكانية توسيع المكتبة أفقياً وشاقولياً دون حدود نظرية.

في التوسع الأفقي المعتبر نحاول الاستفادة من مختلف خواص ونظريات تحويل فورييه، وقد اعتبرت جملة من N تابعاً أولياً فوجدنا أنه بالإمكان استنباط أضعاف هذا العدد من التكاملات المحددة، وتتضمن الملاحق المرفقة بعض النتائج هي أمثلة وافية على مختلف الحالات المعتبرة .

* أستاذ مساعد في قسم هندسة الاتصالات – كلية الهمك – جامعة تشرين – اللاذقية –سوريا.

مجلة جامعة تشرين للدراسات والبحوث العلمية _ سلسلة العلوم الهندسية المجلد (27) العدد (2) 2005
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Engineering Sciences Series Vol. (27) No (2) 2005

A New Method to Derive Definite Integrals

Dr. Soheil M. Ali*

(Accepted 9/6/2005)

□ ABSTRACT □

We propose a new method to derive definite integrals. The method is based on representation of signals (or functions) in two reciprocal domains .This is because the signals are represented by Fourier Transform, F.T. which is defined as integral formula.

The proposed method is relatively simple but it is a powerful tool to construct a big library of definite integrals, and to expand the library horizontally and vertically without any theoretical limits. In horizontal expansion (discussed here) we try to use the different properties and theories of F.T., and if we consider a set of N primary functions, we can derive multiple N of definite integrals .The appendices include some results which can be considered as examples to different cases in text.

***Associate Professor, Department Of Communication, Faculty Of Mech. & Elect. Eng., Tishreen University, Lattakia, Syria.**

توطئة:

الرياضيات لغة العلوم، ومع أن الرياضيات ليست الغاية في الكثير من التخصصات لكنها الوسيلة المعتمدة في الدراسة، والتحليل كما في الإنشاء والتصميم، وقد يود المهندسون جدولة القواعد الرياضية وتبويبها لسهولة الرجوع إليها عند الحاجة ودون الخوض في التفاصيل. وهذا هو لسان الحال في هده الورقة التي تقترح طريقة فعالة لاستنباط التكاملات المحددة بالاعتماد على تمثيل الإشارات في مجالين متعاكسين في البعد، وتسهم الطريقة في إنشاء مكتبة عريضة من التكاملات وتوسيعها عرضياً وشاقولياً دون حدود.

مقدمات وتعاريف: [8,7,5,2]

لأننا نتناول التكامل من وجهة نظر هندسية، يجدر التوقف عند بعض الاصطلاحات والتعاريف المعتمدة في الصياغة بغية التوفيق مع الكتابات الرياضية المتخصصة، (ثمة سرد للرموز المعتمدة في الصياغة ومدلولاتها في مستهل الملحق).

- الإشارة Signal: وهي ترجمة كهربائية لمتغير فيزيائي في الزمن كالضغط أو الضوء أو حرارة الوسط، ويهمنا هنا ما يعرف بالإشارة المعينة ~ Deterministic وهي اشارة تتمثل بتابع رياضي معرف على كامل مجال الزمن، ويقال إن x(t) اشارة تمثيلية (أو تشابهيه) ~ Analog إذا تمثلت بتابع متصل مطالياً وزمنياً، والإشارة التمثيلية نوعان: [2,5]

آ- إشارة قدرة ~ Energy إذا كانت القدرة الإجمالية محدودة القيمة :

$$\text{Total energy: } E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \qquad 1-1$$

و بالمفهوم الرياضي تتمثل إشارة القدرة بتابع يقبل التكامل المطلق Absolutely integrable.

ب-إشارة استطاعة:~ power إذا كان المتوسط الزمني للاستطاعة اللحظية غير معدوم:

$$\text{Power Average: } \quad P_x = \underset{T\to\infty}{Lim} \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt > 0 \qquad 1\text{-}2$$

مثال ذلك الإشارة الدورية التي تشغل مجال الزمن كاملاً فمتوسط استطاعتها غير معدوم ولكن قدرتها الإجمالية غير محدودة.

- الجداء السلمي: يعرف الجداء السلمي بين الإشارتين x(t) و y(t) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Scalar product: } \quad \langle x(t), y(t)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt && \text{for energy~} \\ &= \underset{T\to\infty}{Lim} \frac{1}{T} \int_T x(t) y^*(t) dt && \text{for power ~} \qquad 1\text{-}3 \end{aligned}$$

حيث نفترض إشارتين عقديتين لينتظم التعريف الحالة العامة، ويعتبر الجداء السلمي قياساً للتماثل فقيمته عظمى في حال تماثل الإشارتين ومعدومة في حالة التعامد ومن السهل إثبات الخواص التالية :

$$\begin{aligned} \langle x(t), y(t)\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle^* \qquad ; \langle x(t), x(t)\rangle &= E_x && \text{If x(t) is energy ~} \\ &= P_x && \text{If x(t) is power ~} \qquad 1\text{-}4 \end{aligned}$$

و يعتمد اصطلاح الجداء السلمي في الصياغة الرياضية الرصينة فمثلاً يعرف تابع الترابط المتبادل بين x(t) و y(t) على النحو :

$$\text{Cross-correlation}\sim: \quad R_{xy}(\tau) \underline{\underline{\Delta}} \langle x(t), y(t-\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^{*}(t-\tau)\, dt \qquad 1\text{-}5$$

أي أن تابع الترابط المتبادل بين الإشارتين هو تعميم لجدائهما السلمي، وهو قياس للتماثل أكثر شمولية لأنه يلحظ أي تماثل محتمل نتيجة الإزاحة النسبية τ قد يغفله الجداء السلمي نفسه[7,8].

التكامل وطرق المكاملة [6,4,3,1] :

إن التكامل من الموضوعات الرياضية الهامة، يدخل في العديد من القضايا الهندسية، والأمثلة كثيرة يسهل ذكر بعضها (وإن صعب الحصر) تقدير طول مسار متعرج، مساحة شكل غير هندسي، حجم كتلة غير منتظمة، وفي هندسة الاتصالات تحسب القدرة الإجمالية أو متوسط الاستطاعة وفق الصيغتين التكامليتين 1-1 و 1-2 ونحتاج إلى التكامل في حساب الاحتمالات ،الخ...

ولأن التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان يتمثل الاشتقاق في الزمن بالرمز $D_t\{.\}$ كما يتمثل التكامل بالرمز $D_t^{-1}\{.\}$ ، أي :

$$D_t\{x(t)\} \equiv \frac{d}{dt}x(t) \qquad , \qquad D_t^{-1}\{x(t)\} \equiv \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \qquad 1-6$$

و للتكامل جملة من الخواص والنظريات الهامة نجدها في [3,1] ،أما طرق التكامل فهي ثلاثة أنواع :

آ–طرق مباشرة :يسهل تطبيقها لإنجاز التكاملات البسيطة مثل تكامل كثيرات الحدود وتكامل التوابع الجيبية أو الأسية أو القطعية، ويتطلب بعض التكاملات مهارات خاصة كتكامل التوابع الكسرية أو التوابع التي يمكن ردها إلى توابع كسرية حقيقية أو عقدية ويستعان في إنجاز هده التكاملات بنظرية كوشي للبواقي و قضية جوردان المساعدة Jordan’s lemma الخ...

ب–طرق غير مباشرة: حيث يقدر التكامل بالاستقراء أو القياس إلى توابع رياضية معرفة بصيغ تكاملية كتابع الخطأ وتابعي غاما وبيتا .و تتلخص الطريقة بمعالجة التكامل حتى يمكن التعبير عنه بدلالة أحد هذه التوابع[4]، وفيما يلي أمثلة :

$$\int_0^1 \sqrt{Ln(1/x)}\, dx \equiv \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad 1-7$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \equiv \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\Gamma^2\left(1/4\right)}{4\sqrt{2\pi}} \qquad 1-8$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-(\frac{b}{2a})^2} erf(\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-(\frac{b}{2a})^2} \equiv \frac{1}{2a} e^{-(b/2a)^2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-(\frac{b}{2a})^2} \qquad 1\text{-}9$$

ج- طرق حساب عددية[6]: بما أن التكامل $\int_a^b y(x)dx$ يساوي عددياً المساحة تحت التابع y(x) مضمون التكامل ضمن المجال المغلق $a \le x \le b$ ، يمكن تقدير المساحة وفق قاعدة المستطيل مثلا فيقسم المجال إلى M شريحة عرض واحدتها $\Delta x = \dfrac{b-a}{M}$ وارتفاعها يساوي قيمة التابع y(x) في منتصف الشريحة وعليه يكون :

$$\int_a^b y(x)dx \cong \sum_{k=1}^{M} y(x_k)\Delta x \qquad ; \qquad x_k = a + (k - \frac{1}{2})\Delta x \qquad 1\text{-}10$$

و يزداد التقريب دقة بزيادة M، وفي الطرق العددية يمكن الاستفادة من التسهيلات التي يوفرها الحاسب الإلكتروني.

تمثيل الإشارات والنظم [8,7,3,2]:

بغية دراسة وتحليل نظم الاتصالات وخلافه، نعمد إلى التمثيل في مجالين متعاكسين في البعد، الزمن ووحدته الثانية Second ,sec والتردد ووحدته الهرتز $\text{Hertz ,Hz} = \text{sec}^{-1}$ فتتحقق غايتان : [2,3]

-معرفة سلوكية ومواصفات النظام في مجال التردد بناءً على المعرفة الأولية في مجال الزمن.

-الاستفادة من السهولة النسبية لبعض المعالجات في أحد المجالين مقارنة بنظيراتها في المجال الآخر.

ولإتمام التمثيل نحتاج إلى صيغ تحويل تتيح الانتقال بالمسألة بين المجالين، لذا فإن أولى وأهم المشاكل التي تعترض نجاح العملية هي عدم وجود صيغة موحدة تقبلها الإشارات المختلفة، فالتابع الدوري يمكن أن يتمثل بمفكوك فورييرFourier series ولكنه لا يقبل مبدئيا تحويل فوريير .Fourier Transform ,F.T لانه لا يقبل التكامل المطلق. خلاف ذلك فان التابع اللادوري الذي يقبل التكامل المطلق (إشارة القدرة) لا يتمثل بمفكوك فوريير بل بتحويل فوريير،. ونوجزه بما يلي :[7,8]

لتكن x(t) أي اشارة قدرة يمكن تمثيلها في مجال التردد بالطيف X(f) الذي يستنبط وفق الصيغة المباشرة للتحويل :

$$Direct F.T: X(f) \equiv F\{x(t)\} = \langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad ; \qquad j \equiv \sqrt{-1} \quad 2\text{-}1a$$

نلاحظ أن موضوع التكامل تابعٌ في المتغيرين f و t ونتيجة المكاملة بالنسبة للمتغير tهي تابع في f فقط مما يعني نقل المسألة إلى مجال التردد، ويمكن العودة إلى مجال الزمن وفق صيغة التحويل العكسي :

$$Inverse F.T.: x(t) \equiv F^{-1}\{X(f)\} = \langle X(f), e^{-j2\pi ft} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df \qquad 2\text{-}1b$$

وهي صيغة تكاملية أيضاً، ويدل على التمثيلين المتناظرين بسهم ثنائي الحد : $x(t) \Leftrightarrow X(f)$
مما يعني إمكانية استنباط أحد التمثيلين من الآخر، ونلاحظ اعتماد حرف كبير رمزاً للتمثيل في مجال التردد وحرف صغير رمزاً للتمثيل في مجال الزمن ،مما يتيح اعتماد الحرف نفسه رمزاً للتمثيل في المجالين معاً .

استنباط التكاملات المحددة:

تبنى طريقة الاستنباط المقترحة على تمثيل التوابع في مجالين متعاكسين في البعد وفق صيغتي تحويل فورييه من 1a,b ويمكن إدراج الطريقة ضمن الصنف ب لطرق التكامل غير المباشرة، حيث يتم الاستنباط على أربع مراحل :

آ–اختيار جملة من التوابع الأولية ثم استنباط التمثيل المناظر لكل تابع فتتولد جملة التحويلات الأولية:

$$\{x_k(t)\} \quad \Leftrightarrow \{X_k(f)\} \qquad ,k=1,2,\dots,N \qquad 3-1$$

ب–استنباط ما أمكن من أزواج التحويلات الثانوية بالاعتماد على خواص ونظريات تحويل فورييه.

ج– استنباط التكاملات المحددة بتطبيق صيغة التحويل العكسي من2-1b والاستفادة من المعرفة الأولية للتمثيل في مجال الزمن.

د– تعميم النتائج لتسهيل الاستفادة منها في التطبيقات المختلفة.

لنعتبر مثلا النبضة المستطيلة، وهي تابع أولي يأخذ شكل مستطيل قاعدته T ومساحته تساوي الواحد الصحيح:

$$\text{Rectangular pulse:} \qquad x_1(t) \equiv rec(\frac{t}{T}) \underline{\underline{\Delta}} 1/T \qquad , \qquad |t| < \frac{T}{2}$$
$$= 0 \quad , \qquad otherwise \qquad 3-2a$$

بتطبيق صيغة التحويل المباشر نحصل على زوج التحويلات:

$$\therefore\ x_1(t) \equiv rec(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow \frac{\sin \pi fT}{\pi fT} \equiv \operatorname{sinc} \pi fT \equiv X_1(f) \qquad \text{3-2b}$$

و بتطبيق صيغة التحويل العكسية ثم استبدال المتغيرات وفق العلاقة A_{pp} من الملحق ينتج التكامل المحدد:

$$\therefore \int_0^\infty \sin cv \quad \cos 2\beta v dv = \frac{\pi}{2} \qquad ; |\beta| < \frac{1}{2}$$
$$= 0 \qquad ; otherwise \qquad 3-3b$$

$$\text{Special case, s.c:if } \beta = 0 \quad \text{then} \int_0^\infty \sin cv dv = \frac{\pi}{2} \qquad \text{3-3c}$$

<u>جملة التوابع (أو الإشارات) الأولية:</u>

إن اختيار الإشارات الأولية هو الخطوة الأولى والأهم لنجاح الطريقة نظراً لتأثيره المباشر على أنواع التكاملات المستنبطة، كما إن صياغة قواعد الاختيار مسألة هامة نتجاوزها مرحلياً ونعتمد جملة من N=11 إشارة تتداول معظمها أدبيات هندسة الاتصالات .

إن استنباط الطيوف $\{X_k(f)\}$ يقتضي تطبيق صيغة التحويل المباشر من 2-1a وهي صيغة تكاملية ليست سهلة دوماً ويمكن قصر الطريق إلى استنباط الطيف إذا أمكن التعبير عن الإشارة بدلالة إشارة أخرى معلومة الطيف، ونستفيد من خواص التحويل. لنعتبر مثلاً تابع الانحدار وهو تابع أولي يأخذ شكل مثلث قائم: قاعدته T ومساحته تساوي الواحد الصحيح:

$$Ramp \sim: x_2(t) \equiv ramp(\frac{t}{T}) \underline{\underline{\Delta}} \frac{2t}{T^2} \qquad ,0 < t < T$$
$$= 0 \qquad otherwise \qquad 3-4a$$

باشتقاق طرفي العلاقة السابقة والاستفادة من زوج التحويلات 3-2b يمكن أن نجد :

$$D_t\{x_2(t)\} \equiv \frac{2}{T}\left[rec(\frac{t-T/2}{T}) - \delta(t-T)\right] \Leftrightarrow \frac{2}{T}\left[\sin c\pi fT \quad e^{-j\pi fT} - e^{-j2\pi Tf}\right] = j2\pi f X_2(f)$$

حيث نستفيد من بعض خواص التحويل ؛ الخطية والاشتقاق والإزاحة في الزمن، ومن ثم :

$$x_2(t) \equiv ramp(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow \frac{e^{-j\pi fT}}{j\pi fT}(\sin c\pi fT - e^{-j\pi fT}) \equiv X_2(f) \qquad 3-4b$$

إن نبضة دلتا –ديراك $\delta(t)$ التي ظهرت في المشتق ليست تابعاً بالمعنى الدقيق للعبارة ولكنها تنتمي إلى فئة من التوابع المعممة وتعرف وفق قاعدة الاختيار التالية:

$$Assignment \quad rule: \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad 3-5a$$

حيث x(t) أي تابع متصل إلى جوار الفاصلة الزمنية $t = t_0$، أي أن $\delta(t)$ تختار قيمة التابع عند الفاصلة الزمنية التي تناظر انعدام مضمون النبضة $t - t_0 = 0$ وبالاستفادة من القاعدة المذكورة يمكن أن نجد :

$$Dirac-delta \sim: \quad x_3(t) \equiv \delta(t) \Leftrightarrow 1 \equiv X_3(f) \qquad 3-5b$$

بإتباع الأسلوب نفسه يمكن استنباط طيف النبضة المثلثية وتعريفها:

$$Trianguler \quad \sim: x_4(t) \equiv \Lambda(\frac{t}{T}) \underline{\underline{\Delta}} \frac{1}{T}(1-\frac{|t|}{T}) \qquad |t| < T$$
$$= 0 \qquad otherwise \qquad 3-6a$$

فبالإمكان التعبير عن النبضة أو مشتقيها الأولين بدلالة تابع الانحدار أو النبضة المستطيلة أو نبضات دلتا، فنكتب مثلا :

$$D_t^2\{x_4(t)\} = \frac{1}{T^2}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right] \qquad 3-6b$$

وبالاعتماد على خطية التحويل وخاصية الاشتقاق وعلى زوج التحويلات 3-5b نجد:

$$D_t^2\{x_4(t)\} = \frac{1}{T^2}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right] \Leftrightarrow (\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fTT}}{T})^2 \equiv (j2\pi f)^2 X_4(f)$$
$$\therefore x_4(t) \equiv \Lambda(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow (\frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi fT})^2 \equiv \text{sinc}^2 \pi fT \equiv X_4(f) \qquad 3-7$$

لنعرف الآن تابعين آخرين هما تابع الخطوة الواحدة وتابع العلامة الجبرية:

$$Unit \quad step \sim : x_7(t) \equiv u(t) \underline{\underline{\Delta}} 1 \qquad , t > 0$$
$$= 0 \qquad ; t < 0 \qquad 3-8a$$
$$Signum \quad \sim : x_8(t) \equiv \operatorname{sgn}(t) \underline{\underline{\Delta}} +1 \qquad ; t > .0$$
$$= -1 \qquad ; t < 0 \qquad 3-8b$$

من الواضح أن التابعين لا يقبلان مبدئيا تحويل فورييه لأنهما لا يقبلان التكامل المطلق، ولكن يمكن إيجاد الطيف بأخذ النهايات شأن التكاملات المعتلة، وللبدء نعرف التابع الآسي السببي (أحادي الجانب):

$$One-sided \quad \exp onential \sim : x_5(t) \underline{\underline{\Delta}} e^{-t/T} \qquad t > 0$$
$$= 0 \qquad t < 0 \Leftrightarrow \frac{T}{1 + j2\pi fT} \equiv X_5(f) \qquad 3-9a$$

حيث Tثابت زمني موجب، وقد استنبط الطيف كالمعتاد لأن التابع يقبل التكامل المطلق، ونلاحظ أن:

$$x_7(t) = \underset{T\to\infty}{Lim}\, x_5(t) \qquad so: X_7(f) = \underset{T\to\infty}{Lim}\, X_5(f) = \frac{1}{j2\pi f} \qquad 3-9b$$

ومن جهة أخرى توجد علاقة تربط التابعين $x_7(t)$ و $x_8(t)$يمكن استغلالها في استنباط الطيف $X_8(f)$:

$$x_8(t) \equiv \operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} - (\frac{1}{-j2\pi f}) = \frac{1}{j\pi f} \equiv X_8(f) \qquad 3-9c$$

و بما أن :sgn(t)=2u(t)-1 نكتب أيضا:

$$x_7(t) \equiv u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \qquad 3-10a$$

وهي النتيجة الصحيحة، ويعزى الاختلاف مع9b إلى أن العلاقتين $8_{a,b}$ لا تحددان القيم عند المبدأ، وللتوفيق بين النتيجتين نعتبر:

$$\operatorname{sgn}(0) = 0 \qquad so: \quad u(0) = \frac{1}{2} \qquad 3-10b$$

كما يمكن الوصول إلى النتيجة الصحيحة من 3- 10 a بالاعتماد على خاصية التكامل وعلى زوج التحويلات من 3- 5b.

بقي أن نعرف الإشارتين الأخيرتين ؛ الاشارة الغاوسية ونبضة التجيب :

$$\text{Gaussian}\sim \ x_A(t) \underline{\underline{\Delta}} e^{-\pi(t/T)^2} \Leftrightarrow \qquad Te^{-\pi(fT)^2} \qquad \equiv X_A(f) \qquad 3-11b$$

$$\text{cosine pulse}: x_B(t)\triangleq\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2T}\, rec(\frac{t}{2T}) \Leftrightarrow \frac{\cos 2\pi fT}{1-(4fT)^2} \equiv X_B(f) \qquad 3-12$$

وقد استنبط طيف الاشارة الغاوسية بالاعتماد على التكامل من 9-1 ونلاحظ أن نبضة التجيب قد عرفت بحيث تشغل النبضة نصف دور تابع التجيب وان تكون المساحة مساوية الواحد الصحيح ، و قد أدرجت التكاملات الأولية المناظرة في الملحق A.

التوسع في مكتبة التكاملات:

إن عدد التكاملات الأولية يساوي تماماً عدد توابع الجملة المعتبرة، ولكن لا يعني ذلك أن زيادة عدد التكاملات المستنبطة مرهون بزيادة عدد التوابع الأولية لان بالإمكان التوسع قي مكتبة التكاملات باتجاهين اثنين:

–توسع أفقي حيث نحاول الاستفادة من مختلف خواص ونظريات تحويل فوريير فتتولد أزواج من التحويلات الثانوية يبلغ عددها أضعاف عدد التحويلات الأولية N .

– توسع شاقولي حيث تعتمد خوارزميات مناسبة يمكن تطبيقها مرارا وتكرارا على أي زوج متوفر من التحويلات فتتولد أجيال متعاقبة من التحويلات الثانوية الجديدة.

وسنكتفي بالشق الأول – نظرا لضيق المساحة– وسيكون التوسع الشاقولي موضوعا لعمل لاحق.

<u>الاستفادة من خواص التحويل:</u>

إن خواص تحويل فوريير محدودة الفائدة إذا ما اعتبرت فرادى كالإزاحة في الزمن (أو التردد) وتغيير المقياس ونستفيد من خاصية التكامل مرة واحدة :

$$\text{Integration} \sim: y(t)\equiv D_t^{-1}\left(x(t)\right)\equiv\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(0)}{2}\delta(f)+\frac{X(f)}{j2\pi f}\equiv Y(f) \qquad 4-1a$$

فالنتيجة لا تقبل التكامل المطلق لان $X(0)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt\neq 0$ عموما ومن ثم:

$$Y(0)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}y(t)\,dt\equiv\lim_{f\to 0}\left(\frac{X(0)}{2}\delta(f)+\frac{X(f)}{j2\pi f}\right)=\infty \qquad 4-1b$$

وبالمقابل يمكن اشتقاق التابع في الزمن وتكرار الاشتقاق قدر ما تسمح به الاتصالية تحديدا حتى تظهر نبضات دلتا ونكتب :

$$\text{Differentiation} \sim: D_t^n\left\{x(t)\right\}\equiv\frac{d^n}{dt^n}x(t)\Leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \qquad 4-2$$

وعليه فان $x_3(t)$ لا تقبل الاشتقاق مطلقا ويمكن اشتقاق أي من $x_8(t), x_7(t), x_5(t), x_4(t), x_2(t), x_1(t)$ مرة واحدة واشتقاق كل من $x_B(t), x_6(t), x_4(t)$ مرتين ويمكن تكرار اشتقاق $x_A(t)$ دون حدود. وتتفرد خطية التحويل بأهميتها لسببين :

أ–إمكانية إنشاء تراكيب مختلفة من أي جملة معتبرة من التوابع الأولية (أو المولدة) ونكتب:

$$\sum_k \alpha_k x_k(t) \Leftrightarrow \sum_k \alpha_k X_k(f) \qquad ,\alpha_k are \quad scalar \quad \text{constants} \qquad 4-3$$

ب– إمكانية اعتبار خاصيتين أو اكثر في آن واحد، فمثلا :

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 D_t\{x_2(t)\} + \alpha_3 x_3(t-t_d) + \ldots \Leftrightarrow \alpha_1 X_1(f) + j2\pi f \alpha_2 X_2(f) + \alpha_3 X_3(f) e^{-j2\pi f t_d} + \ldots \quad 4-4$$

لتكن x(t) أي اشارة قدرة حقيقية لا متماثلة، وليكن: $x(t) \Leftrightarrow X(f)$ يمكن مثلا إنشاء التراكيب الخطية الآتية:

– تركيب خطي زوجي التماثل من النمط:

$$y_e(t) = x(t) + x(-t) \Leftrightarrow X(f) + X(-f) = Y_e(f) \qquad 4-5$$

ونرى أن الطيف تركيب خطي مماثل، و بما أن x(t) حقيقية يكون كل من $y_e(t)$ و $Y_e(f)$ حقيقيا زوجي التماثل لأن:

$$X(-f) \equiv X^{\bullet}(f) \qquad ,Y_e(f) = X(f) + X^{\bullet}(f) = 2\operatorname{Re}\{X(f)\} \qquad 4-6$$

وتعتبر الإشارة الآسية اللاسببية كمثال بسيط فهي تركيب زوجي من الاشارة الآسية السببية ؛

$$x_6(t) \equiv e^{-|t/T|} \equiv e^{-t/T} u(t) + e^{t/T} u(-t) \Leftrightarrow \frac{T}{1+j2\pi f T} + \frac{T}{1-j2\pi f T} \equiv \frac{2T}{1+(2\pi f T)^2} \equiv X_6(f) \qquad 4-7$$

– تركيب خطي فردي التماثل من النمط:

$$y_0(t) = x(t) - x(-t) \Leftrightarrow X(f) - X(-f) \equiv j2\operatorname{Im}\{X(f)\} = Y_0(f) \qquad 4-8$$

تلاحظ أن $Y_0(f)$ تخيلي صرف وفردي التماثل، و يعتبر تابع العلامة الجبرية مثالا بسيطا فهو تركيب فردي من التابع u(t) ؛

$$x_8(t) \equiv \operatorname{sgn} t = u(t) - u(-t) \Leftrightarrow \left[\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}\right] - \left[\frac{\delta(f)}{2} - \frac{1}{j2\pi f}\right] = \frac{1}{j\pi f} \equiv X_8(f) \qquad 4-9$$

– تركيبان خطيان من النمط:

$$y_\pm(t) = x(t) \pm \frac{1}{2}[x(t+t_d) + x(t-t_d)] \Leftrightarrow X(f)\left[1 \pm \frac{1}{2}(e^{j2\pi f t_d} + e^{-j2\pi f t_d})\right] \equiv X(f)[1 \pm \cos 2\pi f t_d]$$

$$\therefore y_\pm(t) = x(t) \pm \frac{1}{2}[x(t+t_d) + x(t-t_d)] \Leftrightarrow 2X(f) \begin{matrix}\cos^2 \\ \sin^2\end{matrix} (\pi f t_d) \equiv Y_\pm(f) \qquad 4-10$$

- و الطيفان $Y_\pm(f)$ عقديان في الحالة العامة ويتمتعان بالتماثل الهرميتي مثل X(f) .

أما إذا كانت الإشارة الحقيقية x(t) متماثلة (زوجيا أو فرديا) انعدم أحد التركيبين الخطيين من 4-5 أو 4-8، مما يقتضي البدء بإزاحة الاشارة حتى تفقد سمة التماثل، ثم نعتبر النسخة المزاحة :

$$x_s(t) \equiv x(t+t_s) \Leftrightarrow X(f)e^{j2\pi f t_s} \equiv X_s(f) \qquad 4-11$$

في تكوين التراكيب الخطية الأربعة من 4−5 و4−8 و4−10 ؛ فمثلا:

$$y_e(t) = x_s(t) + x_s(-t) \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\{X_s(f)\} \equiv 2\,\mathrm{Re}\{X(f)e^{j2\pi f t_s}\} \equiv Y_e(f) \qquad 4-12 \quad etc...$$

وفي الملحق B أمثلة على التراكيب الخطية الأربعة.

<u>الاستفادة من نظريات التحويل:</u>

من بين النظريات التي يمكن توظيفها في توسيع مكتبة التكاملات تنفرد بأهميتها نظرية التكامل وفحواها إن الجداء السلمي لأي تابعين في مجال الزمن يساوي الجداء السلمي للتابعين المناظرين في مجال التردد، ونكتب:

$$Integral \quad theorem \quad : \langle x_m(t), x_k(t) \rangle = \langle X_m(f), X_k(f) \rangle \qquad 4-14$$

وبما أن تابع الترابط المتبادل_لاشارتين هو تعميم لجدائهما السلمي نعيد تعريفه وفق النظرية كما يلي:

$$Cross-correlation \sim : R_{mk}(\tau) \underline{\underline{\Delta}} \langle x_m(t), x_k(t-\tau) \rangle = \left\langle X_m(f), X_k(f)e^{-j2\pi f\tau} \right\rangle \qquad 4-15a$$

$$or \qquad : R_{mk}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_m(t)x_k^{\bullet}(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X_m(f)X_k^{\bullet}(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad 4-15b$$

وبالتمعن في الطرف الأيمن نرى انه صيغة التحويل العكسي للجداء $X_{mk}(f) \equiv X_m(f)X_k^{\bullet}(f)$ ، أي:

$$R_{mk}(\tau) \equiv \langle x_m(t), x_k(t-\tau) \rangle \Leftrightarrow X_m(f)X_k^{\bullet}(f) \equiv X_{mk}(f) \qquad 4-15c$$

و عليه يمكن توظيف نظرية التكامل في استنباط العديد من أزواج التحويلات الثانوية، وباعتبار الجملة الأولية 3-1 المكونة من N اشارة قدرة يمكن استنباط N^2 زوجا من التحويلات الثانوية وفق مفهوم توابع الترابط، وبالعود إلى 4-15 نجد :

$$R_{km}(\tau) \equiv \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_m(t)x_k^{\bullet}(t+\tau)dt \right]^{*} = R_{mk}^{\bullet}(-\tau) \Leftrightarrow X_m^{\bullet}(f)X_k(f) \equiv X_{mk}^{\bullet}(f) \qquad 4-16$$

أي أن بالإمكان استنباط $R_{km}(\tau)$ من $R_{mk}(\tau)$ ويكفي استنباط N(N+1)/2 من أزواج التحويلات الثانوية. للصيغة التكاملية من 4-15c حالتان خاصتان :

- من أجل m=k تنتج نظرية وينر–كينتشين لحساب توابع الترابط الذاتي ~ Auto-correlation:

$$\text{W.Kintchen} \sim : R_m(\tau) \equiv R_{mm}(\tau) \equiv \langle x_m(t), x_m(t-\tau) \rangle \Leftrightarrow |X_m(f))|^{*} \equiv G_m(f) \qquad 4-17$$

أي أن تابع الترابط الذاتي $R_m(\tau)$ وتابع الكثافة الطيفية $G_m(f)$ يشكلان زوجا من تحويلات فوريير.

- من اجل $\tau = 0, m = k$ تنتج نظرية رايلية للقدرة:

$$Rayleigh \sim \quad : \quad R_m(0) \quad \equiv \langle x_m(t), x_m(t) \rangle \equiv \langle X_m(f), X_m(f) \rangle = E_m \equiv \text{Total Energy} \qquad 4-18$$

تحسب توابع الترابط في الزمن τ ثم تطبق صيغة التحويل العكسي لاستنباط تكامل نظير كل زوج من 4-15c ,4-17 . إن تابع الترابط المتبادل لآي إشارتين عقديتين هو تابع عقدي حكما وطيفه تابع عقدي أيضا ، ويكون تابع الترابط الذاتي لآي اشارة عقدية تابعا عقديا في الحالة العامة وهرميتي التماثل لان طيفه $G_m(f)$ تابع حقيقي. ولان الجملة الأولية المعتبرة مكونة من إشارات حقيقية فقط تكون توابع الترابط حقيقية وتكون الطيوف المناظرة عقدية هرميتية التماثل في الحالة العامة. ويمكن تمييز ثلاث حالات :

آ–تابع الترابط المتبادل لاشارتين حقيقيتين إحداهما لا متماثلة والأخرى متماثلة أو عديمة التماثل هو تابع عقدي لامتماثل وطيفه عقدي هرمينتي التماثل،مثال ذلك:

$$R_{mk}(\tau) \equiv \langle x_m(t), x_k(t-\tau) \rangle \Leftrightarrow X_m(f) X_k^{\bullet}(f) \qquad m = 2,5,8$$
$$k = 1,2,3 \quad ..., B, \qquad m \neq k \qquad 4-19$$

حيث اعتمد نظام العد الست–عشري ~Hexadecimal لتبسيط رموز تذييل توابع الترابط.

ب – تابع الترابط المتبادل لاشارتين حقيقيتين تتمتعان بالتماثل نفسه هو تابع حقيقي زوجي التماثل، ويكون الطيف حقيقيا زوجي التماثل أيضا، وتندرج ضمن هده الحالة توابع الترابط الذاتي لجميع إشارات الجملة الأولية ونكتب:

$$R_{mk}(\tau) \equiv \langle x_{m(}(\tau), x_k(t-\tau) \rangle \Leftrightarrow X_m(f) X_k^{\bullet}(f) \qquad ; m,k = 1,3,4,6,A,B \qquad for \quad even \sim$$
$$or \quad m,k = 8,9 \quad for\, odd \sim \qquad 4-20$$

ج–تابع الترابط المتبادل لاشارتين مختلفتي التماثل هو تابع حقيقي فردي التماثل وطيفه تخيلي صرف، مثال ذلك:

$$R_{mk}(\tau) = \langle x_m(t), x_k(t-\tau) \rangle \Leftrightarrow X_m(f) X_k^{\bullet}(f) \qquad , m \text{ or } \text{k} = \quad 8,9 \qquad 4-21$$

وتحقق توابع الترابط شرط الاتصالية لان تابع الترابط وفق تعريفه هو نتاج عملية تكامل، و لنضرب بعض الأمثلة:

1- تابع الترابط المتبادل بين اشارة لا متماثلة وأخرى متماثلة أو عديمة التماثل كالإشارتين $x_5(t), \quad x_2(t)$ يمكن أن نجد:

$$R_{25}(\tau) \equiv 2e^{\frac{\tau}{T}}(1-\frac{2}{e}) \qquad ; \tau < 0$$
$$= 2\left[1+\frac{\tau}{T}-2e^{(\frac{\tau}{T}--1)}\right], \quad 0 \le \tau < T \Leftrightarrow \frac{e^{-j\pi fT}(\sin c\pi fT - e^{-j\pi fT})}{J\pi f(1-j2\pi fT)}$$
$$= 0 \qquad , T \le \tau < \infty \qquad 4-22$$

لنلاحظ آن $R_{25}(0) = 2(1-{}^{2}\!/_{e})$ وبحسب الصيغتين الأخيرتين فان $R_{25}(T) = 0$.

$$R_{21}(\tau) \equiv \frac{1}{T}(\frac{\tau}{T}+\frac{1}{2})^2 \quad , \quad \left|\frac{\tau}{T}\right| < \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{T}\left[\frac{3}{4}-\frac{\tau}{T}-(\frac{\tau}{T})^2\right] \quad ,-\frac{3}{2} < \frac{\tau}{T} < -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{e^{-j\pi fT}\sin c\pi fT}{J\pi fT}(\mathrm{sinc}\pi fT - e^{-j\pi fT})$$
$$= \quad 0 \quad , otherwise \qquad 4-23$$

2- تابع الترابط المتبادل بين إشارتين من نمط التماثل نفسه ؛ يمكن أن نجد مثلا:

$$R_{14}(\tau) \equiv \frac{1}{T}\left[\frac{3}{4}-(\frac{\tau}{T})^2\right] \quad ; \quad \left|\frac{\tau}{T}\right| < \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{T}\left[\frac{9}{8}-\frac{3}{2}\left|\frac{\tau}{T}\right|+\frac{1}{2}(\frac{\tau}{T})^2\right] \quad ;\frac{1}{2} < \left|\frac{\tau}{T}\right| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \mathrm{sinc}^3\pi fT$$
$$= \quad 0 \quad , otherwise \qquad 4-24$$

و شرط الاتصالية محقق، وتندرج ضمن هده الحالة – كما ذكرنا – توابع الترابط الذاتي:

$$R_1(\tau) = \langle x_1(t), x_1(t-\tau)\rangle = \begin{cases} \frac{1}{T}(1-\left|\frac{\tau}{T}\right|) & , \left|\frac{\tau}{T}\right| < 1 \\ 0 & , otherwise \end{cases} \equiv \Lambda(\frac{\tau}{T}) \Leftrightarrow \sin c^2\pi fT \qquad 4\text{-}25$$

$$R_5(\tau) = \langle x_5(t), x_5(t-\tau)\rangle = \frac{T}{2}e^{-\left|\frac{\tau}{T}\right|} \equiv \frac{T}{2}x_6(\tau) \Leftrightarrow \frac{T^2}{1+(2\pi fT)^2} \qquad 4-26$$

$$R_6(\tau) = \langle x_6(t), x_6(t-\tau)\rangle = T(1+\left|\frac{\tau}{T}\right|)e^{-\left|\frac{\tau}{T}\right|} \Leftrightarrow \left[\frac{2T}{1+(2\pi fT)^2}\right]^2 \qquad 4-27 \qquad etc....$$

3- تابع الترابط المتبادل لإشارتين مختلفتي التماثل مثل:

$$R_{91}(\tau) = \langle x_9(t), x_1(t-\tau)\rangle = \frac{2}{\sqrt{e}}\sinh\frac{\tau}{T} \qquad ,\left|\frac{\tau}{T}\right| < \frac{1}{2}$$
$$= 2e^{-\left|\frac{\tau}{T}\right|}\sinh\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,\tau \quad ,\left|\frac{\tau}{T}\right| \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{-j4\pi fT^2\sin c\pi fT}{1+(2\pi fT)^2} \qquad 4-28$$

$$R_{18}(\tau) = \langle x_1(t), x_8(t-\tau)\rangle = \begin{cases} -2\,\tau/T & ;\left|\frac{\tau}{t}\right| < \frac{1}{2} \\ \mathrm{sgn}\,\tau & ,\left|\frac{\tau}{T}\right| \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{J}{\pi f}\sin c\pi fT \qquad 4-29$$

ولأن تابع الترابط هو نتاج تكامل في الزمن، قد يصعب استنباط بعض التوابع مثل:

$$R_{AB}(\tau)=\langle x_A(t),x_B(t-\tau)\rangle\equiv\left\langle e^{-\pi(\frac{t}{T})^2},\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2T}(t-\tau)rec(\frac{t-\tau}{2T})\right\rangle \quad ,$$

$$R_{AB}(\tau)=\frac{\pi}{4T}\int_{\tau-T}^{\tau+T}e^{-\pi(\frac{t}{T})^2}\cos\frac{\pi}{2T}(t-\tau)dt \qquad 4-30$$

وللبدء ننشر التابع الأسى وفق مفكوك ماكلورين، ونبادل ترتيب التكامل والجمع فكلاهما عملية خطية ثم نضع m=2k:

$$e^{-\pi(\frac{t}{T})^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\pi)^k}{k!}(\frac{t}{T})^{2k}\Rightarrow R_{AB}(\tau)=\frac{\pi}{4T}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\pi)^k}{k!}\int_{\tau-T}^{\tau+T}(\frac{t}{T})^{2k}\cos\frac{\pi}{2}(\frac{t-\tau}{T})dt \qquad 4-31$$

$$or:R_{AB}(\tau)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\pi)^{m/2}}{(m/2)!}I_m,\text{where: } I_m=\frac{\pi}{2T}\int_{\tau-T}^{\tau+T}(\frac{t}{T})^m\cos\frac{\pi}{2}(\frac{t-\tau}{T})dt \qquad 4-32$$

نبدأ باستبدال المتغيرات ثم نكامل بالتجزئة مرتين على التعاقب فنجد:

$$I_m=(\frac{\tau}{T}+1)^m+(\frac{\tau}{T}-1)^m-(\frac{2}{\pi})^2m(m-1)I_{m-2} \quad ; \quad m \quad even \qquad 4-33$$

وهي علاقة تعبر عن التكامل I_m بدلالة التكامل الأدنى منه بمرتبتين، وتصلح العلاقة كصيغة تكرارية لحساب التكامل من أي مرتبة، ولنبدأ بالمرتبة المعدومة ثم نكرر تطبيق4-33:

$$I_0=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\cos\frac{\pi}{2}udu=2\equiv(\frac{\tau}{T}+1)^0+(\frac{\tau}{T}-1)^0 \qquad 4-34a$$

$$I_2=(\frac{\tau}{T}+1)^2+(\frac{\tau}{T}-1)^2+(j\frac{2}{\pi})^2\times2\times1\times\left[(\frac{\tau}{T}+1)^0+(\frac{\tau}{T}-1)^0\right] \qquad 4-34b$$

$$I_4=(\frac{\tau}{T}+1)^4+(\frac{\tau}{T}-1)^4+(j\frac{2}{\pi})^2\times4\times3\times\left[(\frac{\tau}{T}+1)^2+(\frac{\tau}{T}-1)^2\right]+$$

$$(j\frac{2}{\pi})^4\times4\times3\times2\times1\times\left[(\frac{\tau}{T}+1)^0+(\frac{\tau}{T}-1)^0\right] \qquad 4-34c\,etc....$$

وبالتمعن في العلاقات السابقة يمكن استنباط صيغة عامة لحساب التكامل من المرتبة m:

$$I_m=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!}(\frac{j2}{\pi})^k\left[(\frac{\tau}{T}+1)^{m-k}+(\frac{\tau}{T}-1)^{m-k}\right] \qquad j=\sqrt{-1} \quad ;m,k \quad are\,even \qquad 4-35$$

ويمكن وضع صيغة الحساب في صورة أكثر تفصيلا بالاعتماد على مفكوك ثنائي الحد:

$$(a \pm b)^l = \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} a^{l-n} (\pm b)^n \quad ; \binom{l}{n} \equiv \frac{l!}{n!(l-n)!} \qquad 4-36a$$

$$\therefore (\frac{\tau}{T} \pm 1)^{m-k} = \sum_{n=0}^{m-k} \binom{m-k}{n} (\frac{\tau}{T})^{m-k-n} (\pm 1)^n \qquad 4-36b$$

$$\text{And}: (\frac{\tau}{T}+1)^{m-k} + (\frac{\tau}{T}-1)^{m-k} = \sum_{n=0}^{m-k} \binom{m-k}{n} (\frac{\tau}{T})^{m-k-n} \quad , \quad n \quad even \qquad 4-36c$$

ذلك لأن الحدود الفردية يعادل بعضها بعضا، ويكون:

$$I_m = m!(\frac{\tau}{T})^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(j2/\pi)^k}{(m-k)!} (\frac{T}{\tau})^k \sum_{n=0}^{m-k} \binom{m-k}{n} (\frac{T}{\tau})^n \qquad k,n \quad are \quad even \qquad 4-37$$

نعوض من الصيغتين المتكافئتين 35 و 37 في 4-32a ونعتمد 4-15c للوصول إلى زوج التحويلات:

$$R_{AB}(\tau) = \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{-\pi})^m m!}{(m/2)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j2/\pi)^k}{(m-k)!} \left[(\frac{\tau}{T}+1)^{m-k} + (\frac{\tau}{T}-1)^{m-k} \right] \\ \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m/2)!} (\frac{\sqrt{-\pi\tau}}{T})^m \sum_{k=0}^{m} \frac{(j2T/\pi\tau)^k}{(m-k)!} \sum_{n=0}^{m-k} \binom{m-k}{n} (\frac{T}{\tau})^n \end{array} \Leftrightarrow \frac{Te^{-\pi(fT)^2} \cos 2\pi fT}{1-(4fT)^2} \qquad 4-38$$

بتطبيق صيغة التحويل العكسي على أزواج التحويلات الثانوية السابقة تكون النتائج أحد نوعين:

I– تكامل محدد مفرد إذا كان $X_{mk}(f) \equiv X_m(f) X_k^{\bullet}(f)$ تابعا حقيقيا أو تخيليا صرفا –كما في الحالتين ب وج.

II– تركيب خطي من تكاملين أو اكثر إذا كان $X_{mk}(f) \equiv X_m(f) X_k^{\bullet}(f) = A_{mk}(f) + jB_{mk}(f)$ تابعا عقديا هرميتي التماثل كالحالة الأولى آ ؛ حيث:

$$A_{mk}(f) \equiv \operatorname{Re}\{X_{mk}(f)\} = \frac{1}{2}[X_{mk}(f) + X_{mk}(-f)] = \frac{1}{2}\left[X_{mk}(f) + X_{mk}^{\bullet}(f)\right] \quad even \sim$$

$$B_{mk}(f) \equiv \operatorname{Im}\{X_{mk}(f)\} = \frac{j}{2}[X_{mk}(-f) - X_{mk}(f(] = \frac{1}{j2}\left[X_{mk}(f) - X_{mk}^{\bullet}(f)\ \right] \quad odd \sim \quad 4-39$$

$$so: \int_0^{\infty} A_{mk}(f) \cos 2\pi f\tau df - \int_0^{\infty} B_{mk}(f) \sin 2\pi f\tau df = \frac{1}{2} R_{mk}(\tau) \qquad 4-40$$

ويتضمن الملحق C أمثلة على هده التكاملات.

مزايا الطريقة والتحقق من صحة النتائج:

للطريقة المقترحة عدة مزايا نذكر منها:

–البساطة النسبية مقارنة بالطرق الاعتيادية المباشرة.

– عمومية النتائج نظرا لوجود عامل متغير يمكن إعطاؤه ما نشاء من قيم فتتعدد الحالات الخاصة.

–المرونة التي تتيح إنشاء مكتبة عريضة من التكاملات والتوسع فيها أفقيا وشاقوليا دون أي حدود نظرية.

وفي التوسع العرضي حاولنا الاستفادة من مختلف خواص ونظريات تحويل فورييز لاسيما الخطية والاشتقاق ونظرية التكامل. وباعتبار جملة أولية من N اشارة يتولد ما يلي:

N زوجا من التحويلات الأولية.

(N-1) زوجا من التحويلات الثانوية لان جميع الإشارات باستثناء واحدة تقبل الاشتقاق مرة واحدة على الأقل.

(N-2) زوجا من التحويلات الثانوية لان جميع الإشارات باستثناء اثنتين قابلة للتكامل المطلق.

4N زوجا من التحويلات باعتماد التراكيب الخطية الأربعة موضوع الفقرة 4-1.

N(N+1)/2 زوجا بالاعتماد على توابع الترابط الذاتي والمتبادل.

ويتولد عن كل زوج من التحويلات تكامل محدد، فيكون العدد الإجمالي للتكاملات:

L= 7N+N(N+1)/2-3 Integrals 5- 1

if N=11 THEN L=140 integrals > 10 N

أي أن عدد التكاملات التي يمكن استنباطها يتجاوز عشرة أضعاف عدد الإشارات الأولية، وإذا زيد N ازداد L بنسبة اكبر بسبب لا خطية العلاقة 5−1، ولو اعتبر :

N=44 THEN L=1298 INTEGRALS > 29 N

ومن جهة أخرn، يمكن التحقق من صحة النتائج المستخلصة بأساليب متنوعة منها :

− الاستنباط المباشر بالطرق الاعتيادية.

− تقاطع النتائج ونعني الوصول إلى النتيجة نفسها عبر اكثر من مسار، ونتبين في الملحق A أن النتيجة $\int_0^\infty \sin c\, v dv = \frac{\pi}{2}$ يمكن الوصول إليها من أزواج التحويلات الأولية 1 و2 و7 و8.

− باعتماد الطرق العددية والاستفادة من تسهيلات الحاسب الإلكتروني.

− التحقق من وحدة الأبعاد ومن الوفاء بشرط الاتصالية حيث يتطلب الأمر.

لنعتبر مثلا الحالة الخاصة C_{8b} وهي تركيب خطي من تكاملين اثنين :

$$2\int_0^\infty \sin c^2 v \cos v dv - \int_0^\infty \sin c^3 v dv = \frac{\pi}{8} \qquad 5-2a$$

نتحقق من مساواة الطرفين بالاعتماد على نتيجتين أخريين A_{4c} و C_{1b} حيث نجد:

$$\int_0^\infty \sin c^2 v \cos v dv = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4} \quad ; \quad \int_0^\infty \sin c^3 v dv = \frac{3\pi}{8} \qquad 5-2b$$

− Appendices ملاحق−

اعتمدت الفاصلة المائلة(~) لتحل مكان كلمة سابقة أو معلومة، وفيما يلي سرد لأهم الرموز المعتمدة في الصياغة ومدلولاتها:

$= equal, \underline{\Delta}$ equal by definition, $\cong$ Approximately equal , $>$ more than, $<$ less than
$\geq$ equal or more than , $\leq$ equal or less than , $\equiv$ equivalent to or it means , $|.|$ absolute value , $j \equiv \sqrt{-1}$,
$\Gamma(.) \equiv$ *Gamma* function, $\beta(.) \equiv$ Beta function, erf(.) $\equiv$ error function

وعند تعميم النتائج تستبدل المتغيرات بوضع:

$$\frac{t}{T} = \beta, \pi fT = v \quad , \frac{t_d}{T} = \alpha \quad , \frac{t_s}{T} = \gamma \qquad A_{pp}$$

وقد صنفت النتائج المستخلصة كما يلي:

A- التكاملات الأولية:

$$1, x_1(t) \equiv rec(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow \sin c\, \pi fTt \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \sin cv \cos 2\beta v dv = \frac{\pi}{2} rec(\beta) \quad A_{1a}$$

$$Special\ cases; s.c.1: \quad if\ \beta = 0 \quad then \quad \int_0^\infty \sin cv dv = \frac{\pi}{2} \qquad A_{1b}$$

$$s.c.2: \quad if \beta = 1 \quad then \quad \int_0^\infty \sin cv \quad \cos 2v dv = 0 \qquad A_{1b}$$

$$2, x_2(t) \equiv ramp(\frac{t}{T}) \equiv \frac{2t}{T} rec(\frac{t - T/2}{T}) \Leftrightarrow \frac{e^{-j\pi fT}}{j\pi fT}(\sin c\pi fT - e^{-j\pi fT}) \qquad \Rightarrow$$

$$(2\beta - 1)\int_0^\infty \sin cv \sin c(2\beta - 1)v dv - 2(\beta - 1)\int_0^\infty \sin c2(\beta - 1)v dv = \pi\beta rec\left(\beta - 1/2\right) \qquad A_{2a}$$

$$s.c. \quad for \quad \beta = \frac{1}{2} \quad we\ get \quad : \int_0^\infty \sin cv dv = \frac{\pi}{2} \qquad as\ before! \qquad A_{2b}$$

$$\int_0^\infty \cos \beta v dv = \delta(\beta) \qquad A_{3a}$$

$$3, x_3(t) \equiv \delta(t) \Leftrightarrow \quad 1 \quad \Rightarrow$$

$$s.c.: \quad for \beta \neq 0 \quad then: \int_0^\infty \cos \beta v dv = 0 \qquad A_{3b}$$

$$4, x_4(t) = \Lambda(\frac{t}{T}) \Leftrightarrow \sin c^2 \pi fT \Rightarrow \int_0^\infty \sin c^2 v \cos 2\beta v dv = \frac{\pi}{2}\Lambda(\beta) \equiv \frac{\pi}{2}(1 - |\beta|) \quad ; |\beta| < 1$$

$$= 0 \qquad , otherwise \qquad A_{4a}$$

$$s.c1.: for \quad \beta = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \sin c^2 v dv = \frac{\pi}{2} \qquad A_{4b}$$

$$s.c.2: for \beta = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \int_0^\infty \sin c^2\, v \cos v dv = \frac{\pi}{4} \qquad A_{4c}$$

$$5, x_5(t)=e^{-\frac{t}{T}}u(t)\Leftrightarrow \frac{T}{1+j2\pi fT},\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos 2\beta v+2v\sin 2\beta v}{1+(2v)^2}dv=\frac{\pi}{2}e^{-\beta}u(\beta) \qquad A_{5a}$$

$$s.c.:\ for \quad \beta=0\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{dv}{1+(2v)^2}=\frac{\pi}{2}u(0)\equiv\frac{\pi}{4} \qquad A_{5b}$$

$$6, x_6(t)=e^{-\left|\frac{t}{T}\right|}\Leftrightarrow \frac{2T}{1+(2\pi fT)^2}\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos 2\beta v}{1+(2v)^2}dv=\frac{\pi}{4}e^{-|\beta|} \qquad A_{6a}$$

,

$$s.c.:\ for \quad \beta=0 \quad \Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{dv}{1+(2v)^2}=\frac{\pi}{4} \quad as \quad before! \qquad A_{6b}$$

$$7, x_7(t)=u(t)\Leftrightarrow \frac{\delta(f)}{2}+\frac{1}{j2\pi f} \qquad \Rightarrow \int_0^{\infty}\sin c2\beta v dv=\frac{\pi}{4|\beta|} \qquad A_{7a}$$

$$s.c.: \quad for \beta=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow \int_0^{\infty}\sin cv dv=\frac{\pi}{2} \qquad as \quad before! \qquad A_{7b}$$

$$8, x_8(t)=\operatorname{sgn} \quad t \quad \Leftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \qquad \Rightarrow \int_0^{\infty}\sin c2\beta v dv\equiv\frac{\pi}{4|\beta|} \qquad as\ A_{7b}$$

$$9, x_9(t)=e^{-\left|\frac{t}{T}\right|}\operatorname{sgn} t\Leftrightarrow \frac{-j4\pi fT^2}{1+(2\pi fT)^2}\Rightarrow \int_0^{\infty-}\frac{v\sin 2\beta v}{1+(2v)^2}dv=\frac{\pi}{8}e^{-|\beta|}\operatorname{sgn}\beta \qquad A_{9a}$$

$$s.c.: \quad for \beta=\pm\tfrac{1}{2}\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{v\sin v}{1+(2v)^2}dv=\frac{\pi}{8\sqrt{e}} \qquad A_{9b}$$

$$A, x_A(t)=e^{-\pi(\frac{t}{T})^2}\Leftrightarrow Te^{-\pi(fT)^2}\Rightarrow \int_0^{\infty}e^{-v^2/\pi}\cos 2\beta v dv=\frac{\pi}{2}e^{-\pi\beta^2} \qquad A_{10a}$$

$$s.c.: \quad for \quad \beta=0\Rightarrow \int_0^{\infty}e^{-v^2/\pi}dv=\frac{\pi}{2} \qquad A_{10b}$$

$$B, x_B(t)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2T}rec(\frac{t}{2T})\Leftrightarrow \frac{\cos 2\pi fT}{1-(4fT)^2}\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos 2v\cos 2\beta v}{1-(4v/\pi)^2}dv=(\frac{\pi}{2})^2\cos(\frac{\pi\beta}{2})rec(\frac{\beta}{2}) \qquad A_{11a}$$

$$s.c.: \quad for \quad \beta \quad =0\Rightarrow \int_0^{\infty}\frac{\cos 2v}{1-(4v/\pi)^2}dv=\frac{\pi^2}{8} \qquad A_{11b}$$

B – أمثلة على التراكيب الخطية:

$$I, Non-symmetric\,signal \quad e.g.: x_5(t) = e^{-t/T} u(t) \quad ,then:$$

$$y_e(t) = e^{\frac{-t}{T}} u(t) + e^{\frac{t}{T}} u(-t) \equiv e^{-\left|\frac{t}{T}\right|} \equiv x_6(t) \qquad see \quad A_{6a}$$

$$y_0(t) = e^{\frac{-t}{T}} u(t) - e^{\frac{t}{T}} u(-t) \equiv e^{-\left|\frac{t}{T}\right|} \operatorname{sgn} t \equiv x_9(t) \qquad see \quad A_{9a}$$

$$y_\pm(t) = e^{\frac{-t}{T}} u(t) \pm \frac{1}{2}\left[e^{\frac{-(t+t_d)}{T}} u(t+t_d) + e^{\frac{-(t-t_d)}{T}} u(t-t_d) \right] \Leftrightarrow \frac{2T}{1+(2\pi fT)^2} \frac{\cos^2}{\sin^2}(\pi f t_d) \equiv Y_\pm(f)$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\beta v + 2v \sin 2\beta v}{1+(2v)^2} \frac{\cos^2}{\sin^2}(\alpha v)dv = \frac{\pi}{4} e^{-\beta} \left\{ u(\beta) \pm \frac{1}{2}\left[e^{-\alpha} u(\beta+\alpha) + e^{\alpha} u(\beta-\alpha) \right] \right\} \qquad B_{2a}$$

$$If \quad \alpha > 0 \quad then: \quad \int_0^\infty \frac{\cos 2\beta v + 2v \sin 2\beta v}{1+(2v)^2} \frac{\cos^2}{\sin^2}(\alpha v)dv = 0 \qquad ; \beta < -\alpha$$

$$= \pm \frac{\pi}{16} \qquad ; \beta = -\alpha$$

$$= \pm \frac{\pi}{8} e^{-(\beta+\alpha)}; \quad -\alpha < \beta < 0$$

$$= \frac{\pi}{8}(1 \pm e^{-\alpha}) \qquad ; \beta = 0$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-\beta}(1 \pm \frac{e^{-\alpha}}{2}) \qquad ; \quad 0 < \beta < \alpha$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-\alpha}\left[1 \pm \frac{1}{2}(e^{-\alpha} + \frac{e^{\alpha}}{2}) \right] \qquad , \beta = \alpha$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-\beta}(1 \pm \cosh \alpha) \qquad , \beta > \alpha \qquad B_{2b}$$

ويمكن أن نميز حالة خاصة ينتج عنها تكامل وحيد:

$$s.c.:\ for\,\alpha=\beta=0\Rightarrow\int_0^\infty\frac{dv}{1+(2v)^2}=\frac{\pi}{4}\qquad as\quad A_{5b}\qquad\&\quad A_{6b}$$

$$II, A-odd\quad symmetric\,signal\quad x_8(t)=\operatorname{sgn}t\Leftrightarrow\frac{1}{j\pi f}\equiv X_8(f)$$

$$Consider\,the\quad shifted\ \sim: x_s(t)\equiv\operatorname{sgn}(t+t_s)\Leftrightarrow\frac{e^{j2\pi f t_s}}{j\pi f}\equiv X_s(f)\quad\Rightarrow$$

$$y_e(t)=\operatorname{sgn}(t+t_s)+\operatorname{sgn}(-t+t_s)\equiv 4t_s rec(\frac{t}{2t_s})\Leftrightarrow 2\operatorname{Re}\{X_s(f)\}\equiv 4t_s\sin c2\pi f t_s\qquad B_{3a}$$

$$y_0(t)=\operatorname{sgn}(t+t_s)-\operatorname{sgn}(-t+t_s)\equiv 2[u(t-t_s)-u(-t-t_s)]\Leftrightarrow j2\operatorname{Im}\{X_s(f)\}\equiv -j2\frac{\cos 2\pi f t_s}{\pi f}\qquad B_{3b}$$

$$y_\pm(t)=\operatorname{sgn}(t+t_s)\pm\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(t+t_s+t_d)+\operatorname{sgn}(t+t_s-t_d)]\Leftrightarrow\frac{2e^{j2\pi f t_s}}{j\pi f}\frac{\cos^2}{\sin^2}(\pi f t_d)\qquad B_{3c}$$

$$\int_0^\infty\sin c2\gamma v\cos 2\beta v dv=\frac{\pi}{8\gamma}[\operatorname{sgn}(\beta+\gamma)-\operatorname{sgn}(\beta-\gamma)]\qquad B_{4a}$$

$$\int_0^\infty\sin c2\beta v\cos 2\gamma v dv=\frac{\pi}{8\beta}[\operatorname{sgn}(\gamma+\beta)-\operatorname{sgn}(\gamma-\beta)]\qquad B_{4b}$$

$$\int_0^\infty\sin c2(\beta+\gamma)\frac{\cos^2}{\sin^2}(\alpha v)dv=\frac{\pi}{8(\beta+\gamma)}\left\{\operatorname{sgn}(\beta+\gamma)\pm\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(\beta+\gamma+\alpha)+\operatorname{sgn}(\beta+\gamma-\alpha)]\right\}\qquad B_{4c}$$

نلاحظ أن التكاملين الأولين هما في الواقع تكامل واحد وتكفي مبادلة مواضع المتغيرات ،و بالتعويض بالقيم يمكن آن نجد أيضا:

$$\int_0^\infty\sin c2\gamma v\cos 2\beta v dv=\frac{\pi}{4\gamma}\qquad ;\quad |\beta|<\gamma$$
$$=0\qquad ,\quad otherwise\qquad B_5$$

$$Put\ \mathrm{a}=\beta+\gamma\ \mathrm{in}\ \mathrm{B}_{4c}\quad\Rightarrow\quad\int_0^\infty\sin c2av\cos^2(\alpha v)dv=\frac{\pi}{8|a|}\qquad ,|a|<\alpha$$
$$=\frac{\pi}{4|a|}\qquad ,|a|>\alpha\qquad B_{6a}$$

$$\int_0^\infty\sin c2av\sin^2(\alpha v)dv=\frac{\pi}{8|a|}\qquad ,|a|\angle\quad\alpha$$
$$=0\qquad ,otherwise\qquad B_{6b}$$

B, Even symmetric ~ e.g. $x_4(t)$, considering the shifted signal we get :

$$\therefore \int_0^\infty \sin c^2 v \cos 2\gamma v \cos 2\beta v dv = \frac{\pi}{4}\left[\Lambda(\gamma+\beta)+\Lambda(\gamma-\beta)\right] \qquad B_{8a}$$

$$\int_0^\infty \sin c^2 v \sin 2\gamma v \sin 2\beta v dv = \frac{\pi}{4}\left[\Lambda(\gamma-\beta)-\Lambda(\gamma+\beta)\right] \qquad B_{8b}$$

$$\int_0^\infty \sin c^2 v \cos 2(\beta+\gamma)v \frac{\cos^2}{\sin^2}(\alpha v)dv = \frac{\pi}{4}\left\{\Lambda(\beta+\gamma) \pm \frac{1}{2}\left[\Lambda(\beta+\gamma+\alpha)+\Lambda(\beta+\gamma-\alpha)\right]\right\} \qquad B_{8c}$$

$$\begin{aligned} Where: \Lambda(\gamma \pm \beta) &= 1-|\gamma \pm \beta| \quad ,|\gamma \pm \beta|<1 \quad or -1 \mp \gamma < \beta < 1 \mp \gamma \\ &= 0 \qquad ,otherwise \qquad B_{8d} \end{aligned}$$

if $\gamma > 1$ *then*:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin c^2 v \cos 2\gamma v \cos 2\beta v dv &= \frac{\pi}{4}\Lambda(\gamma+\beta) \equiv \frac{\pi}{4}(1-|\gamma+\beta|) \quad ,-\gamma-1<\beta<-\gamma+1 \\ &= \frac{\pi}{4}\Lambda(\gamma-\beta) \equiv \frac{\pi}{4}(1-|\gamma-\beta|) \quad ,\gamma-1<\beta<\gamma+1 \qquad B_{9a} \\ &= 0 \qquad ,otherwise \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin c^2 v \sin 2\gamma v \sin 2\beta v dv &= \frac{\pi}{4}\Lambda(\gamma-\beta) \equiv \frac{\pi}{4}(1-|\gamma-\beta|) \quad ,\gamma-1<\beta<\gamma+1 \\ &= -\frac{\pi}{4}\Lambda(\gamma+\beta) \equiv \frac{\pi}{4}(|\gamma+\beta|-1) \quad ,-\gamma-1<\beta<-\gamma+1 \\ &= 0 \qquad ,otherwise \qquad B_{9b} \end{aligned}$$

$$s.c. \quad if \beta=\gamma \quad then: \quad \int_0^\infty \sin c^2 v \frac{\cos^2}{\sin^2}(2\gamma v)dv = \frac{\pi}{4} \qquad B_{9c}$$

وبجمع التكاملين ينتج مجددا التكامل من A_{4b} :

C – أمثلة على التكاملات المستنبطة بالاعتماد على نظريات وتوابع الترابط :

عند تطبيق صيغة التحويل العكسي على أزواج التحويلات من الفقرة 4-2 تكون النتائج أحد نوعين:

I – تكاملات محددة مفردة كما في الحالتين ب وج حيث يكون تابع الترابط متماثلا (زوجيا أو فرديا):

$$\begin{aligned} a, According\ to \quad 4-25: \int_0^\infty \mathrm{sinc}^3 v \cos 2\beta v dv &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{4}-\beta^2\right) \quad ,|\beta|<\frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{9}{8}-\frac{3}{2}|\beta|+\frac{1}{2}\beta^2\right) \quad ,\frac{1}{2}<|\beta|<\frac{3}{2} \\ &= 0 \qquad ,otherwise \qquad C_{1a} \end{aligned}$$

$$s.c.:1 \quad for \beta=0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \mathrm{sinc}^3 v dv = \frac{3\pi}{8} \qquad C_{1b}$$

$$s.c.2:\ for\,|\beta|=\frac{1}{2}\ \ \Rightarrow\ \int_0^\infty \mathrm{sinc}^3 v\cos v\,dv=\frac{\pi}{4} \qquad C_{1c}$$

$$b, Acc.to\quad 4-26:\ \int_0^\infty \frac{\mathrm{sinc}\,v\cos 2\beta v}{1+(2v)^2}dv=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{e}}\sinh\beta & ;|\beta|<1/2\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}e^{-|\beta|}\sinh\dfrac{1}{2} & ,|\beta|\ge\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad C_{2a}.$$

$$s.c.:\ for\,|\beta|=\frac{1}{2}\Rightarrow\int_0^\infty \frac{v\mathrm{sinc}\,v\sin v}{1+(2v)^2}dv\equiv\int_0^\infty\frac{\sin^2 vdv}{1+4v^2}=\frac{\pi}{4\sqrt{e}}\sinh\frac{1}{2} \qquad C_{2b}$$

ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة بوضع $\alpha=1,\beta=0$ في B_{2a}ونلاحظ تحقق شرط الاتصالية لان النتيجة الأخيرة تحسب وفق الصيغتين .

$$c, Acc.to 4-27\,we\quad get:\int_0^\infty\frac{\cos 2\beta v}{1+(2v)^2}dv=\frac{\pi}{4}e^{-|\beta|} \qquad similar\quad to\quad A_{5a}\quad C_3$$

$$d, Acc.to 4-30\,we\quad get:\int_0^\infty \mathrm{sinc}\,v\,\mathrm{sinc}\,2\beta v dv=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & ,|\beta|\langle\ \dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{\pi}{4\beta}\mathrm{sgn}\,\beta & ,|\beta|\ge\dfrac{1}{2}\end{cases} \qquad C_{4a}$$

$$s.c.\quad for\quad |\beta|=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \int_0^\infty \mathrm{sinc}^2 v dv=\frac{\pi}{2} \qquad (like\quad A_{4b}) \qquad C_{4b}$$

$e,According\ to 4-48\quad we\quad get:$

$$\int_0^\infty\frac{e^{-v^2/\pi}\cos 2v\cos 2\beta v}{1-(\frac{4v}{\pi})^2}dv=\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^\infty\frac{m!(-\pi)^{m/2}}{(m/2)!}\sum_{k=0}^\infty\frac{(j2/\pi)^k}{(m-k)!}\left[(\beta+1)^{m-k}+(\beta-1)^{m-k}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^\infty\frac{m!(-\pi)^{m/2}}{(m/2)!}\beta^m\sum_{k=0}^m\frac{(j2/\pi\beta)^k}{(m-k)!}\sum_{n=0}^{m-k}\binom{m-k}{n}\beta^{-n} \quad ,m,k,n\quad are\ \mathrm{even} \qquad C_{5a}$$

$$s.c.\,for\,\beta=1\Rightarrow\int_0^\infty\frac{e^{-v^2/\pi}\cos^2 2v}{1-(4v/\pi)^2}dv=\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^\infty\frac{m!(-\pi)^{\frac{m}{2}}}{(m/2)!}\sum_{k=0}^\infty\frac{j^k 2^m}{(m-k)!\pi^k}$$

$$\equiv\frac{\pi}{4}\sum_{m=0}^\infty\frac{m!(-\pi)^{\frac{m}{2}}}{(m/2)!}\sum_{k=0}^m\frac{(j2/\pi)^k}{(m-k)!}\sum_{n=0}^{m-k}\binom{m-k}{n} \qquad ,m,k,n\quad are\,even\quad C_{5b}$$

II- تراكيب خطية من تكاملين أو اكثر كما في الحالة الأولى حيث تكون توابع الترابط حقيقية غير متماثلة وتكون التوابع المناظرة في مجال التردد عقدية متماثلة هرميتيا، العلاقات 39-4 ونكتفي باعتماد التحويل 4-24a فينتج :

$$\int_0^\infty (2\cos v-\operatorname{sinc} v)\operatorname{sinc}^2 v\cos 2\beta v dv-2\beta\int_0^\infty(\cos 2v-\operatorname{sinc} v\cos v)\operatorname{sinc} v\sin c2\beta v dv=\frac{\pi}{8}(1+2\beta)^2 \quad ,|\beta|<\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\pi}{8}(3+4\beta-4\beta^2) \quad ,\frac{1}{2}<\beta<\frac{3}{2}$$

$$=0 \quad ,otherwise \qquad C_{6a}$$

$$s,c.1 for\ \beta=0 \quad \Rightarrow\int_0^\infty(2\cos v-\operatorname{sinc} v)\operatorname{sinc}^2 v dv=\frac{\pi}{8} \qquad C_{6b}$$

$$s.c.2\ for|\beta|=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow\int_0^\infty(2\cos v-\operatorname{sinc} v)\operatorname{sinc}^2 v\cos v dv\mp\int_0^\infty(\cos 2v-\operatorname{sinc} v\cos v)\operatorname{sinc}^2 v dv=\frac{\pi}{8}(1\pm1)^2 \qquad C_{6c}$$

المراجع:

المراجع

1- بشارة، صادق وآخرون " التحليل الرياضي " منشأة المعارف، مصر 1969 .

2- علي، سهيل " معالجة الاشارة " دار الكتاب دمشق ،– سورية 1988.

3- كورن، كورن "دليل الرياضيات للعلميين والمهندسين " ،ترجمة فئة من أساتذة الرياضيات في جامعة دمشق، مؤسسة الرسالة، لبنان 1980.

4- ABBASSI ,M.M. (Special functions for engineers and scientists), University book home, Egypt, 1974.

5- CARLSON, A.B. (COMMUNICATION SYSTEMS) 2nd edition McGraw Hill USA, 1975.

6-RICE ,J.R. (Numerical methods, software and analysis McGraw Hill USA, 1983 .

7- MOHARIR P.S. (Reciprocally conjunctive description of signal processing communication and networking) Tata McGraw Hill, New Delhi, India, 1990.

8-TAYLOR ,F.J (PRINCIPALS OF SIGNALS AND SYSTEMS) McGraw Hill Inc. USA, 1994.