

## المشاكل الرياضية في نمذجة المواد المركبة الحقيقية

الدكتور رائد النجار\*

(تاريخ الإيداع 24 / 3 / 2011. قُبِلَ للنشر في 29 / 6 / 2011)

### □ ملخص □

يعتمد تشكيل النماذج الرياضية الحاسوبية على طريقة التجانس المؤلفة من أربع معادلات تفاضلية ذات معاملات دورية. يعالج القسم الأول من هذا البحث المشكلات المرتبطة بصياغة نماذج المادة المركبة الحقيقية، حيث يتم حل المسألة ذات القيم غير المؤكدة للمعاملات، بوساطة طريقة الحل الموثوقة المسماة طريقة السيناريو الأسوأ. جدير بالذكر أن بنية المادة المركبة الحقيقية ليست دورية تماماً (أي ليست متكررة بشكل منتظم)، يدرس القسم الثاني من البحث الخطأ الناتج من افتراض الحالة الدورية في حالة لا دورية.

الكلمات المفتاحية: نمذجة حاسوبية، تجانس، مواد مركبة حقيقية.

\* مدرس - قسم هندسة التصميم والإنتاج - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة تشرين.

## Mathematical Problems of Modelling of Real Composite Materials

Dr. Raid Alnajjar\*

(Received 24 / 3 / 2011. Accepted 29 / 6 / 2011)

### □ ABSTRACT □

Numerical modelling of composite uses homogenization method developed for differential equations with periodic coefficients. The contribution deals with tow problems connected with modelling of real composite material. The problem of uncertain values of the coefficients is solved by means of method of reliable solution called also the worst scenario method. Structure of the real composite material is not exactly periodic. Error caused by assuming periodicity in non-periodic case is studied in second part.

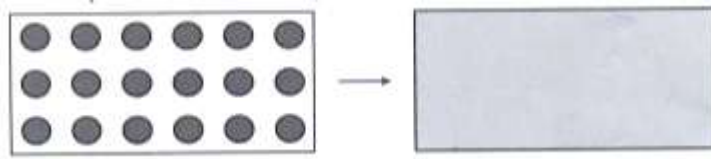
**Keywords:** Numerical Modelling, Homogenization, Real Composite Materials.

---

\* Assistant Professor, Department of Design and Production Engineering, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

**المقدمة:**

تستخدم المواد ذات البنية الدورية، لا سيما المواد المركبة في مجالات تقنية متعددة. إن النمذجة الرياضية باستخدام المعادلات التفاضلية الجزئية تنتج المسائل المرتبطة بالبنية الدقيقة للمادة غيرالمتجانسة حيث تولد العلاقات الأساسية معاملات متذبذبة بشكل كبير في المعادلات الناتجة، ولذلك يحتاج الحساب العددي إلى دقة، وإلى نظام ضخم من المعادلات التي تتجاوز قدرات الحاسوب، الأمر الذي يستدعي استبدال مادة متجانسة بالمادة غير المتجانسة، تكون مكافئة لها بالخواص من أجل تشكيل النموذج الرياضي حيث يتم استبدال معادلة ذات معامل رياضي ثابت (*Constant coefficient equation*) بالمعاملات الدورية المتذبذبة، ويُسمى هذا الإجراء صياغة التجانس، الشكل (1).



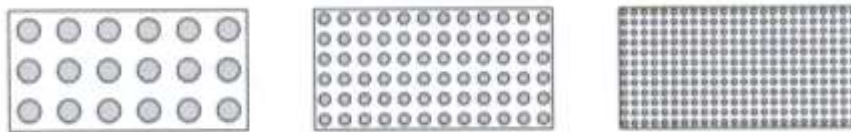
الشكل (1) يبين المادة غير المتجانسة، والمكافئ لها من المادة المتجانسة

**أهمية البحث، وأهدافه:**

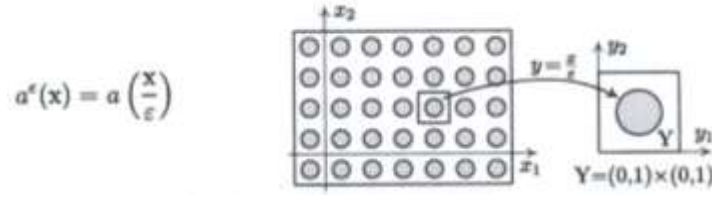
إن النمذجة الرياضية للمواد المركبة تشكل تحدياً جوهرياً لعمليات الحساب لا سيما الحاسوبية منها، وذلك لظهور عدد هائل من المشكلات التي تتطلب مزيداً من البحث من أجل التوصل إلى نتائج منطقية. يعالج هذا البحث مشكلتين فقط، الأولى مشكلة البيانات غير المؤكدة التي تحل بطريقة الحل الموثوق؛ والمسماة التجانس، وحساب معاملاته مع تحديد فواصل المتغيرات، والتدرج العام، والقيم الحدية وثيقة الصلة، أما المشكلة الثانية فهي اللادورية في بنية المادة؛ التي تحل على أساس دراسة الانعطاف، أو الثني في قضيب مصنوع من المادة المركبة الليفية؛ ذلك أن النموذج المقترح المتجانس يعد بنية المادة دوائر تتشوه في أثناء تعرضها للثني.

**طرائق البحث، ومواده:**

تعتمد طريقة البحث على صياغة التجانس؛ إذ تقوم المقاربة الرياضية لصياغة التجانس - التي اقترحها العالم بابوسكا [1] - على أخذ سلسلة المعادلات المحتوية على معاملات ذات فترات دورية متناقصة بالحسبان، وقد طور هذه الطريقة لاحقاً العديد من المهندسين والرياضيين في فرنسا، وإيطاليا، وروسيا، والولايات المتحدة حيث تم حل العديد من المسائل منذ مطلع السبعينيات؛ وهي تلك المسائل المتعلقة بصياغة التجانس للمعادلات الخطية ذات المعاملات الدورية، أو صياغة التجانس للمعادلات الواقعة ضمن المجالات الدورية؛ كما في الشكلين (2) و(3)، وكذلك العديد من المسائل الخطية، وغير الخطية، مثل الدراسات [2]، [3]، [4]، [5]، [6].



الشكل (2) يبين المادة، وسلسلة تصغير بنيتها ذات العناصر المنتهية

الشكل (3) يبين سلسلة المعاملات ذات الفترات الدورية المتناقصة  $\epsilon \rightarrow 0$ 

تقوم طريقة صياغة التجانس على حساب المعاملات المتجانسة، كما يطلق عليها، وهي البارامترات المؤثرة في المادة المركبة وفقاً لطبيعة خواص مكونات المادة المركبة من جهة، وتوزيعها ضمن حيز معين من جهة أخرى [7].

### المسألة النموذجية (Model problem):

سندرس مختلف المسائل من خلال هذه المسألة النموذجية. ولتبسيط طرق الحل سنأخذ معادلة القطع الناقص مع عامل لابلاس بالحسابان حيث:

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}^\epsilon(x) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} \right) = f, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

حيث  $\epsilon$  هي الفترة الدورية في المادة المركبة، و  $\Omega$  مجال ثنائي البعد. في الحقل  $\Omega$  الخاص بـ  $R^2$  (حيث  $R$  نصف قطر الدائرة للعنصر الصغير المنتهي) مع حدود مشتركة نحصل على:

$$\begin{aligned} u^\epsilon &= u_0 \quad \text{on } \Gamma_u, \\ \sum_{i,j} a_{ij}^\epsilon(x) \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x_j} n_i &= q \quad \text{on } \Gamma_t, \end{aligned} \quad (2)$$

حيث  $\Gamma_u$  و  $\Gamma_t$  هما جزء من الحد، وهذا ينتج:  $\partial \Omega = \bar{\Gamma}_u \cap \bar{\Gamma}_t$  ( $meas_1(\Gamma_u) > 0$ ) بالنسبة إلى كل فترة  $\epsilon > 0$  يتم تحديد التوابع  $a^\epsilon(x)$  بواسطة:

$$a_{ij}^\epsilon(x) = a_{ij} \left( \frac{x}{\epsilon} \right), \quad x \in \Omega \quad (3)$$

حيث  $a_{ij}(y)$  هي التوابع الدورية -  $Y$  مع الخانة الأساسية  $Y = (0,1) \times (0,1)$ ؛ أي أن التوابع هي دورية في كلا المتغيرين  $y_1$  و  $y_2$  مع الفترة 1. إننا نفترض أن مصفوفة التوابع  $L^\infty(Y)$  المسماة  $a_{ij}$  هي حد نهائي موجب؛ وذلك لضمان استخراج الحل المطلوب:

$$\begin{aligned} u^\epsilon &= u_0 \quad \text{on } \Gamma_u, \\ \sum_{i,j} a_{ij}(y) \xi_i \xi_j &\geq \alpha \sum_i \xi_i^2, \quad y \in Y, \quad \xi \in R^2 \end{aligned} \quad (4)$$

أما بالنسبة إلى أي  $\epsilon > 0$ ، و  $f \in L^2(\Omega)$ ،  $q \in L^2(\Gamma_t)$ ، فإن المسألة (2) - (1) تسمح بإيجاد حل فريد  $u^\epsilon$  في  $W^{1,2}(\Omega)$ . ومن الناحية الفيزيائية نفترض دائماً وجود تناسق في المصفوفة  $A$  أي  $a_{ji} = a_{ij}$ . حيث  $u^\epsilon$  الحل خلال فترة زمنية معينة، و  $W^{1,2}(\Omega)$  جزء من المجال.

بناءً على التجارب العملية يتم التعامل مع الحالة المطابقة للمادة المركبة ثنائية الطور. إذا جعلنا المجموعة الفرعية  $Y_1$  من الخانة الأساسية  $Y$  تأخذ شكل التضمين، عندئذ تكون المعاملات ذات توابع ثابتة، ولها قيمتان فقط:

$$Y_0 = Y - Y_1 \text{، والثانية على المصفوفة } Y_1.$$

#### تقريب الحل (Convergence of the solution):

بالنسبة إلى سلسلة ذات فترات متناقصة  $\varepsilon \rightarrow 0$  بمعدل (3) فإننا نحصل على سلسلة من المسائل (2)- (1) التي تنتج سلسلة من الحلول  $u^\varepsilon$ . إن اتباع نظرية التجانس التقليدي [5] يؤدي إلى سلسلة من الحلول  $u^\varepsilon$  التي تتقارب في  $W^{1,2}(\Omega)$  بشكل ضعيف، وفي  $L^p(\Omega)$  بشكل قوي ( $p < \infty$ ) قياساً بالتابع  $u^* \in W^{1,2}(\Omega)$  الذي يمثل الحل للمسألة المتجانسة مع معاملات متجانسة  $a_{ij}^*$  من النوع نفسه:

$$-\sum_{i,j} a_{ij}^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_i \partial x_j} f \text{ on } \Omega, \quad (5)$$

$$u^* = u_0 \text{ on } \Gamma_u,$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}^* \frac{\partial u^*}{\partial x_j} n_i \text{ on } \Gamma_t. \quad (6)$$

#### المعاملات المتجانسة (Homogenized coefficients):

تُعطى المعاملات المتجانسة  $a_{ij}^*$  بالصيغة الآتية:

$$a_{ij}^* = \int_Y \left( a_{ij}(y) - \sum_k a_{ik}(y) \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k}(y) \right) dy, \quad (7)$$

إذ إن التوابع الثانوية  $\chi_j$  هي الحلول الدورية- $Y$  لما يسمى المسألة الخلية (The so-called cell problem):

$$-\sum_k \frac{\partial}{\partial y_i} \left( a_{ik}(y) \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k}(y) \right) = -\sum_i \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_i}(y) \quad (8)$$

تظهر الحلول  $\chi_j$  بشكل ضعيف، وهي حلول فريدة للتوابع المضافة؛ ومنه  $\int_Y \chi_j(y) dy = 0$ .

#### المسائل الرياضية الخاصة بنماذج المواد الحقيقية

##### (Mathematical problems of modelling real composites)

إن التجانس هو من الطرق الفعالة لحل المعادلات ذات المعاملات الدورية المعطومة؛ أي لصياغة نماذج المواد ذات البنية الدورية، والخواص المعروفة بدقة. إن صياغة النماذج الرياضية للمواد المركبة الحقيقية تؤدي إلى ظهور المزيد من المسائل الرياضية، وسنذكر مسألتين منها مرتبطتين بحقيقة أن النماذج المثالية مختلفة عن المواد المركبة الحقيقية:

- (a) يتم الحصول على بارامترات المكونات الحقيقية للمواد من خلال القياسات التجريبية، الأمر الذي يشكل سلسلة من الأخطاء في عملية القياس، ويمكن حل مشكلة البيانات غير المؤكدة بطريقة الحل الموثوق.
- (b) إن المادة المركبة الحقيقية ليست دورية بدقة، كما تنص نظرية التجانس، ويمكن دراسة الخاصية اللادورية بوساطة المعادلات التفاضلية، أو بطريقة الحل الموثوق المذكورة آنفاً.

#### طريقة الحل الموثوق لمشكلات البيانات غير المؤكدة:

#### (Method of reliable solution for problems with uncertain data)

لأن المعاملات، والبيانات الأخرى الخاصة بتشكيل نماذج معادلات المواد الحقيقية تحسب من القياسات التجريبية، يتم تعريفها في مواقع معينة فقط، ولذلك فإن طريقة الحل الموثوق، أو التي تسمى أحياناً بطريقة السيناريو الأسوأ، هي المستخدمة في هذه الحالة؛ لأنها تساعد في حل مسألة البيانات غير المؤكدة، وقد طور هذه الطريقة الباحث هلافاسيك *Hlaváček*. إن طرق الحل محددة، على الرغم من الاعتماد على بيانات غير مؤكدة، وعشوائية بطبيعتها، حيث تعتمد على إيجاد مجموعة من البيانات المتاحة مع النظر إلى خاصية عدم التيقن منها، يتم اختيار توابع خاصة لتقويم عدم التيقن من البيانات المعطاة، ثم البحث عن البيانات التي تُعطي قيمة حدية للتوابع المستخدمة. من الناحية العددية، يمكن حل المسائل بوساطة طريقة التصميم الأمثل؛ لأنها تؤدي إلى البحث عن قيم حدية للتوابع الرياضية المستخدمة. هذه الطريقة المعتمدة على الحل الموثوق مستخدمة في مسائل متنوعة - [9]، [10]، [11].

#### التجانس في المسائل ذات بيانات الدخل غير المؤكدة:

#### (Homogenization of problems with uncertain input data)

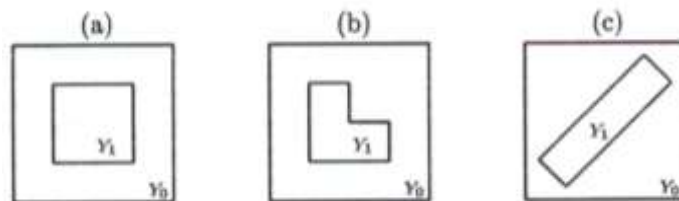
إن البيانات الخاصة بعناصر المواد المركبة ليست معلومة بدقة، بل هي معلومة من حيث الحجم فقط، والهدف الحالي هو تطبيق الحل الموثوق على خاصية التجانس، وذلك من خلال دراسة التجانس [8] في المعادلة الخطية من الدرجة الثانية. لقد تم حل العديد من المسائل بوصف المادة المركبة ذات بنية دورية ثابتة، لكن مع معاملات غير مؤكدة؛ أي معاملات لها قيم ما، في حدود معينة، وفواصل من عدم اليقين؛ هي:

- حساب القيم العظمى، والصغرى للمعاملات المتجانسة، والمطابقة للحالة.
- حساب القيمة العظمى للحل في المواقع الحرجة من الفترة الزمنية.
- البحث عن القيمة العظمى للمسألة الدورية.

لقد طُبِقَ هذا الإجراء على تجارب عددية مختلفة إضافة إلى وجود القيم الحدية، ونقاط التقارب.

#### المسائل العددية (Numerical examples):

إن الأشكال على الفترة الدورية الأساسية مأخوذة وفقاً للشكل (4)



شكل (4) يبين ترتيب الأشكال الأساسية الدورية، وتنظيمها

#### مواصفات القيم غير المؤكدة (Specification of uncertain):

سندخل المجموعات  $U_{ij}^{ad}$  المحددة بـ:

$$U_{ij}^{ad} = \left\{ a \in L_{\#}^{\infty}(Y) : a = \text{const. on } Y_k, a|_{Y_k} \in [C_{ij}^{k,\min}, C_{ij}^{k,\max}], k \in \{0,1\} \right\}$$

حيث  $C_{ij}^{k,\max}$ ،  $C_{ij}^{k,\min}$  تشكلان الثوابت بوصفها حداً أعلى وأدنى؛ بحيث إن كل مجموعة من التوابع  $a_{ij} \in U_{ij}^{ad}$  تلبي حالة القطع الناقص من المعادلة (4)، والرمز # يعني الحالة الدورية -Y، والرمز  $L_{\#}^{\infty}(Y)$  سلسلة المصفوفات اللامتناهية. إن الافتراض الطبيعي هو  $C_{ij}^{k,\min} = C_{ji}^{k,\min}$  و  $C_{ij}^{k,\max} = C_{ji}^{k,\max}$ ، تحدد مجموعة المعاملات المسموح بها بواسطة:  $u^{ad} = \{A = (a_{ij})_{i,j=1}^N : a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} \in U_{ij}^{ad}\}$  ويشكل عام، فإن المعاملات الدورية-Y الممثلة بـ  $a_{ij}$  هي من التابع الناجم عن المصفوفة المنتظمة A، وهي معاملات ثابتة على المجموعات  $Y_0, Y_1$ ، وهذه الثوابت هي ذات فواصل محددة.

### المعاملات المتجانسة (Homogenised coefficients):

تعالج المسألة الأولى المعاملات المتجانسة، والسؤال الطبيعي هو: هل القيم الحدية للمعاملات الأصلية غير المستمرة تنتج أيضاً قيماً حدية (قيم عظمى، ثم قيم صغرى على التوالي) للمعاملات المتجانسة؟. في واقع الأمر للإجابة عن هذا السؤال نحتاج إلى تحديد مجال المعاملات المتجانسة وفقاً لمجموعة المعاملات الأصلية المطابقة لعناصر معينة، ولذلك نتحدد التوابع  $\Phi_{ij}$  بالمعادلة (7)؛ أي:

$$\Phi_{ij}(A, \chi) = \int_Y \left( a_{ij} - \sum_k a_{ik} \frac{\partial \chi_j}{\partial y_k} \right) dy,$$

حيث  $\chi = (\chi_1, \chi_2)$  هي الحل الأمثل للمسألة (8). يتم قراءة مسائل القيم العظمى، ثم القيم الصغرى على التوالي: (P1) نجد  $\bar{A} \in U^{ad}$  (resp.  $\underline{A} \in U^{ad}$ ) كالآتي:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) &\geq \Phi_{ij}(A, \chi(A)) \quad \forall A \in U^{ad} \\ \text{(resp. } \Phi_{ij}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) &\geq \Phi_{ij}(A, \chi(A)) \quad \forall A \in U^{ad} \text{).} \end{aligned} \quad (9)$$

### تحليل طريقة صياغة التجانس، ومناقشتها:

سنستخدم في دراستنا العملية المسائل الآتية في تحليل طريقة صياغة التجانس، ومناقشتها (Homogenization):

### المسألة (1) (Example 1):

تعالج أبسط حالة ذات عنصرين بخواص موحدة وفقاً للشكل (4-a)؛ أي أن  $a_{11} = a_{22}$ ،  $a_{12} = a_{21} = 0$ . إن التناظر تبعاً للمحاور  $y_1 = 1/2$ ،  $y_2 = 1/2$  يعطي أيضاً  $a_{12}^0 = a_{21}^0 = 0$ . يتم اختيار المعاملات  $a_{11}|_{Y_0} \in [90; 110]$ ،  $a_{11}|_{Y_1} \in [190; 210]$ . حيث نعطي القيمة العظمى (ثم الدنيا على التوالي) للتابع  $\Phi_{11} = \Phi_{22}$ :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \underline{a}_{11} = \underline{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{11}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = \Phi_{22}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 128.811,$$

$$\Phi_{11}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = \Phi_{22}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 107.851.$$

لاحظنا أن القيم الحدية للمصفوفة  $A$  تظهر على حدود الفواصل المقررة، ويمكن توقع قيم أعلى من المسألة الخطية بالنسبة إلى عناصر معينة في المعاملات المتجانسة.

### المسألة (2) (Example 2):

يتم استخدام مركب من طورين مع خواص موحدة، لكن مع ترتيب هندسي مغاير وفقاً للشكل (b-4)، ويكون للمعاملات ذات الفواصل كما في المسألة الأولى. لأن التتابع  $a_{11} = a_{22}$  غير متناظرة على المحور  $Y$ ، فإن المعاملات  $a_{12}^0 = a_{21}^0$  تعطى من خلال التابع  $\Phi_{12}$ ، وستكون لاصفرية. إن التتابع  $\Phi_{11} = \Phi_{22}$  تعطي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \underline{a}_{11} = \underline{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{11}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = \Phi_{22}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 130.629,$$

$$\Phi_{11}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = \Phi_{22}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 109.658.$$

ويكون لدينا من التابع  $\Phi_{12}$  يأتي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \underline{a}_{11} = \underline{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{11}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 0.902, \quad \Phi_{12}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 0.429.$$

لقد حصلنا من هذا التابع على قيم من الجهة المعاكسة للفواصل، ويكون تأثير المعاملات المتجانسة اللاقطرية ضئيلاً.

### المسألة (3) (Example 3):

يتم تعميم الحالة في هذه المسألة. لنفترض أن عنصراً واحداً فقط ذو خواص موحدة بينما الأخير ليس موحد الخواص، ويعبر عنه بمعاملات لاقطرية. إن شكل المجال الفرعي  $Y_I$  يقوي هذه الخواص اللاقطرية—راجع الشكل (c-4). تؤخذ العوامل من الفواصل المبينة في المسألة:



$$a_{11} | Y_0 = a_{22} | Y \in [90; 110], a_{12} | Y_0 = a_{12} | Y_0 = 0,$$

$$a_{11} | Y_1 = a_{22} | Y_1 \in [190; 210],$$

$$a_{12} | Y_1 = a_{21} | Y_1 \in [165; 185]$$

إن التوابع  $\Phi_{11} = \Phi_{22}$  تعطى:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 0 & \text{on } Y_0 \\ 165 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 0 & \text{on } Y_0 \\ 185 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{11}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = \Phi_{22}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 120.288,$$

$$\Phi_{11}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = \Phi_{22}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 88.856.$$

كذلك التوابع  $\Phi_{12} = \Phi_{21}$  تعطى:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 0 & \text{on } Y_0 \\ 185 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 0 & \text{on } Y_0 \\ 165 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{12}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 48.76, \Phi_{12}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 29.135.$$

نلاحظ أن قيمة واحدة في المصفوفة  $\bar{A}$  ( $\underline{A}$  على التوالي) تظهر دائماً على الحد المعاكس للفواصل المناسب قياساً بالقيم الأخرى.

#### المسألة (4) (Example 4):

سنأخذ الحالة نفسها بالحسبان؛ كما في المثال السابق وفقاً للشكل (4-c)، ولكن سنفترض أن المادة في القسم

$Y_0$  متباينة الخواص، ويعبر عن المعاملات بالطريقة الآتية:

$$a_{11} | Y_0 = a_{22} | Y \in [90; 110], a_{12} | Y_0 = a_{12} | Y_0 \in [65; 85],$$

$$a_{11} | Y_1 = a_{22} | Y_1 \in [190; 210],$$

$$a_{12} | Y_1 = a_{21} | Y_1 \in [165; 185]$$

إن التوابع  $\Phi_{11} = \Phi_{22}$  تعطى:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 79.95 & \text{on } Y_0 \\ 165 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 85 & \text{on } Y_0 \\ 165 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{11}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = \Phi_{22}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 128.830,$$

$$\Phi_{11}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = \Phi_{22}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 107.040.$$

ومن أجل التتابع  $\Phi_{12} = \Phi_{21}$  يكون لدينا:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 110 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 85 & \text{on } Y_0 \\ 185 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{pmatrix}, \text{ حيث } \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 209.882 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 65 & \text{on } Y_0 \\ 165 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi_{12}(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 102.691, \Phi_{12}(\underline{A}, \chi(\underline{A})) = 82.078.$$

في هذه الحالة إذا كان توصيف خواص المادة معقداً، فإن القيم المحددة لـ  $a_{12}$  سيتم الحصول عليها من داخل الحدود المسموح بها.

التدرج العام / معدل الانحدار / (Generalized gradient):

تعالج المسألة الثانية ما يُعرف بالتدرج العام  $A(x/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon$  للحل  $u^\varepsilon$  وفقاً للمسألة الأولى؛ وهو مثلاً التدفق الحراري في الجس. سنقدم التابع  $W = (w_1, w_2)$  المحدد أدناه:

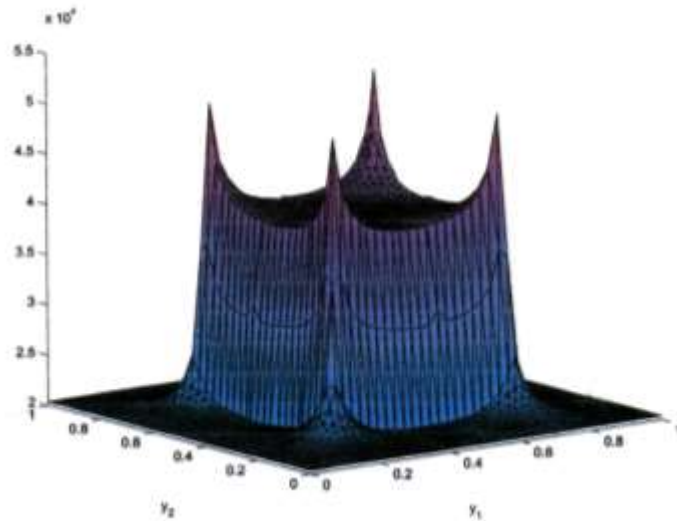
$$w_1 = \sqrt{\left[ a_{11} \left( 1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right) - a_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} \right]^2 + \left[ -a_{11} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} + a_{12} \left( 1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \right) \right]^2},$$

$$w_2 = \sqrt{\left[ a_{21} \left( 1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right) - a_{22} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} \right]^2 + \left[ -a_{21} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} + a_{22} \left( 1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \right) \right]^2},$$

لأننا لن نصف هذا التدرج بشكل دقيق حيث يمثل هذا التقدير الحد الأعلى للتدرج العام ضمن الفترة الأساسية، ويتم تحديد التابع  $\Phi$  بمساعدة العلاقة [15]:

$$\Phi = \frac{1}{|\tilde{Y}|} \left( \int_{\tilde{Y}} \left\{ \left[ a_{11} \left( 1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right) - a_{12} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} \right]^2 + \left[ -a_{11} \left( 1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} \right) - a_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \right]^2 + \left[ a_{21} \left( 1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \right) - a_{22} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_2} \right]^2 + \left[ -a_{21} \left( 1 - \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} \right) + a_{12} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_2} \right]^2 \right\} dy \right)^{1/2}$$

التي تعني القيمة المتوسطة لطول القوة الموجهة  $W$  ضمن مجموعة فرعية مختارة بعناية  $\tilde{Y}$  خلال الفترة الأساسية  $Y$ . هذه المجموعة الفرعية مختارة في الحالات التي تتغير فيها عناصر المادة على نحو حاد كزوايا المربعات... إلخ، وهذا عائد إلى أن هذه الحالات تملك ذروات مرتفعة نسبياً في التابع  $|W|$ ؛ أي إلى وجود قوى شد أكبر؛ يعبر الشكل (5) عن الحالة الواردة في الشكل (a-4). تتم قراءة القيم العظمى للمسألة على النحو الآتي:



الشكل (5) يبين ارتفاع ذروات الانحدار العام /التدرج/

(P2) أجد  $\bar{A} \in U^{ad}$  كالآتي:

$$\Phi(\bar{A}, \chi(\bar{A})) \geq \Phi(A, \chi(A)) \quad \forall A \in U^{ad}$$

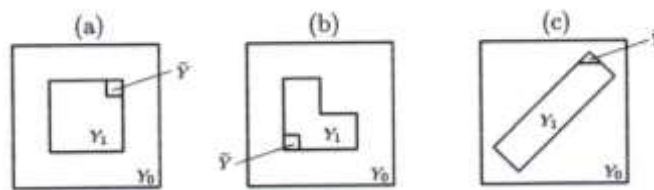
المسألة (5) (Example 5):

يبين الشكل (6) كيفية اختيار المجال الفرعي  $\bar{Y}$  مع تسلسل المعادلات نفسه؛ كما في المسألة (1). مصفوفة المعاملات ذات القيم العليا هي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 4691.420$$

وبالمثل نجد، كما في المسألة الأولى، أن القيم العظمى تقع على الحدود العليا للفواصل المحددة للمجموعة  $U^{ad}$ .



الشكل (6) يبين اختيار المجال الفرعي  $\bar{Y}$

المسألة (6) (Example 6):

يتم ترتيب المادة المركبة كما في الشكل (b-6)، ومجال القيم كما في المسألة (2). القيم الحدية هي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 210 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 4760.215$$

يقع المجال الفرعي  $\tilde{Y}$  في الزاوية السفلية اليسرى من المجموعة  $Y_I$ ؛ لأن الذروة في هذه الزاوية هي في حدها الأقصى. إن الذروات في المناطق الأخرى ليست بالارتفاع ذاته؛ نظراً لقصر المسافة بينها، وهي تنتج قيماً موزعة بانتظام للانحدار العام.

### المسألة (7) (Example 7):

يحكي هذا المثال حالة الشكل (c-6)، ويكون التفاوت المسموح به مماثلاً للمسألة (3). مصفوفة القيم العظمى هي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 110 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \quad \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 0 & \text{on } Y_0 \\ 185 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi(\bar{A}, \chi(\bar{A})) = 5668.581$$

نحصل على قيمة واحدة في المصفوفة  $\bar{A}$  على الجانب المعاكس؛ كما هو الحال مع المسألة الثالثة.

### الحل المتجانس $u^*$ :

تعالج هذه المسألة الحل المتجانس، ويكون التابع  $\Phi$  محدداً بالعلاقة:

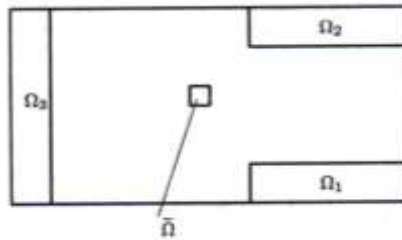
$$\Phi(u^*(A^*(A, \chi(A)))) = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \int_{\tilde{\Omega}} u^*(A^*(A, \chi(A))) dx,$$

حيث  $A^*$  مصفوفة المعاملات المتجانسة، و  $u^*$  هي الحل المتجانس المرتبط بالمسألة (5) - (6). تمثل التوابع القيمة المتوسطة للحل  $u^*$  ضمن المجال الفرعي المختار  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ ، وهكذا يكون السؤال هو: كيف تؤثر مصفوفة المعاملات  $A$  في الحل المتجانس  $u^*$  في بعض المواضع المختارة من المادة (الحرارة، والمواضع الحدية). تتم قراءة القيم الحدية على النحو الآتي:

(P3) أجد  $\bar{A} \in U^{ad}$  كما يأتي:

$$\Phi(u^*(A^*(\bar{A}, \chi(\bar{A})))) \geq \Phi(u^*(A^*(A, \chi(A)))) \quad \forall A \in U^{ad}$$

تعالج المسألتان الآتيتان الحالة المبينة في الشكل (7). إن شكل المجال  $\Omega$  مستطيل مع جوانب بنسبة 2:1. يتم وضع ثلاثة مصادر حرارية في الجسم المطابق للمجالات المحددة  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  التي تأخذ القيم الآتية  $f_1 = f_2 = f_3 = 3000$ .



الشكل (7) يبين الحالة المكرو سكوبية للمسألة

يتم وضع المجال  $\tilde{\Omega}$  في مركز المجال  $\Omega$  تقريباً، ويتم وصف حالة نيومان  $\partial_\nu u^* = 0$  على أجزاء الحدود  $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \partial\Omega \cap \partial\Omega_3$ ، وتحدد حالة ديريشلت  $u^* = 0$  على بقية مجال الحد.

**المسألة (8) (Example 8):**

تحدد البنية الدقيقة، ومجال المعاملات بالطريقة نفسها؛ كما في المسألة الأولى. راجع الشكل (a-4) إذ سيكون للمصفوفة  $\bar{A}$  التابع  $\Phi$  ذو القيم:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 90 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases},$$

$$\Phi(u_0(A_0(\bar{A}, \chi(\bar{A})))) = 4.605$$

**المسألة (9) (Example 9):**

يتم تحديد مجال المعاملات بالطريقة نفسها؛ كما في المسألة (3) وترتب العناصر وفقاً للشكل (c-4)، وتكون مصفوفة القيم العظمى  $\bar{A}$  هي:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{حيث} \quad \bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = \begin{cases} 9 & \text{on } Y_0 \\ 190 & \text{on } Y_1 \end{cases}, \quad \bar{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \begin{cases} 0 & \text{on } Y_0 \\ 185 & \text{on } Y_1 \end{cases}$$

$$\Phi(u_0(A_0(\bar{A}, \chi(\bar{A})))) = 6.361$$

نلاحظ أن النتائج في المسألتين السابقتين مغايرة "inverse" للنتائج في المسألة الأولى والثالثة. على سبيل المثال، تعالج المسألة (8) المادة المركبة المشكلة من مواد متجانسة الخواص، ويمكن بذلك تفسير النتائج على أساس القيم ذات المعامل المتجانس التي تملك قيمة منخفضة ذات متوسط عام لدرجة الحرارة على باقي المجال  $\bar{\Omega}$ .

**النتائج والمناقشة:**

تم تنفيذ الحسابات كافة وفقاً للبيئة *MATLAB* بمساعدة صندوق الأدوات [12]، وإطار الأدوات [13] من .E04JAF

- تم الحصول على الحلول  $\chi_1$  و  $\chi_2$  بطريقة العناصر المنتهية (العناصر المثلثية الخطية)، وقد عدّل الحساب؛ ليناسب متطلبات الحل الدوري. تتطلب حالة الحد الدوري وجود قيم للتتابع  $\chi_1$  و  $\chi_2$  في كل موقع على الجانب المعاكس  $Y$ ؛ أي إنَّ العقد المثلثية تطابق مثيلاتها في الجانب المقابل، وبالمستوى ذاته، ولها نفس القيم المحددة. ويمكن ضمان هذا التطابق من خلال وجود نفس العدد من العقد على كل جانب. نقوم بعد ذلك بإضافة حالة القيمة صفر المتوسط للتتابع  $\chi_1$  و  $\chi_2$  على التوالي، ونستبدل بالصف العشوائي في المصفوفة الحجم التي تحتل التتابع الأساسية. ونضع الصفر في المكان المطابق على الجهة اليمنى من الكمية الموجهة؛ لنحصل بعد ذلك على التتابع الأساسية، والقيمة المتوسطة.
- يتم الحصول على المعاملات المتجانسة، وطول الانحدار العام من التكامل العددي، إن الحل المتجانس  $u^*$  يُحسب بطريقة العناصر المنتهية، وفي هذه الحالة التطبيق *MATLAB* يُسمى *assembl* [12].
- إن إيجاد القيم الأعظمية ثم الأصغرية لتابع ما يتم من خلال المصفوفة الحاوية على المعاملات  $A$ ، ذات القيم الستة، وتستخدم الطريقة المتكررة؛ للحصول على القيم الحدية استناداً إلى مبدأ كوازي-نيوتن الذي يقرب مصفوفة هيس *Hess*، ذات المشتقات من المرتبة الثانية من قيم التابع.

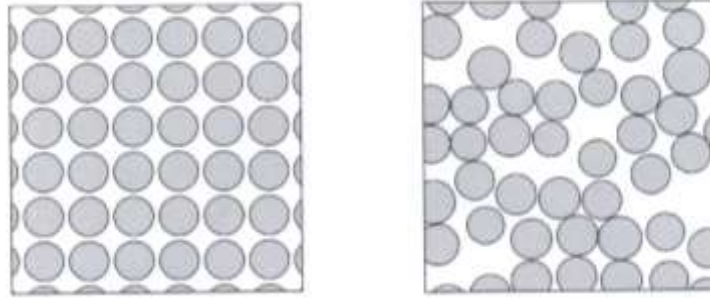
## الاستنتاجات والتوصيات:

## 1- المواد المتجانسة ذات البنى غير الدورية

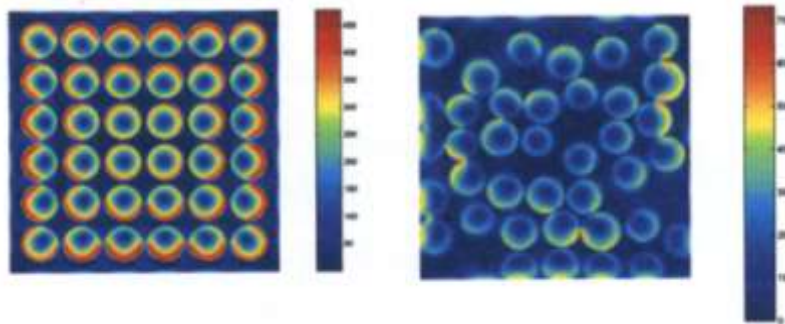
**Homogenization of material with non-periodic structure**

لقد تم تحليل مواد مركبة ليفية البنية [13]، وتظهر الدراسات أن هذه المواد ليست ليفية بالمعنى الدوري مع اختلاف في أقطار الألياف *fibres*. فما هو الخطأ الحاصل إذن؟!.

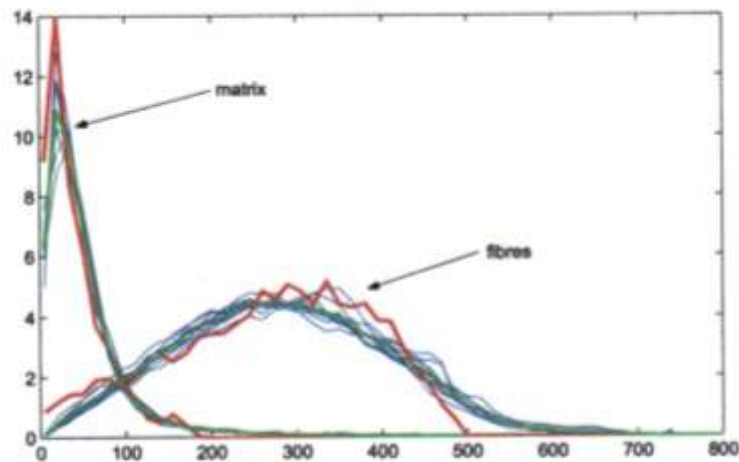
الجواب يتلخص في أن عينة واحدة من المادة المركبة الليفية مع بنية دورية تعطي /20/ عينة مع توزيع عشوائي للألياف. وكل عينة تملك نفس الحجم، شكل (8). يمكن تفسير المسألة فيزيائياً على أساس ثني قضيب من الحديد، ويكون التدرج فيه تابعاً لإجهاد القص في القضيب والاستجابة الملحوظة منه، شكل (9). لقد تم حساب المعادلة على أساس البنية الدورية والعشوائية، وأظهرت الموازنة قيماً فعالة للمعاملات المتزامنة مع قيم محسوبة بطريقة التجانس، وتمت الموازنة بين المخططات البيانية لبنية المادة لدراسة النتائج وتغيراتها. يُظهر الشكل (10) حل المسائل على أساس البنية العشوائية حيث يكون الانحدار أكبر من انحدار الحل بالطريقة الدورية التي تراوح فيها القيم بين (0، 190)، وترتفع الذروة إلى القيمة 360 في المصفوفة الرياضية، وبالمقابل لم تتجاوز قيمة التدرج 500 في الحالة الدورية. أما بالحالة العشوائية فقد تجاوزت قيمتها 700. تظهر ذروات الانحدار عند تماس الألياف، ولذلك فإن إهمال الناحية الدورية يقود إلى سلسلة مهمة من الأخطاء.



الشكل (8) يبين البنى الدورية والبنى العشوائية العامة



الشكل (9) يبين التدرج في الحل للبنى الدورية والعشوائية



الشكل (10) يبين الموازنة بين القيم النظرية والتجريبية

## 2- بعض الجوانب المرتبطة بالبنى العشوائية للمواد المركبة

### Some aspects of random structures of composites

إن إنتاج بنية عشوائية لمادة ليفية مركبة مماثلة للمادة الحقيقية أمر في غاية الصعوبة نظراً للحاجة إلى معرفة البنية الحقيقية من أوجه مختلفة، لا سيما الحجم في كل طور، وتحليل المادة الحقيقية قبل إجراء عملية المحاكاة مع دراسة حالات التفاوت في الفراغ بالنسبة إلى ناحية الحجم. إن الحساب المستخدم في توليد بنيات عشوائية يعتمد على التمدد الطيفي للمادة المسماة بعملية الضجيج الأبيض [14].

وعليه فإن عشوائية البنية لم تولد فرقاً مهماً في القيم ذات البارامترات الفعالة، والموازنة بين تدرج الحل للبنية العشوائية أنتج قيماً أكبر من القيم الناتجة عن الحالة الدورية دون إهمال الحالة اللا دورية للمادة المركبة.

## References

- [1]. **BABUSKA, I.** "Homogenization approach in engineering, Computing methods in applied sciences and engineering, Second internal, sympos". Berlin, 1996, Part 1, 137-153.
- [2]. **BRAIDES, A. DEFRANCESCHI, A.** "Homogenization of multiple integrals", Oxford University Press, Oxford , 1998, 533.
- [3]. **BENSOUSSAN, A. LIONS, J.L., PAPANICOLAU, G.,** "Asymptotic analysis for periodic structures", North Holland, 1978, 295.
- [4]. **PANKOV, A. A.,** "G-Convergence and homogenization of nonlinear partial differential operators", Mathematics and its Applications, 1997, 422.
- [5]. **SANCHEZ-PALENCIA, E.,** "Non homogenous media and vibration theory", Lecture notes in physics 127, Springer, 1980.
- [6]. **ZHIKOV, V. V., KOZLOV, S., M., OLEINIK, O., A.,** "G-convergence of parabolic operators", Russian Math. Surveys 36:1, 1981, 9-60 pages.
- [7]. **NGUETSENG, G.,** "A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization", SIAM J. Math. Anal., vol. 20, 1989, 608 pages.
- [8]. **ECHVATAL, L.,** "Worst scenario method in homogenization", submitted to Appl. Math., 2004, 25.
- [9]. **HALVACEK, I.,** "Reliable solutions of elliptic boundary value problems with respect to uncertain data", Proceedings of the second WCNA, Nonlinear Anal. 30, 1997, 3879.
- [10]. **HALVACEK, I.,** "Reliable solution of a quasilinear nonpotential elliptic problem of a nonmonotone type with respect to uncertainty in coefficients", Math. Anal. Appl. 212, 1997, 452 pages.
- [11]. **HALVACEK, I., CHLEBOUN, J., BABUSKA, I.** "Uncertain input data problems and the worst scenario method", Elsevier 2004, 322-327 pages.
- [12]. **The MathWorks, Inc.:** Partial Differential Toolbox User's guide, Natick, 1996, 435-444 pages.
- [13]. **The MathWorks, Inc.:** NAG Foundation Toolbox User's Guide, Natick, 1996, 212-224 pages.
- [14]. **TORQUATO, S.,** "Random Heterogeneous Materials, Microstructure and Microscopic Properties", Springer-Verlag, 2002, 186- 198 pages.