

## النموذج الديناميكي لتداخلات الرنين الصوتي في أنظمة الاحتراق

الدكتور حبيب محمود\*

( قبل للنشر في 2002/10/28 )

### □ الملخص □

في عمليات الاحتراق المستمر، غالبا ما يوجد تداخل واقتران ما بين انطلاق الحرارة و ذبذبات الضغط التي تقود إلى شكل من الرنين يُعرف بعدم الاتزان الصوتي الحراري. إن وجود عدم الاتزان هذا في أنظمة الاحتراق العملية يشكل خطرا على سلامة بنيتها، ويكون هذا الخطر متناسبا مع سعة ذبذبات الضغط، إذ يتراوح تأثيرها بين تراجع في مستوى أداء منظومة الاحتراق (نقاط موضعية عالية الحرارة، وانخفاض فعالية الاحتراق) وصولا إلى حد إخفاق المجموعة بسبب تصدعات في بنيتها. غير أن المنظم الفعال ذا التغذية العكسية يمكن أن يُسهم في تجنب مجموعة الاحتراق لهذه المشكلات، إذ يستخدم لاكتشاف بداية نشوء هذه الذبذبات وتطورها وبشكل ملائم يقوم بتعديل مؤشرات الدخل. ولكن حتى يتم توفير الخطوط الأولية الواضحة والمرشدة لتصميم مثل هذا المنظم لا بد من توفير الإطار الرياضي التحليلي لدراسة عدم الاتزان بالإضافة إلى تفاصيل التأثيرات المتبادلة بين المتحولات الأساسية لعملية الاحتراق. في هذا البحث نقدم النتائج الأولية التي تمكنا من الحصول عليها نتيجة للجهد المتواصل بهدف تطوير نموذج رياضي نظامي لهذه الظاهرة. هذا الجهد يتعلق بتطوير نموذج تغذية عكسية لحارق مسبق الخط، وقد تم اشتقاق هذا النموذج باستخدام معادلات الحفظ الأساسية لجريان أحادي البعد، وبُني بشكل أساسي على النموذج الديناميكي للهب. إن النموذج الذي تم الحصول عليه لا يسلط الضوء فقط على سلوكية عدم الاتزان الصوتي الحراري، لكنه يؤمن أيضا طريقة لتحديد العلاقة ما بين عدم الاتزان والمؤشرات الفيزيائية المختلفة. ولإيضاح دقة النموذج المقترح تمت مقارنة نتائجه بالنتائج التجريبية لأبحاث سابقه.

\*مدرس في قسم هندسة القوى الميكانيكية . كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية . جامعة تشرين . اللاذقية . سورية.

## Dynamic Model of Acoustic Resonance Interactions in Combustion Systems

Dr. Habib Mahmoud\*

(Accepted 28/10/2002)

### □ ABSTRACT □

In continuous combustion processes, often there are a coupling and interaction present between the heat release and pressure oscillations which leads to a form of resonance referred to as thermoacoustic instability. The presence of this instability in a practical devices can endanger the structural integrity of the system, and this danger is proportional to the pressure oscillations amplitude. The effect of this instability ranges from system performance degradation (high local hot spots, reduced combustion efficiency) and, in the worst case, system failure due to structural damage. An active feedback controller offers help in this regard, since it could be employed to detect the onset of these growing oscillations and appropriately modulate the input sources. In order to provide clear guidelines for the design of such controller, an analytical framework for studying the instability as well as the details of the interactions between the key process variables must be provided. In this paper, we present the preliminary results obtained from our efforts to develop such a systematic framework. These pertain to the development of a feedback model of a premixed combustor which is derived using the conservation equations of one-dimensional flow dynamics and a fundamentally based flame dynamics model. We show that this feedback model sheds light not only on the thermoacoustic instability behavior, but also provides a way of quantifying the relation between the instability and the physical parameters. A simple numerical example is used to illustrate the accuracy of the proposed model and is compared with experimental results reported in the literature.

---

\* Lecturer at Mechanical Power Engineering Department, Faculty of Mechanical and Electrical Engineering, Tishreen University, Latakia, Syria.

## مقدمة:

تصادف عمليات الاحتراق المستمر في معظم التطبيقات التي تتضمن توليد الطاقة، عمليات التسخين وتوليد القوة الدافعة. فعلى سبيل المثال توجد في الحراقات الصناعية والمنزلية، العنفات الغازية والبخارية ومحركات الدفع النفاثة. وتمتاز هذه العمليات بتذبذبات ضغط ذات تأثير كبير على أداء منظومة الاحتراق، ولذلك فإن هذه التذبذبات تكون غير مرغوبة في معظم الحالات لأنها تقود إلى اهتزازات متزايدة ينتج عنها مستويات عالية من الضجيج الصوتي، معدلات حرق عالية؛ وربما انصهار بعض مكونات منظومة الاحتراق وبالتالي إخفاق عملها.

لذلك فإن ظاهرة عدم الاتزان (عدم الاستقرار) الصوتي الحراري thermoacoustic instability التي تنتج بسبب التداخل والتفاعل القائمين ما بين انطلاق الحرارة غير المستقرّ و ما بين تذبذبات الضغط تُعدّ الصفة الديناميكية المميزة لعملية الاحتراق المستمر. فقد لوحظ منذ أوائل القرن التاسع عشر، أن انطلاق الحرارة في حيز محدود يمكن أن ينتج عنها تذبذبات ضغط متعاضمة مع الزمن [1]. وبالرغم من أن العديد من الدراسات التجريبية والتحليلية لهذه الظاهرة قد نفذت خلال السنين السابقة، غير أنها درست مؤخرا بشكل موسع من وجهة نظر التحكم الفعال [2]. لقد بُنيت هذه الدراسات على فكرة تقول بأن الإدخال المناسب للتحكم الفعال قد يساعد في إنجاز احتراق مستقر ذي فعالية عالية و مصحوب بالقليل من تشكل الملوثات. في هذا البحث تم اقتراح نموذج ديناميكي بتغذية عكسية ليوفر الإطار الرياضي اللازم لتحليل خصائص عدم الاستقرار في عملية الاحتراق بالإضافة إلى كونه يفسح المجال مستقبلا أمام تصميم نظام تحكم آلي فعال ومستقر.

ابتداء من عام 1945 [1]، قُدمت العديد من الأبحاث في محاولة لشرح طبيعة التداخل الرنّان resonant interaction في عمليات الاحتراق المستمر. منها معيار ريلي Rayleigh's criterion الذي يزودنا بالشرط الكافي لعدم الاستقرار؛ حيث يعتمد على التكامل بين المركبات المتذبذبة لكل من انطلاق الحرارة والضغط. ونص معيار ريلي هو: "إذا أعطيت الحرارة إلى الغاز عند لحظة التكاثر الأعظمي (لحظة الضغط الأعظمي) أو أخذت منه عند لحظة التمدد الأعظمي (لحظة الضغط الأصغري) فإن التذبذبات سوف تنمو وتتضخم. ومن جهة أخرى إذا أعطيت الحرارة عند لحظة الهبوط الأعظمي للضغط أو أخذت منه عند لحظة التكاثر الأعظمي فإن التذبذبات سوف تُخمد". وقد تم التحقق من معيار ريلي باستخدام ديناميكية الجريان أحادي البعد [3]، تحت افتراضات معينة وحقيقة أن الطاقة في المركبة المتذبذبة تتعاضم بصورة غير مستقرة. واتجهت الافتراضات التي ذكرتها الأدبيات العلمية إلى أبعد من ذلك، حيث تم اقتراح نماذج تحليلية متعددة للحصول على فهم أساسي للآليات المتعددة التي تقود إلى ديناميكية عدم الاتزان [4,5]. غير أن نقطة البداية لمعظم هذه النماذج هي ديناميكية الجريان أحادي البعد مع وجود المصدر الحراري. ومن أجل سهولة المتابعة تم استخدام العديد من الفرضيات البسيطة جدا للحصول على نماذج تفنقر إلى الكثير من الموضوعية [6].

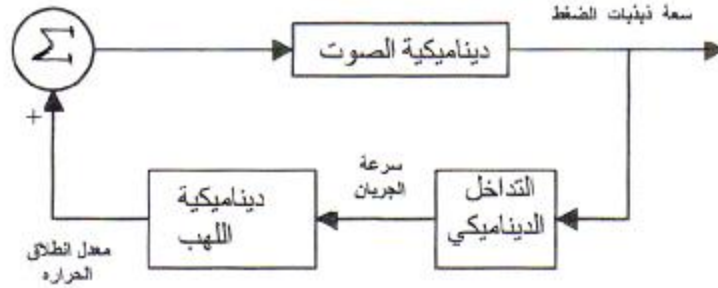
علاوة على ذلك فإن معظم هذه الدراسات تفنقر إلى نموذج مبني بشكل أساسي على ديناميكية اللهب؛ التي تمثل جزءاً من النموذج الصوتي الحراري العام. إذ إن ظاهرة عدم الاتزان الصوتي الحراري تنشأ بسبب التداخل والتفاعل ما بين ديناميكية الصوت acoustic dynamic وديناميكية اللهب flame dynamic. إن ديناميكية الصوت محددة وموصوفة جيدا من خلال معادلة موجة الصوت المعروفة. في حين تشير الأبحاث السابقة إلى استخدام نماذج نصف تجريبية semi-empirical models أو ظاهريّة phenomenological لتوصيف ديناميكية انطلاق

الحرارة المتذبذبة الناتجة عن التذبذب في الجريان وتحديدها. في الحقيقة ما هو مفقود وما تفتقر إليه الأبحاث السابقة هو معالجة واقعية ومتوازنة لكامل عملية الاحتراق، من حيث تتم نمذجة التأثيرات المسيطرة للتفاعلات الأولية المهمة في عملية الاحتراق، ومن ثم تؤخذ في الحسبان تأثيرات كامل التفاعلات الموجودة، حيث إن كلاً منها يمثل أثراً فيزيائياً داخلياً، ويساهم في تفسير ظاهرة عدم الاتزان. هذا، بشكل دقيق، الهدف من إسهامنا في هذا الحقل.

في هذا المقال تم اقتراح إطار عمل نظامي لإيضاح آلية عدم الاتزان، وذلك من خلال دراسة الآليات الأولية وتفاعلاتها الرنينية التي توصف عملية الاحتراق بشكل كامل. يتم التوصيف بالاستخدام المباشر لمعادلات الحفظ الأساسية لجريان أحادي البعد. وكذلك يتم اشتقاق نموذج تغذية عكسية بعدي لعملية الاحتراق يوضح السلوك الديناميكي المسيطر ويوفر تفسيراً لماهية التغذية العكسية الجوهرية المسببة لعدم الاتزان في منظومة الاحتراق من خلال إيضاح التداخل والتزواج ما بين ديناميكية اللهب والديناميكية الصوتية. ومن ثم تمت مناقشة خصائص عدم الاستقرار. وأخيراً قدم مثال عددي يوضح دقة النموذج المقترح وقدرته على توقع حدوث عدم الاستقرار في منظومة الاحتراق.

## النموذج الديناميكي لنظام الاحتراق

في هذه الفقرة طُور نموذج ديناميكي يصوّر بشكل جيد الخصائص المسيطرة التي تُسهم في عدم استقرار الاحتراق. وقد تم التركيز على معادلات الحفظ الواسفة لديناميكية الغاز المتفاعل reactive gas أحادي البعد لإظهار الملامح الأساسية لعملية الاحتراق. وبين الشكل (1) مخطط صندوقي لعملية الاحتراق.



الشكل (1): مخطط مبسط لنظام الاحتراق

## ديناميكية الجريان أحادي البعد

يمكننا وصف ديناميكية الغاز أحادي البعد باستخدام معادلات الحفظ وبافتراض أن عمليات النقل مهمة وأن الغاز كامل، كما يلي:

$$\frac{Dr}{Dt} + r \tilde{N} \cdot u = 0 \quad (1)$$

$$r \frac{Du}{Dt} + \frac{\nabla p}{\nabla x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{Dp}{Dt} + gp \frac{\partial u}{\partial x} = (g - 1)q \quad (3)$$

إذ إنّ:

t تمثل الزمن، x تمثل المكان، r تمثل الكتلة النوعية، u تمثل السرعة، p تمثل الضغط، q هي كمية الحرارة المنطلقة منسوبة إلى وحدة الحجم، D/Dt المؤثر الاشتقاقي.

يفصل المتحولات في المعادلات السابقة إلى مركبتين إحداها وسطية mean مستقلة عن الزمن والأخرى متذبذبة perturbation مرتبطة مع الزمن، كما توضح المعادلة التالية من أجل متحول الضغط:

$$p(x, t) = \bar{p}(x) + p\phi(x, t)$$

إذ إنّ كلاً من المتحولات u، q و r يمكن أن نكتب له علاقة مشابهة للمعادلة السابقة.

وبافتراض أن المركبات الوسطية للجريان ثابتة القيمة، وأن المركبات المتذبذبة تتغير بشكل طفيف حول القيم الوسطية الثابتة، نحصل على المعادلات الحاكمة للمركبات المتذبذبة بعد تعويض كل متحول بمركبتيه في المعادلات (1)، (2) و (3) لنجد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p\phi}{\partial t} + u \frac{\partial p\phi}{\partial x} + u\phi \frac{d\bar{p}}{dx} + gp \frac{\partial u\phi}{\partial x} + gp \frac{d\bar{u}}{dx} &= (g - 1)q\phi \\ r \frac{\partial u\phi}{\partial t} + r u \frac{\partial u\phi}{\partial x} + r u\phi \frac{d\bar{u}}{dx} + r \phi \frac{d\bar{u}}{dx} + \frac{\partial p\phi}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

وباعتبار أن منطقة اللهب تتوضع في نطاق ضيق جداً لأن اللهب صفائحي، يمكننا التعبير عن معدل انطلاق الحرارة بالشكل التالي:

$$(4) \quad q(x, t) = d(x - x_0)q_0(t)$$

حيث،  $q_0$  تمثل معدل انطلاق الحرارة منسوباً إلى وحدة المساحة،  $d(\cdot)$  هو التابع اللانبضي Dirac delta function

يمكننا أن نلاحظ أن المركبات الوسطية للجريان تتعرض قيمها لقفزة بسبب تأثير المركبة الوسطية للحرارة [7]، عند الموضع  $x = x_0$  (أي في المكان الذي تتم فيه إضافة الحرارة نتيجة لعملية الاحتراق) بينما تبقى قيمها ثابتة في أي مكان آخر من الحارق. أما بالنسبة لمركبة الضغط الوسطية فإن التغير في قيمتها يكون صغيراً جداً على طول الحارق، مقارنة مع المركبة الوسطية لسرعة الجريان. كما سنركز اهتمامنا على الحالة التي يمكن فيها إهمال المركبة الوسطية للحرارة (في هذه الحالة تصبح العلاقات أبسط، ولكن حتى في الحالة المعقدة يمكن اتباع تحليل مشابه). هذا يعني أنّ كلاً من  $\bar{u}(x)$ ،  $\bar{c}(x)$  و  $\bar{r}(x)$  ستكون ثابتة على طول الحارق، وبذا يمكننا تبسيط المعادلات الحاكمة لتأخذ الشكل التالي:

$$(5) \quad \frac{\partial^2 p\phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p\phi}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^2 p\phi}{\partial x \partial t} = (g - 1) \frac{\partial q\phi}{\partial t} + u \frac{\partial q\phi}{\partial x}$$

$$(6) \quad \frac{\partial p\phi}{\partial t} + u \frac{\partial p\phi}{\partial x} + gp \frac{\partial u\phi}{\partial x} = (g - 1)q\phi$$

تمثل المعادلتان (5) و (6) الخصائص الديناميكية الصوتية المسيطرة في الحارق. في الفقرة التالية، انطلاقاً من المبادئ الأولية، نشق العلاقة التي تربط بين المركبة المتذبذبة لكل من السرعة  $u\phi$  وانطلاق الحرارة  $q\phi$ ، في

موضع اللهب من أجل نموذج لهب مسبق الخلط. باشتقاق هذه العلاقة تُحدد ديناميكية اللهب في عملية الاحتراق بشكل كامل.

## نموذج التغذية العكسية البعدي المحدود

### نموذج ديناميكية اللهب

إن نموذج ديناميكية اللهب يصف استجابة مقدمة اللهب إلى التذبذب في السرعة الصوتية، حيث أن انتشار الموجة الصوتية (الضغط) في الحارق يُزيد من التغير في حقل سرعة الجريان المحورية وهذا يسبب تحرك مقدمة اللهب استجابة للموجة الصوتية.

يرتبط انطلاق الحرارة غير المستقر من اللهب بشكل ديناميكي مع المركبة المتذبذبة لسرعة الجريان، وتكون سرعة الاحتراق المحلية  $s_u$  (سرعة انتشار اللهب بشكل عمودي على سطحه) بالنسبة إلى الخليط القابل للاشتعال للهب صفائحي مسبق الخلط تقريباً ثابتة، لذا فإن كمية الحرارة المتحررة تتناسب طردياً مع سطح اللهب، أي أن:

$$Q(t) = r s_u D_h A(t) \quad (7)$$

إذ إن  $D_h$  تمثل حرارة التفاعل heat of reaction منسوبة إلى واحدة الكتلة من الخليط،  $A(t)$  المركبة اللحظية لمساحة سطح اللهب instantaneous flame surface area

وفي الحالة التي يكون فيها الجريان خالياً من الجسيمات ذات البنى كبيرة الحجم التي تغلف سطح اللهب فإنه يمكننا وصف سطح اللهب بتابع وحيد القيمة  $X(r, t)$ ، وباعتبار أن اللهب متمائل محورياً فإن  $X$  تمثل الموضع المحوري لسطح اللهب كتابع لنصف القطر  $r$  والزمن  $t$ . من أجل مساحة سطح اللهب اللحظية يمكننا أن نكتب العلاقة التالية:

$$A(t) = 2\pi \int_0^{r_d} X(r, t) dr \quad (8)$$

وبما أن الجريان صفائحي تكون  $s_u$  صغيرة مقارنة بمركبة السرعة الوسطية للجريان  $\bar{u}$ ، وبافتراض أن  $u_0 > s_u$ ، حيث إن  $u_0(t)$  تمثل سرعة الجريان اللحظية عندما  $x = x_0$  (موضع اللهب)، وتكون منتظمة التوزيع بالنسبة إلى  $[8]$   $r$ ، و بإهمال التمدد الحجمي volumetric expansion للجريان في جانب المتفاعلات، و باعتبار  $X(r, t)$  تمثل المركبة المتذبذبة للموضع المحوري لسطح اللهب في الزمن  $t$  ونصف القطر  $r$ ، و  $u_0(t)$  تمثل المركبة المتذبذبة لـ  $u_0(t)$  يمكننا صياغة العلاقة الحاكمة للموضع المحوري اللحظي لسطح اللهب بالشكل التالي:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = s_u \frac{\partial X}{\partial r} + u_0(t) \quad (9)$$

والشرطيان الحديان هما:

$$X\left(\frac{d}{2}, t\right) = 0 \quad t, \quad X(r, 0) = 0 \quad r$$

$d$  يمثل قطر قاعدة اللهب

من المعادلتين (7, 8) نجد:

$$Q(t) = 2\pi r s_u D_h \int_0^{r_d} X(r, t) dr = k \int_0^{r_d} X(r, t) dr \quad (10)$$

إذ إنَّ

$$k=2pr s_u Dh_r$$

بمفاضلة المعادلة (10) بالنسبة إلى الزمن وباستخدام المعادلة (9) والشروطين الحديين لمساحة سطح اللهب نحصل على العلاقة بين معدل انطلاق الحرارة غير المستقر والمركبة المتذبذبة للسرعة اللحظية:

$$(11) \quad \dot{Q}\phi = -2 \frac{s_u}{r_d} Q\phi + kr_d u\phi$$

ويمكننا التعبير عن نموذج اللهب الصفائحي بالمعادلة التفاضلية التالية:

$$(12) \quad \dot{Q}\phi + b_1 Q\phi = b_0 u\phi$$

$$\text{حيث إن:} \quad b_1 = \frac{2s_u}{r_d} \quad \text{و} \quad b_0 = kr_d = 2pr s_u r_d Dh_r$$

$r_d$  نصف قطر قاعدة اللهب

بما أن تأثيرات الترددات العالية في ديناميكية اللهب تكون مهملة [8]، حيث إنَّ اللهب لا يستطيع أن يستجيب لمثل هذه الترددات، لذا يمكننا أن نفترض أن  $u\phi(t)$  تتغير بشكل بطيء. وإذا كان اللهب يرتكز على حامل لهب مُتقب له القطر  $D$  وعدد الثقوب  $n_f$  كما في المرجع [9]، الذي ستم المقارنة به، فإن معدل انطلاق الحرارة منسوبا إلى واحدة المساحة يعطى بالعلاقة:

$$q\phi = \frac{4n_f}{pD^2} Q\phi$$

ولذا فإن العلاقة الديناميكية بين  $q\phi$  و  $u\phi$  هي من الشكل:

$$(13) \quad \dot{q}\phi + b_1 q\phi = b_2 u\phi$$

حيث إن:

$$b_2 = \frac{2s_u}{r_d} \left(\frac{d}{D}\right)^2 n_f r Dh_r$$

$d=2r_d$  قطر قاعدة اللهب

تمثل المعادلة (13) النموذج الديناميكي للهب الذي يصف العلاقة الديناميكية بين المركبتين المتذبذبتين لكل من سرعة الجريان ومعدل انطلاق الحرارة  $q\phi$  و  $u\phi$  إنَّ ما يجب أن يؤخذ بالحسبان هو أن قطر قاعدة اللهب المتذبذب يكون إلى حد ما أكبر من قطر حامل اللهب وذلك بسبب تباعد خطوط التيار. في المثال المقدم في هذا المقال سنفترض أن  $d=1.4d_p$ ، حيث إنَّ  $d_p$  يمثل قطر الثقب.

تشير المعادلة (13) إلى أن هنالك تأخراً زمنياً من الدرجة الأولى بين معدل انطلاق الحرارة وسرعة الجريان، ويمكن ربط هذه المعادلة مع النموذج التقليدي (n-t) [2]، وذلك بأخذ تحويل فورييه لنموذج اللهب المعبر عنه بالمعادلة (13) فنجد:

$$(14) \quad \dot{q}\phi = n\dot{u}\phi^{-j\omega t}$$

إذ إنَّ:

$$n = \frac{b_2}{(w^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$t = \frac{1}{w} \tan^{-1} \left( \frac{w}{b_1} \right)$$

و تشير n إلى دليل التداخل، الذي يصف شدة التداخل بين التذبذب في معدل انطلاق الحرارة والسرعة، و t إلى التأخر الزمني. إن النموذج الديناميكي للهب المقترح في هذا المقال قابل للتطبيق على مجال واسع من الترددات، ويُظهر بوضوح اعتماد استجابة الهب على بارامترات الاحتراق  $b_1$  و  $b_2$  و التردد الموافق لهما  $w$ .

### النموذج الديناميكي للصوت

يمكننا التعبير عن حقل الضغط الصوتي بسلسلة من الصيغ النظامية normal modes ينتج عنها مجموعة من المعادلات التفاضلية العادية ODEs التي تصف التطور الآني لكل صيغة من الصيغ الصوتية. فيفصل المتحولات في نظام الاحتراق إلى زمانية ومكانية حسب طريقة جالركين [10] Galerkin يمكننا أن نعبر عن مركبة الضغط المتذبذبة باستخدام التوابع المستقلة خطيا  $y_i(x)$  كما يلي:

$$p(x, t) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i y_i(x) h_i(t) \quad (15)$$

عند غياب المصدر الحراري فإن  $q(x, t) = 0$ ، وتتحول المعادلات (5) و (6) إلى المعادلة التقليدية للموجة التي يمكن حلها بشكل تحليلي دقيق اعتمادا على الصيغ السائدة، ولذلك أختيرت توابع الأساس  $y_i$  من الشكل:

$$y_i(x) = \sin(k_i x + f_{i0}) \quad (16)$$

إذ إن  $k_i$  و  $f_{i0}$  تحدد من الشروط الحدية وتكون متوافقة مع أشكال الصيغ المكانية، و  $k_i$  يمثل أعداد الموجة الموجودة في الحارق، ومن المعروف أن شكل الصيغ المكانية لا يتغير بشكل ملحوظ مع وجود المصدر الحراري [11]. بالاعتماد على ذلك وبافتراض أن المعادلات (5) و (6) مستمرة يمكننا فصل المعادلات التفاضلية إلى معادلات تابعة للزمن وأخرى تابعة للمكان، وبذا فإن المعادلة (15) يمكن كتابتها بشكل شعاعي كما يلي:

$$p(x, t) = \bar{y}^T(x) h(t) \quad (17)$$

إذ إن  $\bar{y}^T$  تمثل منقول الشعاع،

باستبدال المعادلة (17) في (5) نجد:

$$\bar{y}^T \left( -c^2 \frac{d^2 \bar{y}^T}{dx^2} h(t) + 2u p \frac{d \bar{y}^T}{dx} h(t) \right) = (g - 1) \left( \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

إن المعادلة (16) تقتضي ضمنا أن:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = -K \bar{y} \quad (18)$$

حيث K هي المصفوفة القطرية والتي عناصرها القطرية هي  $k_1, \dots, k_n$ . إن ترددات توابع الأساس  $k_i$  المعبر عنها في المعادلة (16) تمثل أعداد موجة لمعادلة الموجة التقليدية. بالاستعانة بالمعادلتين (18) و (4) يمكننا أن نكتب المعادلة الحاكمة بالشكل التالي:

$$\bar{M} \ddot{y} + \bar{D} \dot{y} + \bar{W} y = g_0 E^{-1} \frac{\partial q}{\partial x}(x_0) - \bar{u} \frac{dy(x_0)}{dx} q \quad (19)$$

حيث أن:



$$a_0 = \frac{(g-1)}{gp}$$

$$E = \int_0^L y^T dx \quad \text{و } A^{-1} \text{ تمثل مقلوب مصفوفة،}$$

$$D = (EK)^{-1} \left[ y^T(L) - y^T(0) \right]$$

بمأن  $K$  تمثل مصفوفة قطرية فإن  $W = \bar{c}K$  أيضا تمثل مصفوفة قطرية. بشكل مشابه لما سبق يمكننا تبسيط المعادلة (6) باستخدام المعادلة (17) فنجد:

$$u(x,t) = \frac{1}{g} \frac{dy^T}{dx} K^{-2} h(x) - \frac{\bar{u}}{g} y^T h + a_0 q_0 H(x - x_0)$$

إذ إن  $H(\cdot)$  يمثل تابع الفقرة الأحادية Heaviside function ويأخذ قيمه كما يلي:

$$H(z) = 1 \text{ for } z \geq 0 \quad \text{and} \quad H(z) = 0 \text{ for } z < 0$$

بما أن الجريان قبل اللهب (في جانب الخليط القابل للاشتعال) وبعده (في جانب نواتج الاحتراق) يؤثر في ديناميكية اللهب، عندئذ يمكننا أن نسلم بأن لسرعة الجريان اللحظية  $u(x,t)$  قيمه وسطية في موضع اللهب عندما  $x = x_0$  معطاة بالمعادلة التالية:

$$(20) \quad u(x_0, t) = \frac{1}{g} \frac{dy^T}{dx}(x_0) K^{-2} h(t) - \frac{\bar{u}}{g} y^T(x_0) h(t) + q_0 q_0(t)$$

حيث  $q_0(t)$  (0,1) وقد أخذت قيمتها 0.5 في المثال المقدم في هذا البحث.

تمثل المعادلتان (19) و (20) الديناميكا الصوتية البعدية الأولية المحدودة للحارق.

### نموذج التغذية العكسية

إن المركبات اللحظية لديناميكية الجريان حُددت بشكل كامل من خلال المعادلات (13)، (19) و (20) التي

تمت مناقشتها في الفقرات السابقة. إذا عرفنا  $\tilde{u}(x,t)$  بالعلاقة التالية:

$$(21) \quad \tilde{u}(x,t) = u(x,t) - q_0 q_0(t)$$

وباستخدام المعادلة (20) يمكن كتابة  $\tilde{u}(x,t)$  بالشكل التالي:

$$(22) \quad \tilde{u}(x,t) = \frac{1}{g} \frac{dy^T}{dx}(x_0) K^{-2} h(t) - \frac{\bar{u}}{g} y^T(x_0) h(t)$$

كما أن نموذج اللهب الموصوف بالمعادلة (13) يمكن كتابته بدلالة  $\tilde{u}(x,t)$ :

$$(23) \quad \tilde{u}(x,t) + b_3 q_0(t) = b_2 \tilde{u}(x,t)$$

$$b_3 = b_1 - q_0 b_2 \quad \text{إذ إن:}$$

إن تعريف  $\tilde{u}(x,t)$  بالعلاقة (21) يمكن تفسيرها على أنها السرعة الفعالة effective velocity التي تُسهم في معدل

انطلاق الحرارة وهي إلى حد ما أصغر من السرعة الفعلية للجريان  $u(x,t)$ .

إن المعادلات (19)، (22) و (23) تصف السلوك الفعلي لديناميكية الحارق، ويمكن التعبير عنها بشكل أكثر دقة بواسطة معادلة تفاضلية من المرتبة (2n+1)، إذ إن n تمثل عدد الصيغ السائدة والمنتشرة في الحارق. بتعريف الشعاعين  $\tilde{b}$  و  $\tilde{c}$  كما يلي:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &= \frac{1}{g} K^{-2} \frac{dy}{dx}(x_0) & \tilde{b} &= g a_0 E^{-1} y(x_0) \\ \tilde{c}_u &= \frac{1}{g} \bar{u} y(x_0) & \tilde{b}_u &= g a_0 E^{-1} \bar{u} \frac{dy}{dx}(x_0) \end{aligned} \quad (24)$$

يمكننا أن نحصل على نموذج الاحتراق البعدي المحدود التالي:

$$W \dot{h} = [\tilde{b} s - \tilde{b}_u] q \phi \quad (25)$$

$$\tilde{u} \dot{\phi} = [\tilde{c} s - \tilde{c}_u]^T h \quad \dot{\phi} = -b_3 q \phi + b_2 \tilde{u} \phi \quad (26)$$

تلخص المعادلات (25) و (26) التداخل والتأثير المتبادلين بين الضغط ومعدل انطلاق الحرارة في إطار الزمن للحالة العامة التي يوجد فيها صيغ متعددة في الحارق، وتمثل بشكل تخطيطي من خلال المخطط الصندوقي المبين في الشكل (3). تصف المعادلة (25) كيفية تأثير معدل انطلاق الحرارة في مركبات الضغط، بينما تصف المعادلة (26) كيفية تأثير الحقل الصوتي في معدل انطلاق الحرارة. وتشير الأشعة  $\tilde{b}_u$  و  $\tilde{c}_u$  بالإضافة إلى المصفوف D إلى تأثير الجريان الوسطي في سلوكية الجملة، كما يمثل s عامل الاشتقاق الزمني d/dt. النقطة الأساسية والجديرة بالملاحظة، التي يتضمنها بناء نموذج التغذية بين ديناميكية اللهب وديناميكية الصوت، هي أن ديناميكية اللهب تتعلق بمعدل انطلاق الحرارة الكلي والسرعة الفعالة الإجمالية. وهذا يجعل سعة ذبذبات الضغط  $h_i$  معتمده على كامل المركبات  $h_1 \dots h_n$  المنتشرة في الحارق وبذلك يحصل تداخل وتأثير متبادل بين الصيغ المتعددة ذات الترددات المختلفة.

## خصائص الاستقرار

يمكننا دراسة خصائص الاستقرار stability properties لمنظومة الاحتراق من خلال النموذج المقترح في المعادلات (25) و (26)، وذلك باستعمال إحدى طرق دراسة الاستقرار وتطبيقها بشكل مباشر لنحدد إذا كانت الجملة مستقرة أو غير مستقرة. مثلاً، من أجل الحالة البسيطة التي يوجد فيها صيغة وحيدة في الحارق يمكننا كتابة

هذه المعادلات باستخدام عامل الاشتقاق الزمني (كما في الشكل التالي):

$$h(t) = \frac{\dot{e}}{\dot{e}s^2 + w^2} \tilde{b} q \phi(t)$$

$$q \phi(t) = \frac{\dot{e}}{\dot{e}s + b_3} \tilde{c} h(t)$$

أي أن نموذج ديناميكية اللهب والصوت يتم إرجاعه إلى علاقات دخل وخرج، وهذا بدوره يتضمن تغذية عكسية يكون تابع تحويلها في المسار الأمامي  $G_1(s)$  وفي المسار الخلفي  $G_2(s)$  ومعامل الكسب هو b حيث:

$$; \quad G_2(s) = \frac{a_0 b_2 s}{s + b_3} ; \quad b = \frac{dy}{dx}(x_0) y(x_0) \quad G_1(s) = \frac{s}{s^2 + w^2}$$

بدراسة المعادلة المميزة characteristic equation لنظام الدارة المغلقة Closed-loop، المبين في الشكل (2)، وبالاعتماد على إشارة  $b$  إذا كانت موجبة أو سالبة يكون هناك عدم استقرار أو استقرار، وهذا ينتج من التطبيق المباشر لطريقة راوس . هارفتز Routh-Hurwitz على المعادلة المميزة:

$$1 - bG_1(s)G_2(s) = 0$$

إذ يحدث عدم الاستقرار في النظام الديناميكي، المبين في الشكل (2)، عندما تحتوي جذور المعادلة المميزة على جزء

$$(27) \quad 1 - b \frac{s}{s^2 + w^2} \frac{sa_0 b_2}{s + b_3} = 0$$

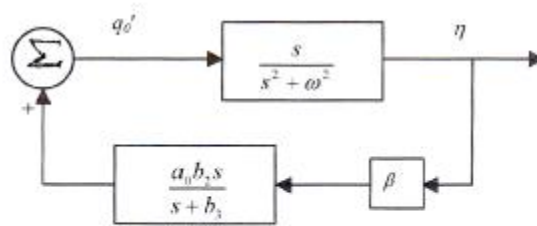
حقيقي موجب. وبتبسيط المعادلة (27) نجد

$$(28) \quad (s^2 + w^2)(s + b_3) - a_0 b_2 b s^2 = 0$$

وبتطبيق طريقة راوس . هارفتز، لدراسة الاستقرار، نجد أن الإشارة تتغير مرتين في مصفوفة راوس . هارفتز إذا تحققت المترابحة التالية:

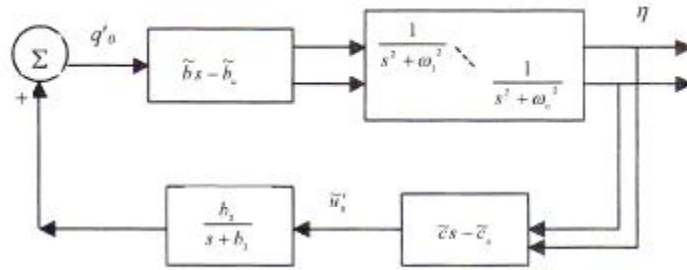
$$w^2(b_3 - a_0 b_2 b) - w^2 b_3 < 0$$

إذا يحدث عدم الاستقرار إذا كان الحد  $a_0 b_2 b > 0$ . حيث أن البارامتر الصوتي  $a_0$  دوما موجب ويمثل مقلوب المركبة الوسطية للضغط  $\bar{p}$ ، وكذلك يكون البارامتر  $b_2$  موجب لأنه يمثل خواص اللهب، وهو يتناسب مع حرارة التفاعل منسوبة إلى وحدة الكتلة. لذلك فإن عدم الاستقرار يحدث إذا كانت  $b > 0$ ، إذ أنها تعتمد على شكل الصيغة الصوتية وعلى موضع اللهب ضمن حجرة الاحتراق (الحارق). ويشكل مماثل نجد أن الاستقرار فقط يحدث إذا كانت  $b < 0$ . أي أن هذا النموذج يمكننا من تحديد خواص الاستقرار بشكل جيد ويكون على توافق مع معيار ريلي. ويوضح الشكل (2) نموذج التغذية العكسية في الحارق من أجل صيغة وحيدة



الشكل (2): نموذج التغذية العكسية لعملية الاحتراق في حال وجود صيغة وحيدة في الحارق

أيضا يمكننا اتباع الطريقة نفسها لدراسة الاستقرار في حال وجود صيغ متعددة في الحارق، ويبين الشكل (3) نموذج التغذية العكسية في حالة وجود أكثر من صيغة.



الشكل (3): نموذج التغذية العكسية لعملية الاحتراق بوجود صيغ متعددة في الحارق

### تطبيق النموذج المقترح على حارق صفائحي مسبق الخلط

لنأخذ حارقاً صفائحيًا مسبق الخلط، ولنقم بدراسته من خلال تطبيق النموذج الديناميكي المقترح في هذا البحث عليه.

هذا وقد تم اختيار بنية الحارق وشروط التشغيل لتكون مماثلة لتلك التي في المرجع [9]. بحيث نتمكن من إجراء عملية المقارنة ما بين النتائج المحصلة تجريبياً في هذا المرجع وتلك المحصلة تحليلياً من النموذج المقترح هنا، حتى نتمكن من تقييم أداء نتائج هذا النموذج ودقته.

طول الحارق (غرفة الاحتراق) 0.7 m واللهب يتمركز على بعد 0.17 m من نقطة دخول الخليط إلى الحارق، قطر الحارق 0.034 m وحامل اللهب عبارة عن شبكة معدنية تحتوي على 40 ثقباً، كل منها بقطر 1.7 mm. الحارق مفتوح من كلا الطرفين، أي أن كلا من مدخل الحارق ومخرجة مكان لبطن موجة الضغط pressure antinode، ومركز الحارق مكان لعقدة الضغط pressure node. بافتراض أن الغاز كامل و  $g=1.4$  والضغط الجوي  $\bar{p}=1 \text{ atm}$ ، درجة حرارة الجزء البارد (الجزء من الحارق الذي يجري فيه الخليط القابل للاشتعال)  $T_c=308 \text{ K}$  و درجة حرارة الجزء الساخن (الجزء من الحارق الذي تجري فيه نواتج الاحتراق)  $T_h=629 \text{ K}$ ، نأخذ سرعة الصوت ثابتة وتساوي  $c=351 \text{ m/s}$  والكتلة النوعية  $\rho=1.15 \text{ kg/m}^3$  وذلك باستخدام الطول الفعال effective length للحارق الذي يأخذ بالحسبان الزيادة في سرعة الصوت في الجزء الحار (أي أنه يأخذ بالحسبان تأثير المركبة الوسطية للحرارة والتي تسبب حصول قفزه في قيم المركبات في موضع اللهب). باستخدام هذه الشروط تم تحديد بارامترات الصوت  $w_1, k_1, a_0$  وشكل الصيغة  $y_1(x)$ ، وذلك من أجل صيغة وحيدة مسيطرة في الحارق ومسؤولة عن عدم الاستقرار (الصيغة الأساسية).

حُسبت بارامترات اللهب  $b_1, b_2$  باعتبار أن حرارة التفاعل هي  $Dh_f=1.795 \times 10^6 \text{ J/kg}$ ، تمثل هذه القيمة حرارة التفاعل للغاز المنزلي (البوتان 70% والبروبان 30%) عندما يحترق مع الهواء بنسبة مكافئة equivalence ratio 0.8. أيضاً أخذت قيمة سرعة الاحتراق 0.3 m/s وقيمة السرعة الوسطية للجريان 0.51 m/s وهي تطابق لعدد ماخ  $1.45 \times 10^{-3}$ .

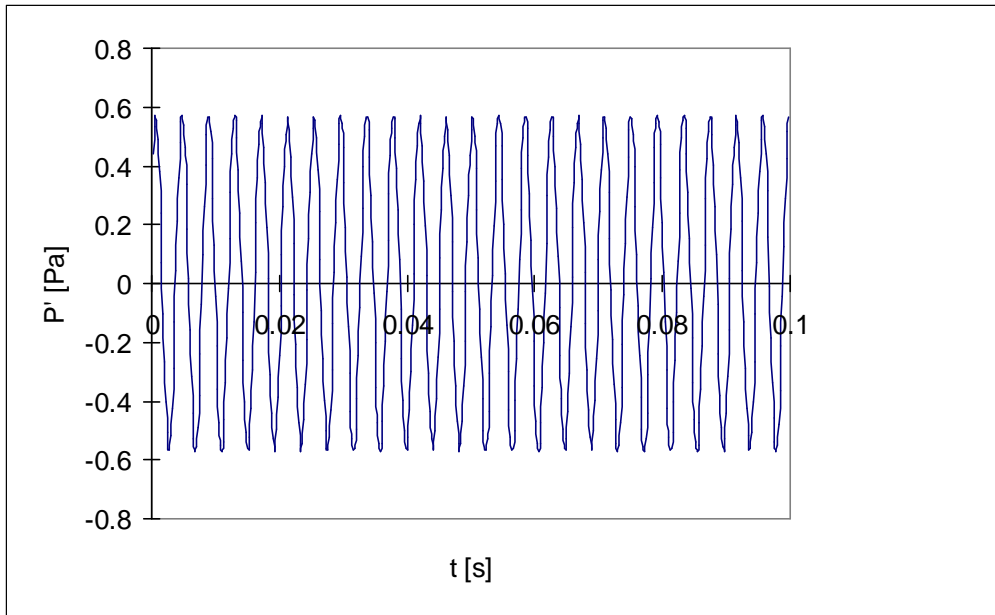
لقد أخذت الشروط الابتدائية لتذبذبات الضغط  $p(x,0) = \sin k_1 x$  و  $\phi(x,0) = w_1 \sin k_1 x$  . باستخدام المعطيات السابقة نقوم بمكاملة المعادلات (25) و (26) عدديا من خلال برنامج رياضي يستخدم طريقة Range-Kutta، ومن ثم نوجد استجابتي كل من الضغط ومعدل انطلاق الحرارة مع الزمن.

ففي الحالة التي ليس فيها إضافة حرارة (أي ليس هنالك عملية احتراق) تكون ذبذبات الضغط ثابتة مع الزمن كما هو موضح بالشكل (4)، وتساوي سعتها الضجيج القادم من الوسط المحيط، لأنها تكون موجودة في الحارق حتى في الظروف الطبيعية، ومن ثم فإن سرعة نمو هذه الذبذبات وتعاضمها هو صفر، في حين تكون قيمة التردد قريبة من التردد الطبيعي للأنبوب 241 Hz.

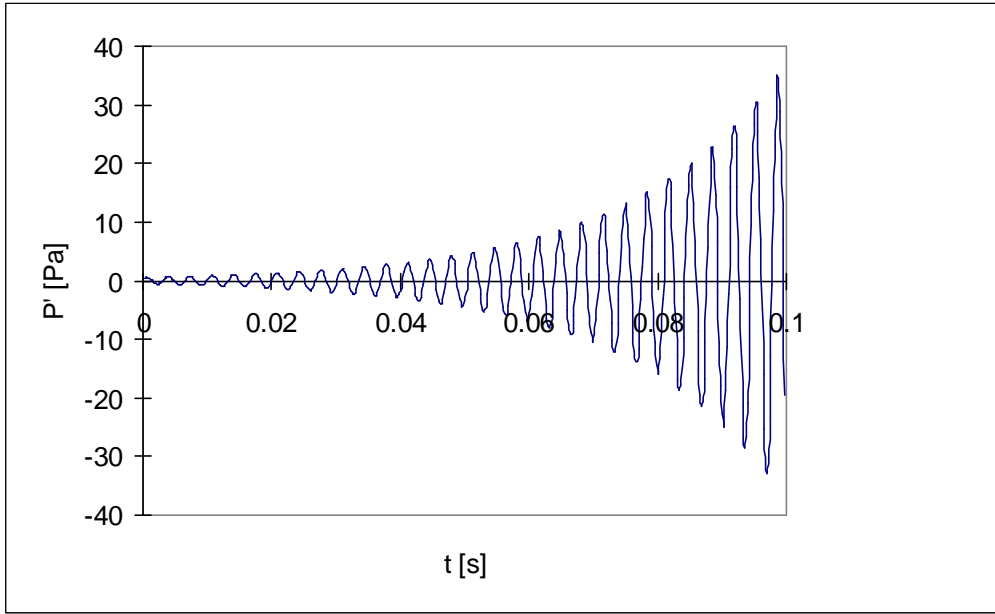
في الحالة التي يتم فيها إضافة الحرارة تقوم المركبة المتذبذبة لانطلاق الحرارة بتغذية ذبذبات الضغط في الحارق مما يؤدي إلى نموها وتعاضمها. ويشير الحل العددي للنموذج المقترح إلى تنامي ذبذبات الضغط مع الزمن الشكل (5)، إذ أن معدل سرعة نموها growth rate هو  $a=42 \text{ 1/s}$  والتردد حوالي  $w=301 \text{ Hz}$  وتمثل هذه القيمة التردد الموافق للصيغة الأساسية fundamental mode في الحارق. في حين تبين القياسات التجريبية أن قيمة التردد  $w=306 \text{ Hz}$  ومعدل سرعة النمو  $a=44 \text{ 1/s}$ .

أيضا يبين الشكل (6) تغير المركبة المتذبذبة لانطلاق الحرارة مع الزمن. كما تم رسم قيمة الجداء  $p\phi$ ، الذي يمثل معيار ريلي لتحديد الاستقرار، كتابع للزمن ويبين الشكل (7) أن قيمة هذا الجداء موجبة دوما، أي أن هنالك عدم استقرار في الحارق وهذا يثبت صحة معيار ريلي.

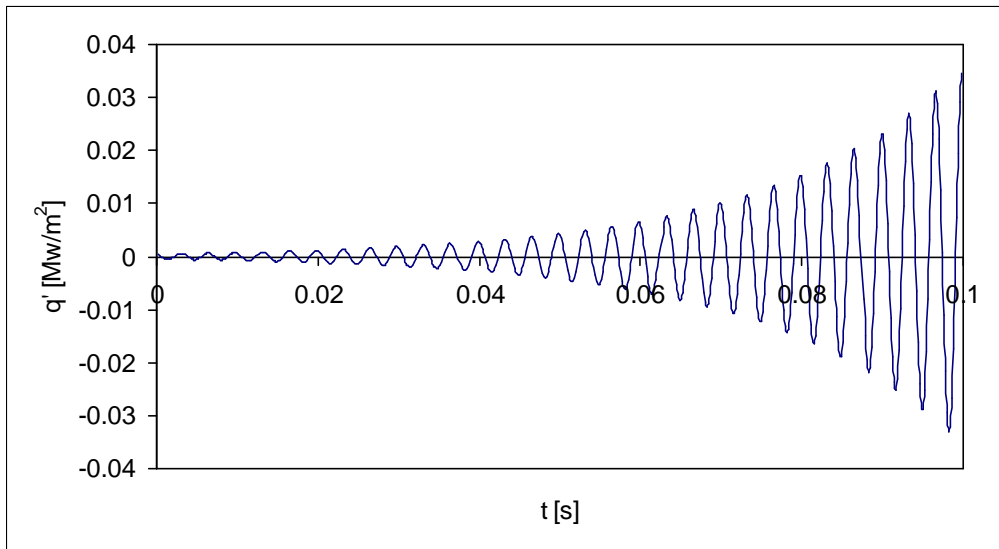
هذا التوافق الجيد بين النتائج التجريبية ونتائج الحل العددي للنموذج المقترح يثبت دقة هذا النموذج ومن ثم إمكانية استخدامه لتوقع حدوث ظاهرة عدم الاتزان الصوتي الحراري في منظومة الاحتراق وتحديد التردد المسؤول عن حدوثها وسرعة نموها. وبناء على هذه المعطيات يمكن تصميم نظام التحكم القادر على تلافي حدوث هذه الظاهرة وتحقيق استقرار عمل منظومة الاحتراق.



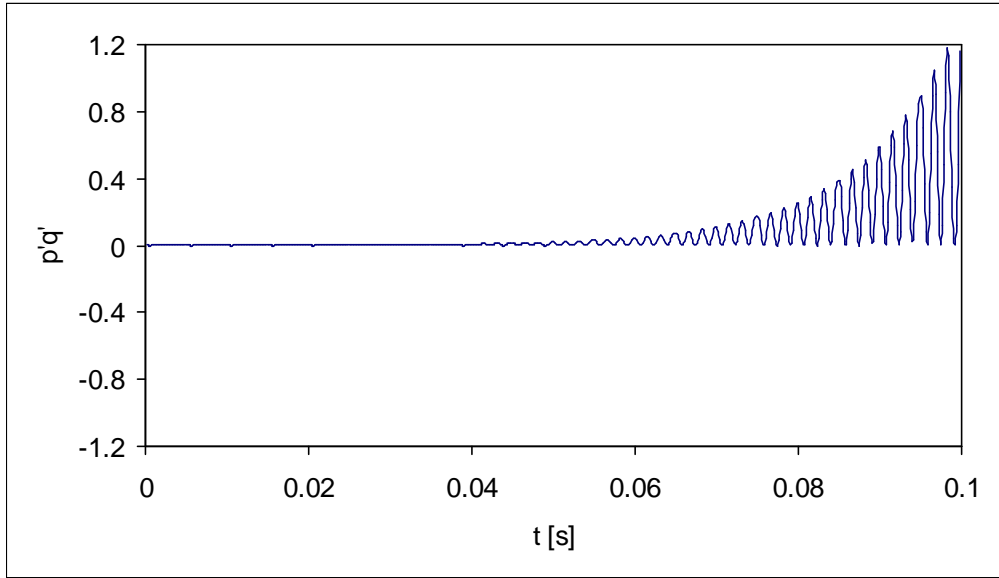
الشكل (4): يبين ثبات سعة ذبذبات الضغط المنتشرة في الحارق مع الزمن في حال غياب المصدر الحراري



الشكل (5): يبين نموذبذبات الضغط وتعاظمها مع الزمن (حالة عدم الاستقرار) في الحارق الصفائحي مسبق الخلط عندما يتوضع اللهب على مسافة مقدارها 0.17 m من مدخل الحارق.



الشكل (6): يبين تغير معدل انطلاق الحرارة غير المستقر مع الزمن في الحارق الصفائحي مسبق الخلط عندما يتوضع اللهب على مسافة مقدارها 0.17 m من مدخل الحارق.



الشكل (7): يبين أن الجداء  $p(t)$  موجب في حالة عدم الاستقرار وهذا يتفق مع معيار ريلي

## ملاحظات استنتاجية

إن ظاهرة عدم الاتزان الصوتي الحراري التي تحدث في نظم الاحتراق معروفه جيدا منذ أكثر من مئتي عام. ولكن استخدام التحكم الآلي لضبط هذه الظاهرة نال اهتماما كبيرا منذ عام 1980. في هذا البحث تم إدخال نموذج التغذية العكسية الذي يؤمن التفسير النظري لظاهرة عدم الاتزان الصوتي الحراري. نقطة البداية لتطوير هذا النموذج هي معادلات الحفظ الأساسية لديناميكية الجريان أحادي البعد ونموذج ديناميكية اللهب، وقد تبين أن النموذج المقترح يصف بشكل كاف سلوك الرنين الصوتي الحراري. والنتائج التي حصلنا عليها من خلال الحل العددي تثبت وثوقية هذا النموذج ودقته. إذ يمكننا هذا النموذج من توقع حدوث ظاهرة عدم الاستقرار، وتحديد قيمة التردد المسيطر ومعدل سرعة النمو والتعاظم في منظومة الاحتراق، وبالتالي تلافيتها من خلال تصميم نظام التحكم المناسب.

إن النتائج التي توصلنا إليها في هذا البحث تمثل الخطوة الأولى باتجاه تطوير إطار عمل موسع وشامل يأخذ بالحسبان كامل الصفات الديناميكية لعملية الاحتراق. ومن المفيد متابعة هذا البحث، بغية تعميم النموذج الديناميكي المقترح ليأخذ بالحسبان الجريان المضطرب، وإقلال انبعاثات أكاسيد النيتروجين ( $NO_x$ ) التي تلوث البيئة وتخرّب طبقة الأوزون، بالإضافة إلى تأثير عدم الاستقرار الدوامي والعديد من خصائص اللهب المعقدة كلها تبقى بحاجة لدراسة واستقصاء من قبل الباحثين.

.....

1. Rayleigh, J.W.S., 1945 – The Theory of Sound, Vol.2, Dover, New York.
2. McManus, K. R., Poinso, T., and Candel, S. M., 1993 - A Review of Active Control of Combustion Instabilities. Progress in Energy and Combustion Science, Vol. 19, No. 1, pp. 1-30.
3. Raun, R. L., Beckstead, M.W., Finlison, J. C., and Brooks, K. P., 1993 - A Review of Rijke Tubes, Rijke Burners and Related Devices. Progress in Energy and Combustion Science, Vol. 19, pp. 313-364.
4. Bloxsidge, G. J., Dowling, A. P., Hooper, N., and Langhorne, P. J. 1989 - Active Control of Reheat Buzz. AIAA Journal, Vol. 26, No.7, July, pp. 783-790.
5. Poinso, T. J., Trounev, A. C., Veynante, D. P., Candel, S. M., and Esposito, E. J. 1987 - Vortex-Driven Acoustically coupled Combustion Instabilities. J. Fluid Mech. Vol. 177, pp. 265-292.
6. Gulati, A., and Mani, R. 1990 - Active Control of Unsteady Combustion-induced Oscillations. In 28th Aerospace Science Meeting, pages AIAA-90-0270, Washington, D.C., January 1990. American Institute of Aeronautics and astronautics.
7. Hubbard, S., and Dowling, A. P. 2001 - Acoustic Resonances of an Industrial Gas Turbine Combustion System. ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 123, pp. 766-773.
8. Fleifil, M., Annaswamy, A. M., Ghomiem, Z., and Ghoniem, A. F. 1996 - Response of Laminar Premixed Flame to Flow Oscillations: A Kinematic Model and Thermoacoustic instability Results. Combustion and Flame, Vol. 106, pp. 487-510.
9. Mahmoud, H., Fleifil, M., Ghomiem, Z. A., and Ghoniem, A. F. 1997 - Active Control of Thermoacoustic instability Using LQR Techniques. Joint Power Generation Conference, ASME, EC-Vol.5, pp. 299-307.
10. Malek-Madani, R. 1998 - Advanced Engineering Mathematics with Mathematica and MATLAB. Addison Wesley Longman, Inc .
11. Culick, F. E. C., Lin, W. H., Jahnke, C. C., and Sterling, J. D. 1991 - Modeling For Active Control of Combustion And Thermally Driven Oscillations. In Proceedings of the American Control Conference, Boston, MA, pp. 2939-2948.