

حل نظرية تيموشينكو بدلالة حل نظرية أويلر – برنولي لانعطاف الجيزان

الدكتور محمود سعيد *

الدكتور نبيل دبانة **

بادية حيدر ***

(قبل للنشر في 2003/11/22)

□ الملخص □

يتضمن هذا البحث مقارنة بين حلول نظريتين لانعطاف الجيزان. الأولى هي نظرية الانعطاف البسيط أو نظرية أويلر – برنولي – نافيه، والثانية هي نظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى أو نظرية جازر تيموشينكو. يكمن الفارق بين هاتين النظريتين، في أن الثانية تأخذ تشوهات القص العرضاني بعين الاعتبار بينما تتجاهلها الأولى.

سنقوم في هذا البحث باستنتاج حلول النظرية الثانية، التي يصعب الحصول عليها مباشرة، من حلول النظرية الأولى وذلك لجائز بفتحة واحدة وعدة حالات للتحميل واستناد النهايات. اعتماداً على هذه العلاقات يمكن للمصمم الحصول على حلول النظرية الثانية انطلاقاً من حلول النظرية التقليدية بقليل من الحسابات ودون اللجوء إلى عمليات حساب وتحليل إنشائي معقدة.

* أستاذ في قسم الهندسة الإنشائية – كلية الهندسة المدنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.
** أستاذ مساعد في قسم الهندسة الإنشائية – كلية الهندسة المدنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.
*** طالبة دراسات عليا في قسم الهندسة الإنشائية – كلية الهندسة المدنية، جامعة تشرين، اللاذقية، سورية.

Timoshenko Beam – Bending Solution in Terms of Euler-Bernoulli Solution

Dr. Mahmoud Said *
Dr. Nabil Debaneh **
Badia Haidar ***

(Accepted 22/11/2003)

□ ABSTRACT □

In this study we compare between the well known Euler-Bernoulli-Navier theory (or classical) and Timoshenko theory. The difference between the two theories is that the latter takes account of transverse shear deformation while the former does not.

This paper presents the deflection and stress resultants of single-span Timoshenko beam, with general loading and boundary conditions, in terms of the corresponding Euler-Bernoulli-Navier beam solutions. These exact relationships allow designers to obtain the bending solutions of Timoshenko beams from the familiar Euler-Bernoulli-Navier solutions without having to perform the more complicated flexural – shear – deformation analysis.

* Professor At Department Of Structural Engineering- Faculty Of Civil Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

** Associate Professor At Department Of Structural Engineering - Faculty Of Civil Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

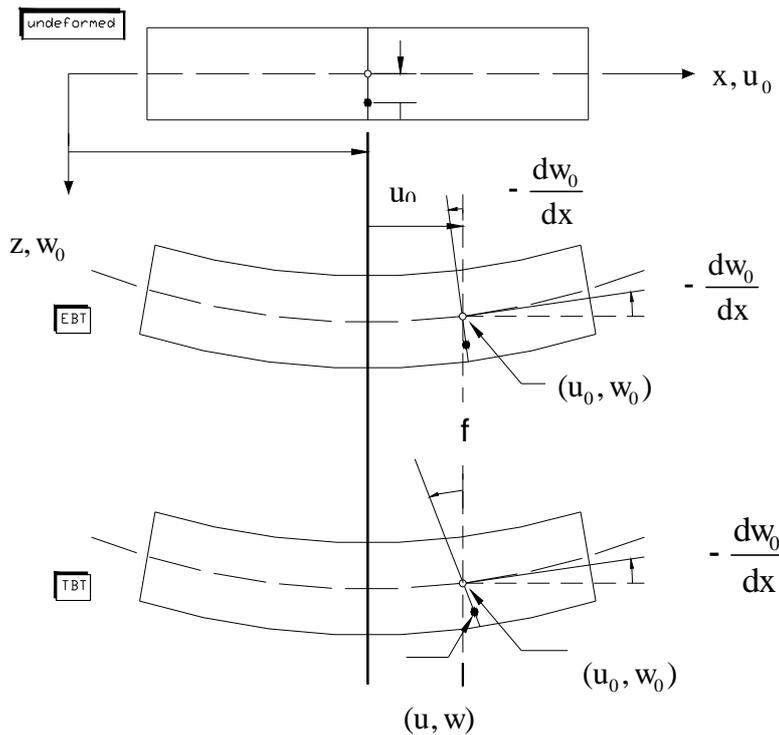
*** Postgraduate Student At Department Of Structural Engineering- Faculty Of Civil Engineering, Tishreen University, Lattakia, Syria.

مقدمة:

نقارن في هذا البحث بين حلول نظريتين لانعطاف الجيزان. الأولى هي نظرية الانعطاف البسيط أو نظرية أويلر-برنولي-نافييه، التي بدأها برنولي في مطلع القرن الثامن عشر وطورها أويلر (1707-1783م) وأكملها نافيه عام 1826م. والثانية هي نظرية تشوهات القص من المرتبة الأولى أو نظرية جانز تيموشينكو التي نشرت عام 1921م.

يكن الفارق بين هاتين النظريتين، في أن الثانية تأخذ تشوهات القص العرضاني بالحسبان بينما تتجاهلها الأولى. وينعكس ذلك على نتائج النظريتين وعلى تحديد مجال تطبيق كل منها. لكن على الرغم من هذا الفارق فإن البنيتين الرياضيتين لمعادلات كلا النظريتين، تتشابهان إلى الحد الذي سيسمح لنا، كما سنبين في هذا البحث، باستنتاج حلول النظرية الثانية، التي يصعب الحصول عليها مباشرة، من حلول النظرية الأولى المتوفرة بكثرة في العديد من المراجع [1].

نعرض أولاً طريقة استنتاج المعادلات النازمة والشروط الطرفية لجانز منتظم محمل عرضانياً باستخدام مبدأ الطاقة الكامنة الأصغرية وبالاعتماد على الفرضيات الكينماتيكية لكل من النظريتين. ثم نبين العلاقة



الشكل رقم (1): بين تشوهات المقطع العرضي في نظريتي أويلر-برنولي-نافييه وتيموشينكو ستكون بعض حالات النحيل والاستناد غير متناظرة. قبل المضي في عرض البحث، نعرف الجانز المدروس في جملة الإحداثيات (x, y, z) كما هو مبين على الشكل رقم (1).

نظرية الانعطاف البسيط أويلر – برنولي – نافيه Euler –Bernouli-Navier Beam Theory:

تعتمد هذه النظرية في النقطة (x, z) من مستوي الانعطاف، حقل الانتقال المحوري والعرضاني التاليين:

$$u^E(x, z) = -z \frac{dw_0^E}{dx} \quad (1)$$

$$w^E(x, z) = w_0^E(x) \quad (2)$$

حيث يدل $w_0^E(x)$ على الانتقال العرضاني للنقطة (x,0) من المحور الطولي للجائز وحيث يدل المؤشر العلوي E على المتحولات والمجاهيل المتعلقة بنظرية أويلر – برنولي – نافيه. للاختصار سنكتفي لاحقاً بالإشارة إلى هذه النظرية على أنها نظرية جائز أويلر (EBT)، فأويلر هو الأشهر من بين العلماء الثلاثة. يحقق حقل الانتقال هذا، الفرضية الكينماتيكية الخاصة بهذه النظرية التي تقضي بأن تبقى المقاطع العرضية المستوية والناظرية على المحور الطولي قبل التشوه، مستوية وناظرية عليه بعد التشوه. مما يؤدي إلى إهمال تشوه القص العرضاني g_{xz} وبالتالي إجهاد القص المرافق t_{xz} . لقد تم قبول هذا الحقل تاريخياً وعلى مدى أكثر من قرنين، نظراً لبساطته ولبساطة المعادلات الناتجة عنه، على الرغم من أن نتيجته الأخيرة، $t_{xz} = 0$ ، تتناقض مع شروط التوازن كما سنرى لاحقاً.

من حقل الانتقال العرضاني المفروض نستنتج أيضاً، أن التشوه الطولي e_{zz} في الاتجاه العرضاني معدوم في كافة نقاط الجائز. لذلك تقبل هذه النظرية فرضية أن $s_{zz} = 0$ على الرغم من أن هذا يتناقض مع الشرط الطرفي لمعادلات التوازن على السطح العلوي للجائز.

استناداً إلى الفرضيات السابقة وإلى انعكاساتها على حقل التشوه والإجهاد يمكننا أن نكتب طاقة التشوهات الوهمية dU كتابع للتشوه الطولي المحوري والإجهاد الناظمي على المقطع كما يلي:

$$dU = \int_0^L \int_A e_{xx} s_{xx} dA dx \quad (3)$$

حيث يدل d على الرمز المتغيراتي Variational symbol، A على مساحة المقطع العرضي للجائز المنتظم L على طول الجائز، s_{xx} على الإجهاد الناظمي، و e_{xx} على التشوه الناظمي.

باستخدام علاقة التشوهات – الانتقالات: $e_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{du^E}{dx} + \frac{du^E}{dx} \right)$ وتعريف عزم الانعطاف على مقطع الجائز $M_{xx}^E = \int_A s_{xx} dA$ ، يمكننا تبسيط عبارة الطاقة السابقة إلى الشكل:

$$dU = - \int_0^L M_{xx}^E \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} dx \quad (4)$$

وباعتبار أن الحمولة الخارجية الوحيدة المطبقة على الجائز هي الحمولة العرضانية q(x) التي تُعد هنا مؤثرة على المحور الوسطي للجائز فإن عبارة الطاقة الكامنة الوهمية للحمولة هي:

$$dV = - \int_0^L q w_0^E dx \quad (5)$$

يمكننا بالاعتماد على مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية الوهمية: $dW = dU + dV = 0$ أن نستنتج المعادلات التفاضلية الناظمة لسلوك الجائز عن طريق تعويض (4) و(5) في العلاقة السابقة، لنجد أن:

$$dW = - \int_0^L \dot{M}_{xx}^E \frac{d^2 dw_0^E}{dx^2} dx - \int_0^L \dot{Q} dw_0^E dx = 0 \quad (6)$$

وبتطبيق التكامل بالتجزئة مرتين على الحد الأول من المعادلة السابقة ينتج لدينا:

$$\int_0^L \dot{M}_{xx}^E \frac{d^2 dw_0^E}{dx^2} dx = \left[\dot{M}_{xx}^E \frac{dw_0^E}{dx} - \frac{dM_{xx}^E}{dx} dw_0^E \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} dw_0^E dx \quad (7)$$

وبالتالي تصبح علاقة انحفاظ الطاقة الكلية الوهمية على الشكل:

$$dW = \left[\dot{M}_{xx}^E \frac{dw_0^E}{dx} - \frac{dM_{xx}^E}{dx} dw_0^E \right]_0^L - \int_0^L \dot{Q} dw_0^E dx - \int_0^L \frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} dw_0^E dx = 0 \quad (8)$$

فإذا اخترنا حقل الانتقالات الوهمية dw_0^E محققاً للشروط الطرفية مما يتطابق مع انعدام الحد داخل القوسين المتوسطين من المعادلة السابقة، فإن التكامل الذي يظهر فيها يبقى معدوماً مهما يكن حقل الانتقالات الوهمي. مما يقضي بانعدام المقدار داخل القوسين الصغيرين تحت إشارة التكامل:

$$- \frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} - q = 0 \quad \text{و} \quad - \frac{d^2 M_{xx}^E}{dx^2} = q, \quad 0 < x < L \quad (9)$$

وبذلك نكون قد توصلنا عن طريق مبدأ الطاقة إلى ما يُعرف في مقاومة المواد بالمعادلة التفاضلية لتوازن الجائز في حالة الانعطاف التي تستنتج بشكل مباشر من شرطي توازن شريحة تفاضلية منه تحت تأثير الحمولة الخارجية [2].

إن استنتاج هذه المعادلة، بالشكل التقليدي، أي عن طريق شرطي التوازن يتطلب وجود قوة القص العرضاني ودمج معادلتَي التوازن التاليتين:

$$- \frac{dM_{xx}^E}{dx} + Q_x^E = 0, \quad - \frac{dQ_x^E}{dx} = q \quad (10)$$

للحصول على المعادلة (9).

إن قبول وجود قوة القص يتناقض كما رأينا مع الفرضيات الكينماتيكية لنظرية أولير.

إذا عدنا الآن إلى الحد داخل القوسين المتوسطين من المعادلة (8)، نجد أن مبدأ انحفاظ الطاقة يعطي بالإضافة إلى معادلة التوازن، أشكال واحتمالات الشروط الطرفية الواجب توفرها في مساند الجائز. إن انعدام قيمة القوس المتوسط يقضي بأن يكون الانتقال w_0^E أو قوة القص (مشتق العزم لمزيد من الدقة) $Q_x^E = 0$ dM_{xx}^E/dx معدوماً عند الأطراف، وأن يكون الدوران dw_0^E/dx أو عزم الانعطاف M_{xx}^E معدوماً عند الأطراف. ومن تراكيب هذه الشروط سنعمد الحالات التالية:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_0^E \\ \dot{M}_{xx}^E \end{pmatrix} \ddot{y} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{w}_0^E \\ \dot{dw}_0^E/dx \end{pmatrix} \ddot{y} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{Q}_x^E \\ \dot{M}_{xx}^E \end{pmatrix} \ddot{y} = \begin{pmatrix} \dot{0} \\ \dot{0} \end{pmatrix} \quad (11)$$

وهذه الحالات الثلاث توافق على الترتيب حالة المسند البسيط، الوثاقفة والطرف الحر. في حالة الجائز المكون من مادة تخضع لقانون هوك، يمكننا ادخال حقل الانتقال في معادلة التوازن بأن نكتب:

$$s_{xx} = E_x e_{xx} = -E_x z \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} \quad (12)$$

حيث E_x معامل المرونة. وبالتالي تصبح علاقة العزم على الشكل التالي:

$$M_{xx}^E = \int_A s_{xx} dA = - \int_A z^2 E_x \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} dA = -D_{xx} \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} \quad (13)$$

حيث $D_{xx} = E_x I_{yy}$ هي صلابة الجائز على الانعطاف و $I_{yy} = \int_A z^2 dA$ هو عزم عطالة مقطعها.

ثم نعوض المعادلة (13) في المعادلة (9) وفي الحالات المناسبة من الشروط الطرفية (11) فينتج:

$$\frac{d^2}{dx^2} D_{xx} \frac{d^2 w_0^E}{dx^2} = q \quad \text{for } 0 < x < L \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_0^E \\ \dot{M}_{xx}^E \end{pmatrix} \ddot{y} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{w}_0^E \\ \dot{dw}_0^E/dx \end{pmatrix} \ddot{y} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{Q}_x^E \\ \dot{M}_{xx}^E \end{pmatrix} \ddot{y} = \begin{pmatrix} \dot{0} \\ \dot{0} \end{pmatrix} \quad (15)$$

نظرية تيموشينكو (TBT) Timoshenko Beam Theory

يأخذ حقل الانتقال المحوري والعرضاني، في نظرية تيموشينكو، حيث تلغى فرضية بقاء المقاطع ناظرية normality assumption وتبقى فرضية استوائها فقط، الشكل التالي:

$$u^T(x, z) = z f(x) \quad (16)$$

$$w^T(x, z) = w_0^T(x) \quad (17)$$

في هذا الحقل يعبر f عن زاوية دوران المقطع العرضي، وبدل المؤشر العلوي T على نظرية تيموشينكو. من حقل الانتقال هذا يمكننا استنتاج أن مركبات التشوه معدومة عدا اثنتين منه، هما:

$$e_{xx} = \frac{\int u^T}{\int x} = z \frac{df^T}{dx} \quad (18)$$

$$g_{xz} = \frac{\int u^T}{\int z} + \frac{\int w^T}{\int x} = f^T + \frac{dw_0^E}{dx} \quad (19)$$

نلاحظ هنا أن القيود المخففة على شكل حقل الانتقال، قد أدت إلى ظهور قيمة ثابتة لتشوه القص العرضاني g_{xz} على كامل المقطع. مما يؤدي وفقاً لقانون السلوك إلى ظهور قيمة ثابتة وغير معدومة لإجهاد

القص على كامل المقطع بما في ذلك طرفيه العلوي والسفلي. أي أن $s_{xz}(x, \pm h/2) = 0$ لكن كون الحملية المطبقة على الجائز عرضانية فقط (ناظمية على السطح العلوي أو السفلي)، فإن $s_{zx}(x, \pm h/2) = 0$. ولما $s_{xz} = s_{zx}$ في أية نقطة فإننا نلاحظ وجود تناقض بين فرضية تيموشنكو الكينماتيكية والشروط الطرفية للإجهادات. لقد تم تاريخياً تصحيح هذا التناقض في نظرية تيموشنكو بإدخال ما يعرف بعامل تصحيح القص. كما سنرى بعد قليل.

وبما أن تشوه القص لم يعد معدوماً في هذه النظرية كما هو مبين في العلاقة (19)، فإننا يجب أن نضيف إلى طاقة التشوه الناظمي طاقة تشوه القص كي نحصل على طاقة التشوهات الوهمية، التي نكاملها على مساحة المقطع كما يلي:

$$dU = \int_{O A}^L s_{xx} de_{xx} + s_{xz} dg_{xz} dA dx = \int_{O A}^L s_{xx} z \frac{df^T}{dx} + s_{xz} (df^T + \frac{dw_0^T}{dx}) dA dx \quad \ddot{u} \quad (20)$$

$$= \int_0^L M_{xx}^T \frac{df^T}{dx} + Q_x^T (df^T + \frac{dw_0^T}{dx}) dx \quad \dot{y} \quad \dot{b}$$

في العبارة السابقة يدل s_{xx} على الإجهاد الناظمي، ويدل s_{xz} على إجهاد القص العرضاني، أما M_{xx}^T فيرمز إلى عزم الانعطاف ويعطى بالعلاقة: $M_{xx}^T = \int_A s_{xx} z dA$ بينما ترمز Q_x^T إلى قوة القص وتعطى بالعلاقة: $Q_x^T = \int_A s_{xz} dA$. بمقارنة العلاقتين (4) و (20) نرى الفرق بين عبارتي طاقة التشوهات الكامنة الوهمية لكل من النظريتين. لكن عبارة الطاقة الكامنة الوهمية للحملية $q(x)$ ، لا تتغير بين النظريتين:

$$dV = - \int_0^L q(x) dw_0^T dx \quad (21)$$

مرة أخرى نرى أن الاعتماد على مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية الوهمية: $dW = dU + dV = 0$ يسمح باستنتاج المعادلات التفاضلية الناظمة لسلوك الجائز عن طريق تعويض (20) و (21) لنحصل على:

$$dW = \int_0^L \frac{\partial}{\partial \dot{c}} M_{xx}^T \frac{df^T}{dx} + Q_x^T \frac{\partial}{\partial \dot{c}} df^T + \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial \dot{c}} - q dw_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \dot{u} dx = 0 \quad (22)$$

نكامل بالتجزئة مرتين فنحصل على :

$$dW = \int_0^L \frac{\partial}{\partial \dot{c}} \frac{\partial}{\partial \dot{c}} M_{xx}^T \frac{df^T}{dx} + Q_x^T \frac{\partial}{\partial \dot{c}} df^T + \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial \dot{c}} - q dw_0^T \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \dot{u} dx + \dot{c} M_{xx}^T df^T + Q_x^T dw_0^T \dot{u} = 0 \quad (23)$$

نختار حقل الانتقالات الوهمية منسجماً مع الشروط الطرفية، أي نجعل المقدار داخل القوسين المتوسطين الأخيرين من المعادلة السابقة، معدوماً. مما يؤدي إلى بقاء النكامل معدوماً مهما يكن هذا الحقل، أي إلى:

$$- \frac{dM_{xx}^T}{dx} + Q_x^T = 0 \quad , \quad - \frac{dQ_x^T}{dx} = q \quad (24)$$

ومن التراكيب الممكنة والمفيدة للشروط الطرفية للاستناد نختار:

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_0^T \\ \dot{M}_{xx}^T \end{pmatrix} \ddot{u} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{w}_0^T \\ \dot{f}^T \end{pmatrix} \ddot{u} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{Q}_x^T \\ \dot{M}_{xx}^T \end{pmatrix} \ddot{u} \quad (25)$$

وهذه الحالات الثلاث توافق على الترتيب حالة المسند البسيط، الوثيقة والطرف الحر. وهنا أيضاً إذا كانت مادة الجائز خاضعة لقانون هوك $s_{xx} = E_x e_{xx}$ و $s_{xz} = G_{xz} g_{xz}$ يمكننا كتابة عزم الانعطاف وقوة القص كتوابع للانتقالات على النحو:

$$M_{xx}^T = \int_A s_{xx} dA = \int_A E_x z^2 \frac{df^T}{dx} dA = D_{xx} \frac{df^T}{dx} \quad (26)$$

$$Q_x^T = K_s \int_A g_{xz} dA = K_s \int_A \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial z} dA = K_s A_{xz} \frac{dw_0^T}{dx} + \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \quad (27)$$

وفيها لدينا:

$$D_{xx} = \int_A E_x z^2 dA = E_x I_{yy} \quad , \quad A_{xz} = \int_A G_{xz} dA \quad (28)$$

بينما يدل K_s على عامل تصحيح القص ، والذي تم إدخاله لتعويض الخطأ الناجم عن اعتبار أن إجهادات القص ثابتة على كامل المقطع ، والذي يقدر بطرق تقريبية تعتمد على فرضيات تبسيطية في نظرية المرونة [3].

بتعويض قيمة كل من عزم الانعطاف M_{xx}^T ، وقوة القص Q_x^T من المعادلتين (26) و (27) في المعادلتين (24) و (25) نحصل على المعادلتين الناظمتين، لنظرية جائز تيموشنكو مع الشروط الطرفية الملحقة بهما بدلالة الانتقالات:

$$- \frac{d}{dx} \left(\int_A E_x z^2 \frac{df^T}{dx} dA \right) + K_s A_{xz} \frac{dw_0^T}{dx} + \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

$$- \frac{d}{dx} \left(\int_A G_{xz} dA \right) \frac{dw_0^T}{dx} + \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial z} = q \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_0^T \\ \dot{D}_{xx} \frac{df^T}{dx} \end{pmatrix} \ddot{u} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{w}_0^T \\ \dot{f}^T \end{pmatrix} \ddot{u} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \dot{K}_s A_{xz} \frac{dw_0^T}{dx} + \frac{dw_0^T}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{D}_{xx} \frac{df^T}{dx} \end{pmatrix} \ddot{u} \quad (31)$$

العلاقة بين نظرتي أويلر وتيموشينكو:

بعد عرضنا للفرضيات الأساسية لكل من النظريتين وللمعادلات الناظمة لتوازن الجائز في كل منهما، ننتقل إلى الهدف الأساسي من هذا البحث وهو استنتاج العلاقات التي تربط حلول مسألة الانعطاف (انتقال، دوران،

عزم انعطاف وقوة قص) لنظرية جوائز تيموشينكو مع حلول مسألة الانعطاف البسيط للجائز ذاته خاضعاً لنظرية أويلر. حيث تكون هذه العلاقات مفيدة جداً عند وضع ومقارنة مصفوفات الصلابة لعناصر الجيزان الخاضعة لإحدى النظريتين.

لقد قمنا باستنتاج العلاقات التي تربط بين هذه الحلول انطلاقاً من ملاحظة أن تابع الحمولة الموزعة في معادلة التوازن الثانية من العلاقة (10) يظهر ذاته أيضاً في الطرف الثاني لمعادلة التوازن الثانية من العلاقة (24). فوجدنا أن تكامل هاتين المعادلتين يقتضي حتماً أن يكون الفرق بين قوة القص Q_x^T في نظرية تيموشينكو وقوة القص Q_x^E في نظرية أويلر مساو إلى مقدار ثابت. أي أنه من الممكن كتابة العلاقة التالية بين هاتين القوتين:

$$Q_x^T = Q_x^E + C_1 \quad (32)$$

وبمكاملة طرفي هذه العلاقة مع الاستفادة من معادلات التوازن (10) و(24) وجدنا أن العلاقة بين عزمي الانعطاف في النظريتين هي من الشكل:

$$M_{xx}^T = M_{xx}^E + C_1 x + C_2 \quad (33)$$

وبمتابعة التكامل على هذا المنوال، توصلنا إلى أن العلاقتين التي تربطان بين دوراني المقطع وانتقالي الخط المرن في كل من النظريتين هما:

$$f^T = - \frac{dw_0^E}{dx} + C_1 \frac{x^2}{2D_{xx}} + C_2 \frac{x}{D_{xx}} + \frac{C_3}{D_{xx}} \quad (34)$$

$$w_0^T = w_0^E + \frac{M_{xx}^E}{K_s A_{xz}} + C_1 \frac{\alpha x}{\epsilon K_s A_{xz}} - \frac{x^3}{6D_{xx}} \frac{\ddot{\alpha}}{\delta} - C_2 \frac{x^2}{2D_{xx}} - C_3 \frac{x}{D_{xx}} - C_4 \frac{1}{D_{xx}} \quad (35)$$

في العلاقات الأربع الأخيرة التي تربط حل مسألة نظرية تيموشينكو، بحل مسألة نظرية أويلر ظهرت ثوابت التكامل C_1, C_2, C_3, C_4 التي من الممكن تحديدها انطلاقاً من الشروط الطرفية لاستناد الجائز. سنستعرض فيما يلي كيفية استنتاج قيم الثوابت C_1 لجائز بفتحة واحدة ولعدة حالات استناد. سنشير إلى كل جائز بحرفين، يدل الأول على نوع الاستناد في النهاية اليسرى ($x=0$) والثاني على نوع الاستناد في النهاية اليمنى ($x=L$). ولتبسيط الحسابات سنستعين بالمتحول اللابعد W ، وينسبة نحافة الجائز r/L المعرفين بالعلاقتين:

$$W = \frac{D_{xx}}{K_s A_{xz} L^2} = \frac{E_x}{K_s G_{xz}} \frac{\alpha}{\epsilon L} \frac{\ddot{\alpha}}{\delta}, \quad \frac{r}{L} = \frac{\sqrt{I_{yy}/A}}{L}.$$

وسنقارن بين النظريتين لمجموعة من الجيزان، يحكمها تغير نسبة النحافة على المجال [0.01 - 0.1].

مقارنة حلول النظريتين لعدة حالات استناد لجائز ذو مقطع مستطيل

1. جائز بسيط (SS)

تعطى الشروط الطرفية للجائز ذي الاستناد البسيط في الطرفين على الشكل:

$$x = 0: w_0^E = w_0^T = M_{xx}^E = M_{xx}^T = 0 \quad (36)$$

$$x = L: w_0^E = w_0^T = M_{xx}^E = M_{xx}^T = 0 \quad (37)$$

بتعويض هذه الشروط في المعادلات (32) وحتى (35) ينتج لدينا:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0 \quad (38)$$

وبالتالي تصبح العلاقات التي تربط بين حلول نظريتي أويلر وتيموشينكو لجائز مستند استناد بسيط على

الشكل التالي:

$$Q_x^T(x) = Q_x^E(x) \quad (39)$$

$$M_{xx}^T(x) = M_{xx}^E(x) \quad (40)$$

$$f^T(x) = - \frac{dw_0^E(x)}{dx} \quad (41)$$

$$w_0^T(x) = w_0^E(x) + \frac{M_{xx}^E(x)}{K_s A_{xz}} \quad (42)$$

يوضح الشكل رقم (2) المقارنة بين حلي النظريتين لحالة جائز محمل بحمولة منتظمة، والشكل رقم (3)

لحالة جائز محمل بحمولة مثلثية.

ملاحظة: يدل الرمز a الوارد في المخططات على مقلوب نسبة نحافة الجائز.

2. جائز موثوق - حر (CF)

لدينا الشروط الطرفية:

$$x = 0 \text{ } \mathbf{f}^T = \frac{dw_0^E}{dx} = 0, w_0^T = w_0^E = 0 \quad (43)$$

$$x = L \text{ } \mathbf{Q}_x^E = \mathbf{Q}_x^T = 0, M_{xx}^E = M_{xx}^T = 0 \quad (44)$$

بتعويض هذه الشروط في المعادلات (32) وحتى (35) ينتج لدينا:

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = M_{xx}^E(0)WL^2 \quad (45)$$

وبالتالي تصبح العلاقات التي تربط بين حلول نظريتي أويلر وتيموشينكو لجائز موثوق - حر على

الشكل التالي:

$$Q_x^T(x) = Q_x^E(x) \quad (46)$$

$$M_{xx}^T(x) = M_{xx}^E(x) \quad (47)$$

$$f^T(x) = - \frac{dw_0^E(x)}{dx} \quad (48)$$

$$w_0^T(x) = w_0^E(x) + \frac{M_{xx}^E(x)}{K_s A_{xz}} - \frac{M_{xx}^E(0)}{K_s A_{xz}} \quad (49)$$

يوضح الشكل رقم (4) المقارنة بين حلي النظريتين لحالة جائز محمل بحمولة منتظمة، والشكل رقم (5) لحالة جائز محمل بحمولة مثلثية.

3. جائز موثوق - استناد بسيط (CS)

لدينا الشروط الطرفية:

$$x = 0 \text{ } \mathcal{P} \text{ } f^T = \frac{dw_0^E}{dx} = 0, w_0^E = w_0^T = 0 \quad (50)$$

$$x = L \text{ } \mathcal{P} \text{ } M_{xx}^T = M_{xx}^E = 0, w_0^E = w_0^T = 0 \quad (51)$$

بتعويض هذه الشروط في المعادلات (32) وحتى (35) ينتج لدينا:

$$C_1 = \frac{3W}{(1+3W)L} M_{xx}^E(L), \quad C_2 = -LC_1, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = M_{xx}^E(0)WL^2 \quad (52)$$

وبالتالي تصبح العلاقات التي تربط بين حلول نظريتي أولر وتيموشينكو لجائز موثوق - استناد بسيط على الشكل التالي:

$$Q_x^T(x) = Q_x^E(x) + \frac{3W}{(1+3W)L} M_{xx}^E(0) \quad (53)$$

$$M_{xx}^T(x) = M_{xx}^E(x) - \frac{3W}{(1+3W)L} \frac{x}{L} M_{xx}^E(0) \quad (54)$$

$$f^T(x) = -\frac{dw_0^E(x)}{dx} + \frac{3WL}{D_{xx}(1+3W)} \frac{x}{L} M_{xx}^E(0) - \frac{x}{2L} \frac{\ddot{M}_{xx}^E(0)}{\varnothing} \quad (55)$$

$$w_0^T(x) = w_0^E(x) + \frac{WL^2}{D_{xx}} \left[M_{xx}^E(x) - M_{xx}^E(0) \right] + \frac{3WL^2}{D_{xx}(1+3W)} \frac{x}{L} M_{xx}^E(0) + \frac{x}{2L} - \frac{x^2}{6L^2} \frac{\ddot{M}_{xx}^E(0)}{\varnothing} \quad (56)$$

يوضح الشكل رقم (6) المقارنة بين حلي النظريتين لحالة جائز محمل بحمولة منتظمة، والشكل رقم (7) لحالة جائز محمل بحمولة مثلثية.

4. جائز موثوق - موثوق (CC)

تعطى الشروط الطرفية لهذا الجائز على الشكل:

$$x = 0 \text{ } \mathcal{P} \text{ } w_0^E = w_0^T = 0, \frac{dw_0^E}{dx} = f^T = 0 \quad (57)$$

$$x = L \text{ } \mathcal{P} \text{ } w_0^E = w_0^T = 0, \frac{dw_0^E}{dx} = f^T = 0 \quad (58)$$

بتعويض هذه الشروط في المعادلات (32) وحتى (35) ينتج لدينا:

$$C_1 = -\frac{12W}{(1+12W)L} [M_{xx}^E(L) - M_{xx}^E(0)], C_2 = \frac{6W}{(1+12W)} [M_{xx}^E(L) - M_{xx}^E(0)]$$

$$C_3 = 0, C_4 = M_{xx}^E(0)WL^2 \quad (59)$$

وبالتالي تصبح العلاقات التي تربط بين حلول نظريتي أويلر - برنولي وتيموشينكو لجائز موثوق من الطرفين على الشكل التالي:

$$Q_x^T(x) = Q_x^E(x) - \frac{12m}{L} [M_{xx}^E(L) - M_{xx}^E(0)] \quad (60)$$

$$M_{xx}^T(x) = M_{xx}^E(x) - 6m \frac{x}{L} [M_{xx}^E(L) - M_{xx}^E(0)] \quad (61)$$

$$f^T(x) = -\frac{dw_0^E}{dx} - \frac{6mL}{D_{xx}} \frac{x}{L} [M_{xx}^E(L) - M_{xx}^E(0)] \quad (62)$$

$$w_0^T(x) = w_0^E(x) + \frac{WL^2}{D_{xx}} [M_{xx}^E(x) - M_{xx}^E(0)] + \frac{3mL^2}{D_{xx}} \frac{x}{L} \frac{x^2}{3L^2} - 4W - \frac{x}{L} [M_{xx}^E(L) - M_{xx}^E(0)] \quad (63)$$

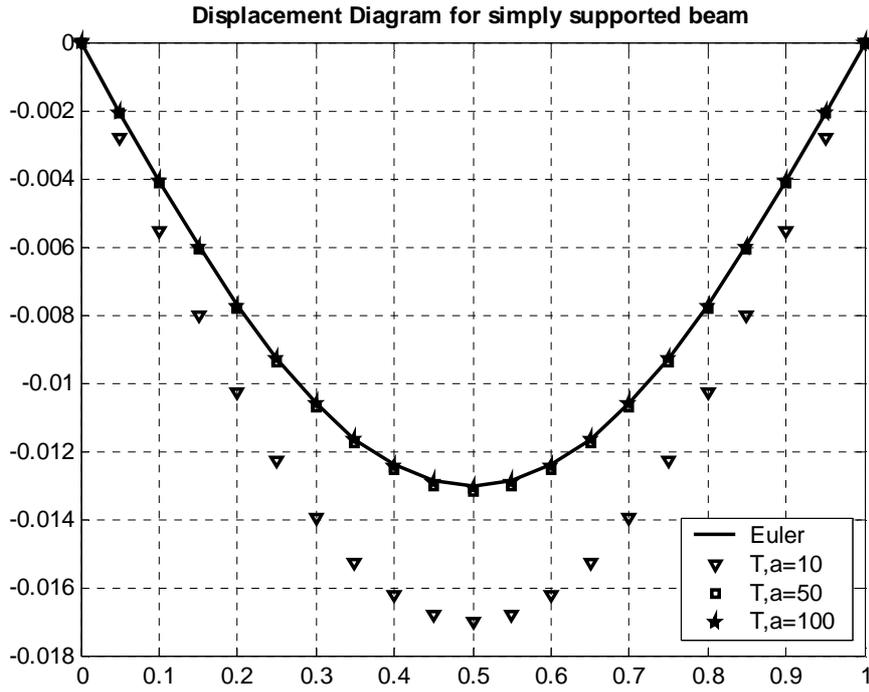
يوضح الشكل رقم (8) المقارنة بين حلي النظريتين لحالة جائز محمل بحمولة منتظمة، والشكل رقم (9) لحالة جائز محمل بحمولة مثلثية.

الخلاصة:

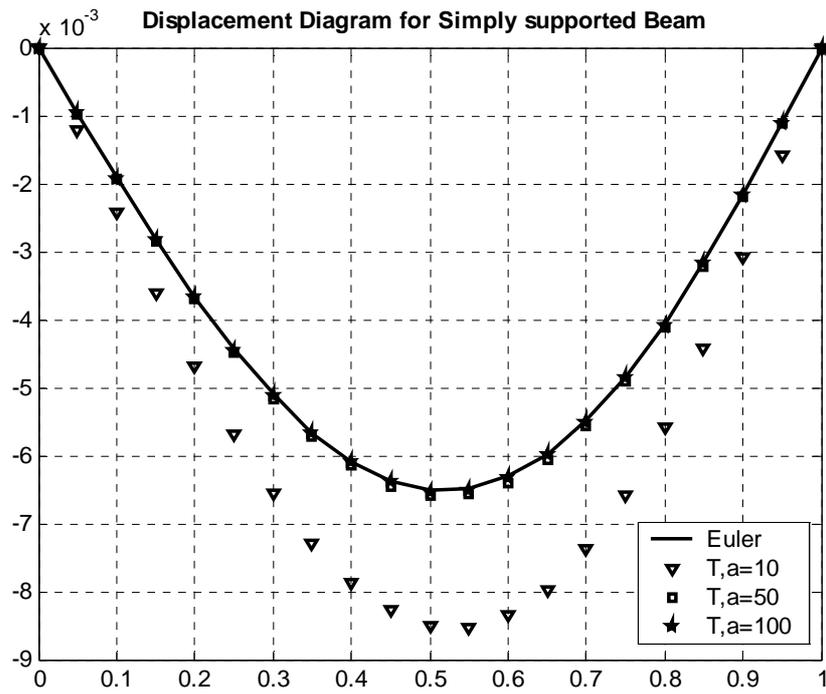
نلاحظ من الحلول السابقة أن قيمة عزم الانعطاف وقوة القص تبقى نفسها في النظريتين وذلك بالنسبة للجيزان المقررة ستاتيكيًا، وأيضاً فإن دوران المقطع العرضي في نظرية تيموشينكو يساوي دوران المماس في نظرية أويلر. أما بالنسبة للجيزان غير المقررة ستاتيكيًا فإن محصلات الإجهادات تكون مختلفة وذلك بسبب الحاجة إلى استخدام معادلات الانسجام والتي تتضمن تأثير تشوه القص العرضاني.

من المعروف أن الحل المباشر للمعادلتين التفاضليتين (29) و(30) الناظمتين لتوازن الجائز في نظرية تيموشينكو، أمر صعب ويتطلب حسابات طويلة. وقد استطعنا أن نبين في بحثنا هذا إمكانية تلافي هذه الصعوبات

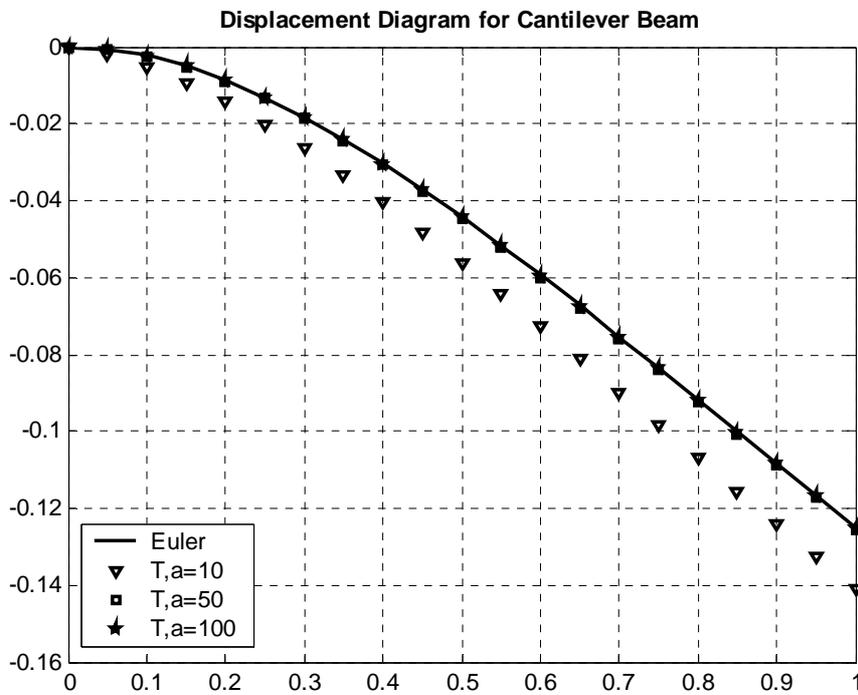
عن طريق إيجاد العلاقات التي تربط هذا الحل بحل المعادلتين المناظرتين لهما في نظرية أويلر حيث من السهل الحصول على حل مباشر بالقليل من الحسابات. كما بينا في المخططات المعروضة أعلاه ضرورة استخدام نظرية جانز تيموشنكو في حالة الجيزان العميقة حيث تقترب النسبة r/L من الحد الأدنى للمجال المدروس $r/L=1/10$ فيصبح الفرق بين توابع حل مسألة جانز تيموشنكو وجانز أويلر واضحاً لا سيما من أجل تابع الانتقال.



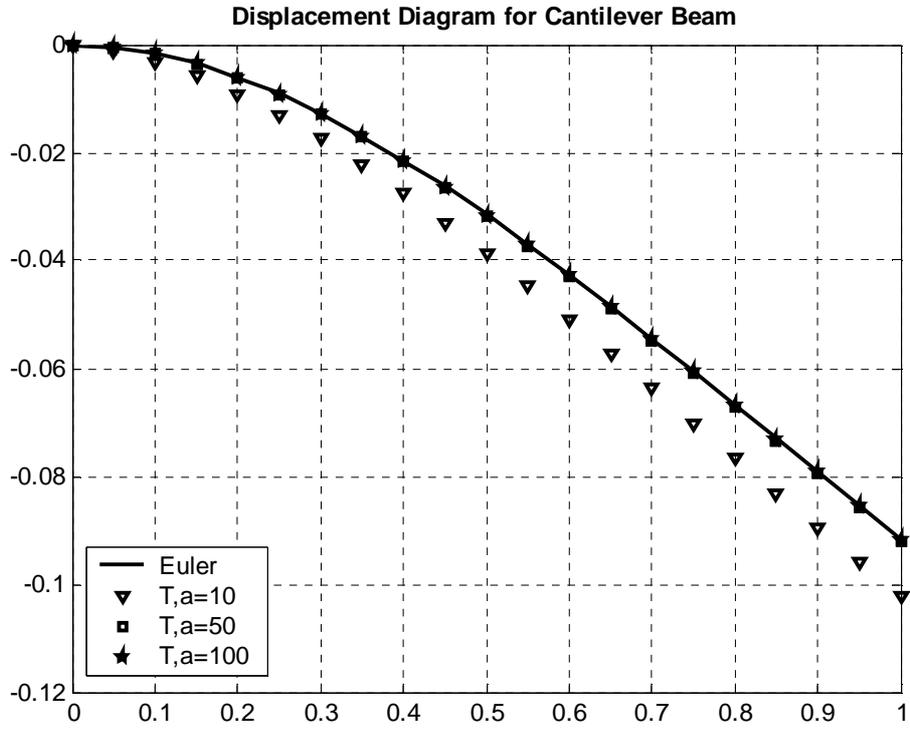
الشكل رقم (2): مخطط الانتقالات لجانز بسيط محمل بحمولة منتظمة



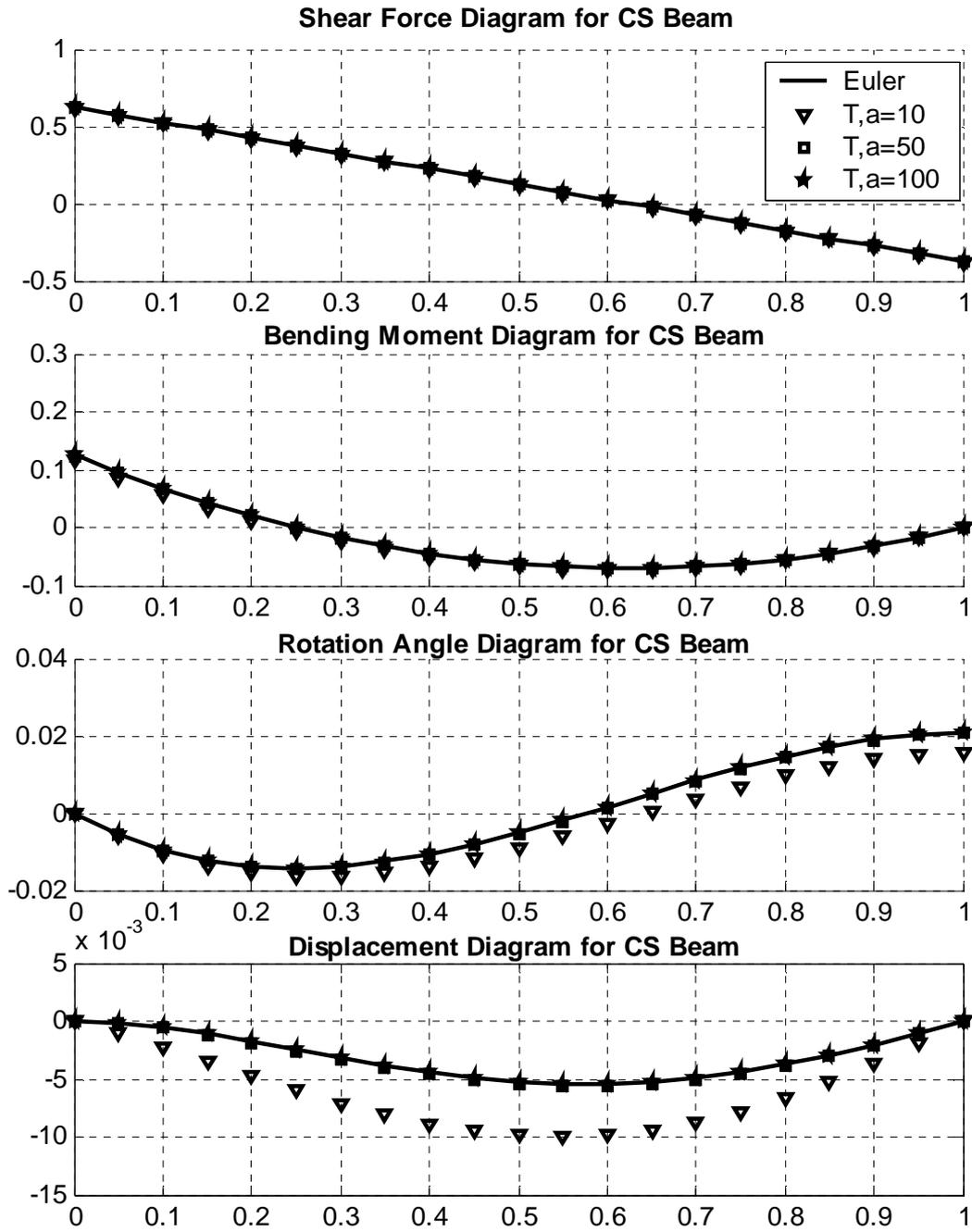
الشكل رقم (3): مخطط الانتقالات لجانز بسيط محمل بحمولة مثلثية



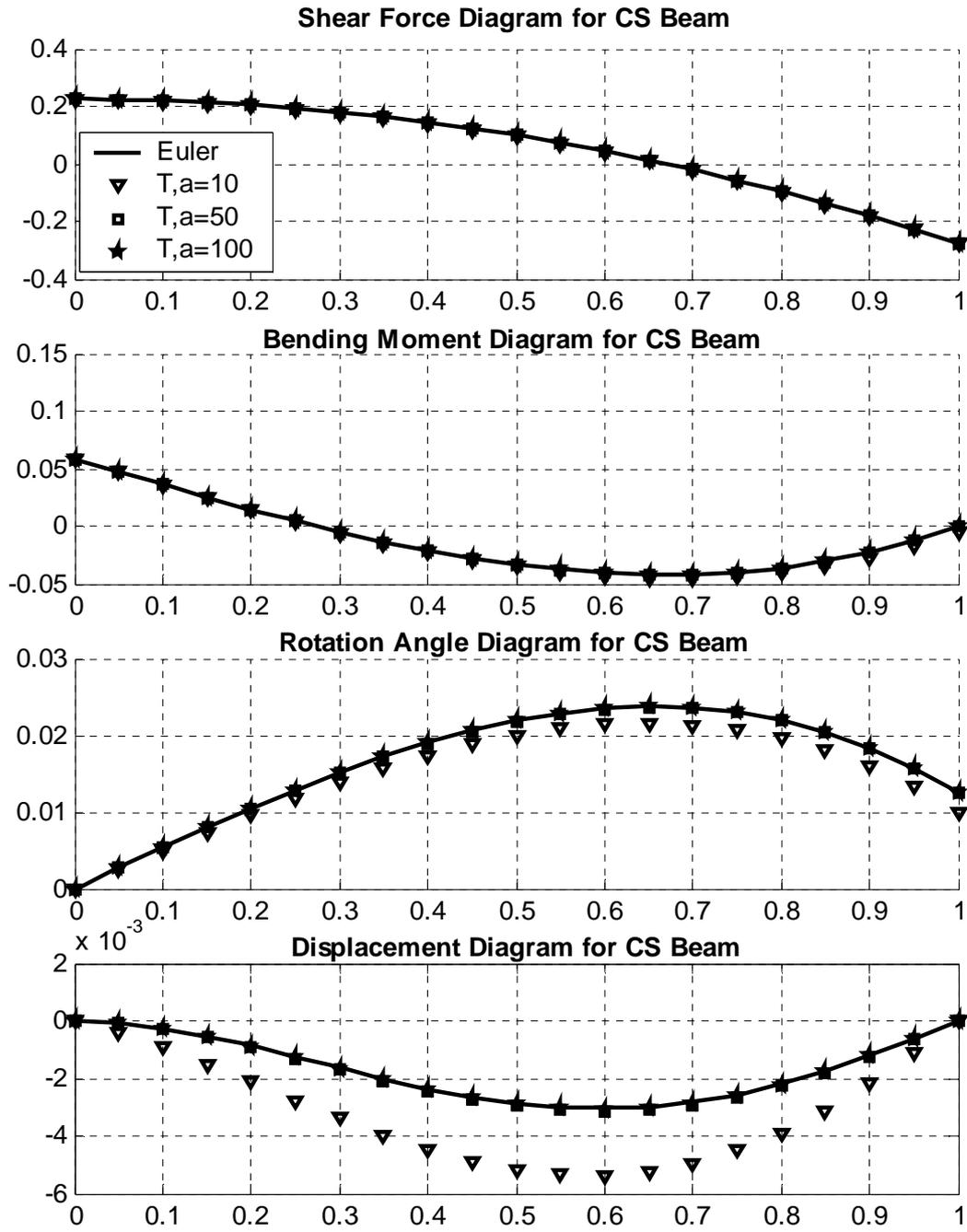
الشكل رقم (4): مخطط الانتقالات لجانز موثوق - حر محمل بحمولة منتظمة



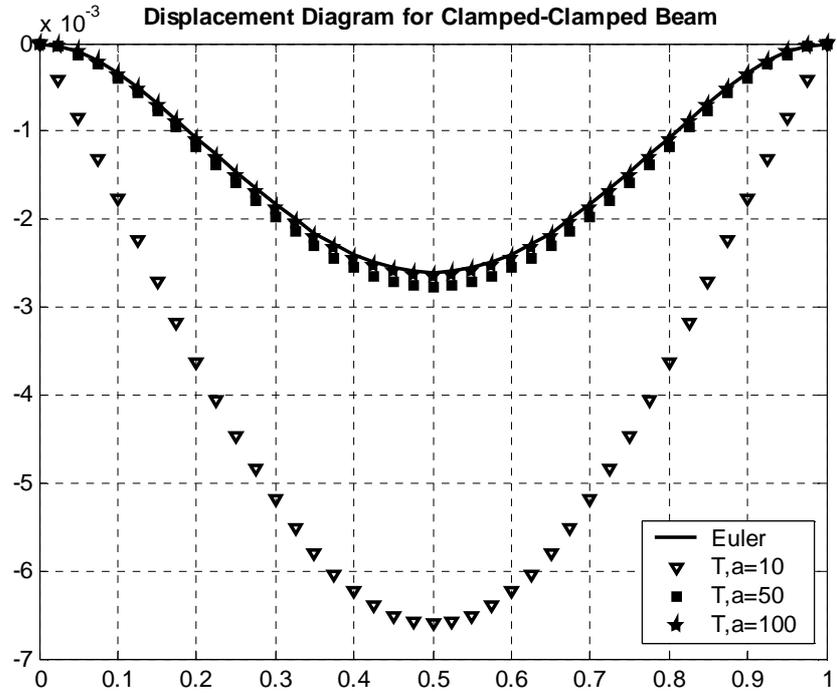
الشكل رقم (5): مخطط الانتقالات لجانز موثوق - حر محمل بحمولة مثلثية



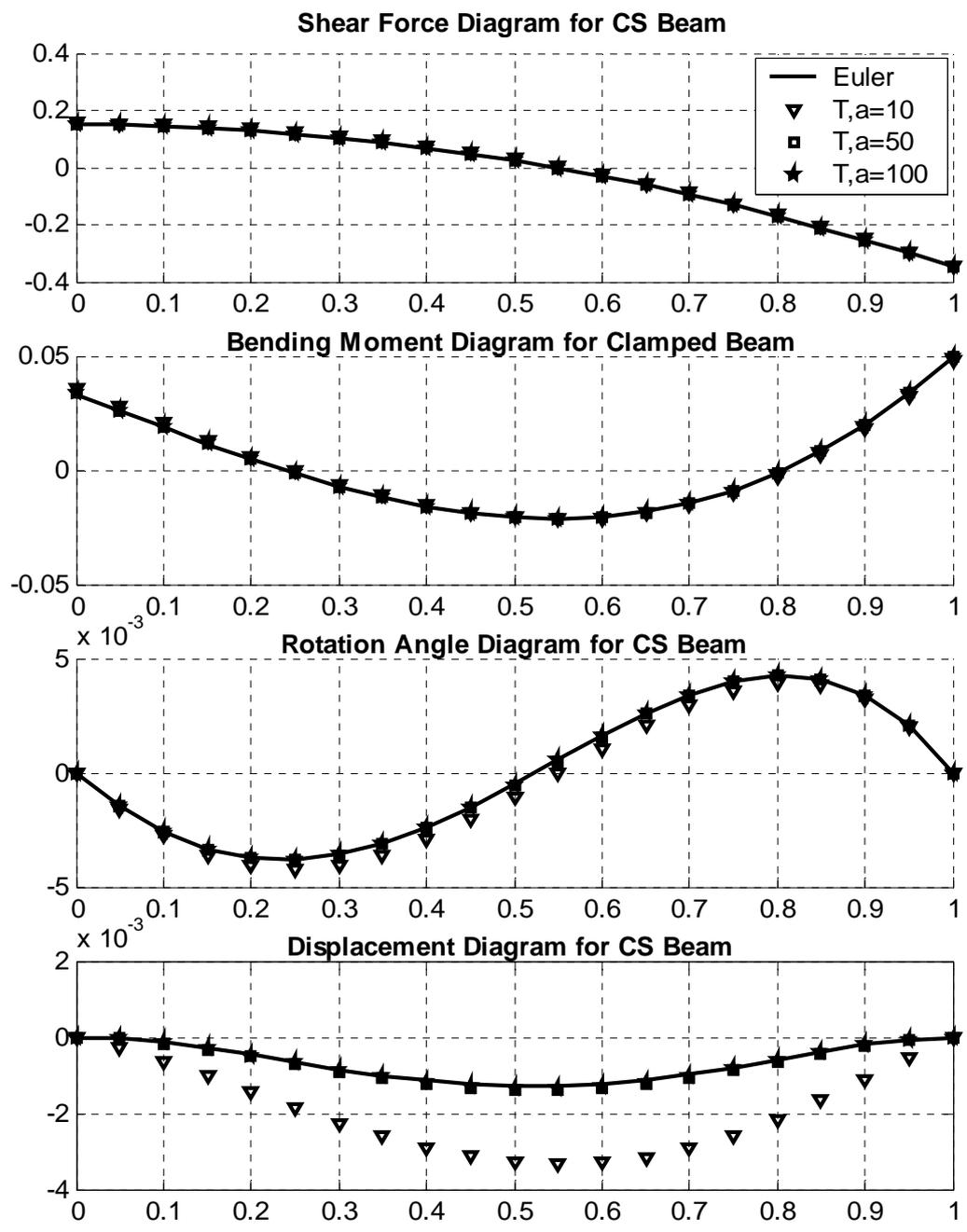
الشكل رقم (6): مخطط الانتقالات لجانز موثوق - مستند استناد بسيط محمل بحمولة منتظمة



الشكل رقم (7): مخطط الانتقالات لجانز موثوق - مستند استناد بسيط محمل بحمولة مثلثية



الشكل رقم (8): مخطط الانتقالات لجانز موثوق - موثوق محمل بحمولة منتظمة



الشكل رقم (9): مخطط الانتقالات لجانز موثوق - موثوق محمل بحمولة مثلثية

المراجع:

.....

- 1- C.M. Wang, J.N. Reddy, K. H. Lee, 2000 – Shear deformable beams and plates – Relationships with Classical Solutions, ELSEVIER.
- 2- Irving H. Shames, Clive L. Dym, 1985 – Energy and finite element methods in structural mechanics, TAYLOR & FRANCIS.
- 3- Cowper, G. R., “The shear coefficient in Timoshenko’s beam theory”, J. Appl. Mech., **33**, 335-340 (1966).