مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة الآداب والعلوم الإنسانية المجلد (27) العدد (1)2005
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Arts and Humanities Science Series Vol (27) No (1) 2005

علاقة المنطق بالرياضيات عند رسل
. " حساب الفئات " نموذجاً .

الدكتور رشيد محمد الحاج صالح*

(قبل للنشر في 2005/9/21)

□ الملخّص □

قام هذا البحث باستجلاء العلاقة بين المنطق المعاصر والرياضيات عند رسل، ولا سيما علاقة الرياضيات بـ " منطق الفئات "، لكي يبين أن الأفكار المنطقية والطرق الرياضية التي قدمها منطق رسل كان لها دورا كبيرا في اندماج المنطق بالرياضيات وانفصاله عن الفلسفة والنقاشات الميتافيزيقية.

كما ناقش وفند الاعتقاد القائل بأن المنطق علم معياري له غايات فلسفية، من خلال التأكيد على أن المنطق المعاصر أصبح علما صوريا مستقلا يتمثل الطرق الهندسية والرياضية بشكل كامل.

* مدرس في قسم الفلسفة – كلية الآداب والعلوم الإنسانية – جامعة تشرين – اللاذقية– سوريا.

مجلة جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية _ سلسلة الآداب والعلوم الإنسانية المجلد (27) العدد (1)2005
Tishreen University Journal for Studies and Scientific Research- Arts and Humanities Science Series Vol (27) No (1) 2005

The Relationship between Logic and Mathematics According to Russel: The Example of Calculus of Classes

Dr. Rasheed Al haj Saleh*

(Accepted 21/9/2005)

□ ABSTRACT □

This research wants to understand the links between mathematics and modern logic according to Russel,s opinion, to explain that logical ideas and mathematical methods which are presented by Russel that played an important role that led to a combination between logic and mathematics. At the same time logic was separated from metaphysical discussions and philosophy.

The research tries to falsify the opinion which says that logic is a science of criterions, and it has philosophical purposes through affirming that modern logic is an independent formal science, and this science uses completely mathematical and geometrical methods.

***Assistant Prof, Department Of Philosophy, Faculty Of Arts And Humanities, Tishreen University – Syria.**

مقدمة:

علاقة المنطق المعاصر بالرياضيات علاقة وثيقة جداً تعود إلى أن المنطق اليوم أصبح يقوم على مجموعة من الطرق والأفكار الرياضية الصورية، مثلما تقوم الرياضيات على مجموعة من الأفكار المنطقية، بحيث أصبح من العسير إيجاد تمييز دقيق وواضح بين المنطق والرياضيات البحتة.

هذا التقارب الشديد يسمح بالقول أن المنطق المعاصر أصبح علماً صورياً مستقلاً ليس له علاقة خاصة بالفلسفة تميزه عن باقي العلوم، لأن علاقته بالفلسفة اليوم لا تختلف عن علاقة العلوم الأخرى كالفيزياء والطب بالفلسفة.

ويبدو أن استقلال المنطق المعاصر عن الفلسفة وارتباطه بالرياضيات، وكفه عن أن يكون علماً معيارياً، أمراً ليس واضحاً تماماً بالنسبة للذين يدرسون المنطق من زاوية فلسفية، لأن هذه العلاقة الوثيقة بين المنطق والرياضيات لم تكن لسان حال العلاقة بين المنطق القديم والرياضيات. فالمنطق القديم، وبالرغم من احتوائه لبعض الطرق الصورية ذات الطابع الاستدلالي، إلا أنه كان ذو نشأة ميتافيزيقية ومرتبط بغايات فلسفية أبعدته عن المطلب الصوري للرياضيات.أما المنطق المعاصر فقد تحرر من تلك الغايات وأصبح علماً صورياً مستقلاً.

غير أن الرياضيات التي أعادت بناء المنطق الحديث من جديد هي الرياضيات الحديثة التي تعود إلى القرن التاسع عشر والتي أصبحت بدورها أكثر صورية من الرياضيات القديمة. وتعود صورية الرياضيات الحديثة إلى مجموعة من الخطوات كان من أهمها:

أ. ترك الرياضيات للقضايا التي تتعلق بالفيزياء والأشكال المكانية.

ب. تحول كل الرياضيات إلى مجرد حساب للأعداد.

ج. استناد اليقين الرياضي إلى أفكار منطقية.

مجمل تلك الخطوات هي التي دفعت بالرياضيات باتجاه الصورية المحضة Pure Formalism وهي التي أدت بها دون قصد إلى الالتقاء بالمنطق كأساس ليقينها.غير أن الأثر الأكثر أهمية بالنسبة للمنطق الناتج عن تلك التطورات تمثل في إقامة المنطق على شكل نسق استنباطي رياضي.

تريد الأطروحة العامة للبحث أن تؤكد أن المنطق المعاصر لم يعد مرتبطاً بغايات فلسفية كما هو الحال بالنسبة للمنطق القديم. وأنه أصبح علماً صورياً مستقلاً عن الفلسفة، وأن هذا الاستقلال أتى بمساعدة الرياضيات التي أعادت بناء المنطق على أسس جديدة مختلفة تماماً عن الأسس التي بني عليها المنطق القديم.

ويحاول هذا البحث التأكيد على تلك الأطروحة من خلال استجلاء العلاقة بين المنطق الرياضيات عند رسل . ولا سيما نظرية حساب الفئات . والأسباب التي دفعت المنطق باتجاه الرياضيات، و دفعت بالرياضيات باتجاه المنطق، بعد أن كانت الرياضيات مهتمة بالحدس المكاني وكان المنطق مهتما بتنظيم الجدل المعرفي والفلسفي الذي يتناول الوجود.كما سعى إلى الوقوف على دور الرياضيات في إدخال الطرق الاستدلالية والاشتقاقية على المنطق، وما ترتب على ذلك من حصول قطيعة بين المنطق القديم والحديث كان لمنطق رسل دوراً هاماً فيها.

1. ظهور الرياضيات البحتة:

بالرغم من أن الرياضيات تعد النموذج الأعلى لليقين Certainty ، إلا أن الفلاسفة اختلفوا كثيرا حول منبع هذا اليقين. فذهب فريق إلى أن أساس هذا اليقين الحدس المكاني، ثم أتى فريق ثان ليقول أن أساس اليقين الرياضي هو الأعداد، في حين ذهب فريق ثالث إلى أن ذلك اليقين يرجع إلى عدد من المفاهيم المنطقية.

من الذين قالوا بالأساس المكاني الواقعي لليقين الرياضي، هناك الرياضي اليوناني اقليدس Euclide ، ولذلك كانت مقدمات نسق اقليدس الهندسي مطابقة للواقع ولم تكن مجرد مقدمات افتراضية. فالهندسة عند اقليدس لم تهتم فقط بالبرهنة على النظريات بالاستناد إلى الأفكار الأولية والمسلمات، وإنما اهتمت أيضا بالمضمون المادي للمقدمات، والذي هو مضمون مطابق للواقع الخارجي.

أما الفيلسوف الألماني كانط Kant (1724–1804) فقد تابع اقليدس في ربطه للرياضيات بالمكان، مع اختلاف بسيط يتمثل في أن الحدس المكاني special intuition عند كانط حدس ذاتي، في حين أنه عند اقليدس حدس واقعي.

والحدس المكاني عند كانط ذاتي لأن المعرفة بالعالم الخارجي عنده معرفة ذاتية، ولذلك فإن كل الرياضيات عند كانط "تبحث في شيء ذاتي نسميه صورة من الحدس"[1] . ومن هذه الصور هناك المكان والزمان، والزمان مصدر الحساب والمكان مصدر الهندسة، ولا يمكن لأي رياضي أن يجرب على الأشياء إلا في صورتي الزمان والمكان، ولذلك فإن كانط يؤكد على ضرورة أن تكون الرياضيات منطبقة على التجربة[2]. إن ربط الرياضيات بالحدوس الزمانية والمكانية يعني أن الرياضيات لم تكن صورية تهتم باتساق الفكر مع ذاته بقدر ما كانت تهتم بمطابقة الأشكال والنظريات الرياضية للواقع أيضا، ولذلك نجد كانط يقول: "إن التفكير الرياضي ليس صوريا بالمعنى الدقيق لأنه يستخدم دائما الحدوس، أي المعرفة الأولية بالزمان والمكان".[3]

فتفسير كانط لليقين الرياضي يعود إلى الحدس المكاني، ولذلك كانت القضايا المستمدة من ذلك الحدس ضرورة مطلقة، لأنها مطابقة للمكان الوحيد ومعبرة عن خواصه من جهة، ولأنها قبلية مستمدة من عقلنا أو تركيبتنا الذهنية من جهة ثانية.

فالأحكام الرياضية عند كانط قبلية تركيبية. قبلية لأنها ضرورية عقلياً، دحضها أمر مستحيل وتكذيبها يوقعنا في تناقض، وتركيبية لأنها تنطبق على العالم الخارجي وتعمل على إنشاء تراكيب هندسية واقعية جديدة. والمثال المفضل على الأحكام الرياضية لدى كانط هو الهندسة الاقليدية، فنظريات هذه الهندسة – كالقول مثلا أن مجموع زوايا المثلث تساوي قائمتين – نظريات عقلية تستند إلى حدس مكاني عقلي من جهة، كما أنها نظريات تجريبية يمكن التأكد منها واقعيا من جهة ثانية[4].

ولذلك فإن مشروع كانط الفلسفي يقوم كله على ضرورة أن لا تتجاوز المقولات القبلية لعقلنا حدود عالم الخبرة. إذ "ليس للمقولة من استعمال بصدد معرفة الأشياء سوى تطبيقها على موضوعات الخبرة".[5]

وإذا تجاوز عقلنا حدود عالم الخبرة فإن ذلك يوقعنا في "التناقضات" التي تؤدي عند كانط إلى القول بالنقيضين عن الموضوع الواحد. فإذا تحدثنا عن العالم بوصفه "كلية واحدة" . على سبيل المثال . وهو حديث يتجاوز حدود الخبرة، فإن ذلك سيؤدي إلى التساؤل عما إذا كان لهذا العالم بداية في الزمان وحد في المكان، لأن زمان هذا العالم لا يعقل أن يرتد إلى ما لانهاية من حيث نقطة الابتداء، أو يمتد إلى ما لانهاية في المكان. ولكن على النقيض من ذلك نستطيع أن نقول أن العالم ليس له بداية في الزمان، و لا حدود في المكان، لأنه لو سلمنا أن للعالم بداية في الزمان، والبداية وجود يسبقها زمن لم يكن فيه شيء يمكن أن نسميه "زمن فارغ"، لكان من المستحيل علينا تصور زمن فارغ لأن هذا الزمن لا يمكن التمييز فيه بين لحظة ولحظة وبغير تتابع اللحظات لا يمكن تصور الزمن. وكذلك لو سلمنا أن العالم متناه من حيث المكان فإنه سيكون وراء هذا التناهي "مكان فارغ" ولكان من المستحيل علينا تصور

مكان فارغ لأن هذا المكان لا يمكن التمييز فيه بين نقطة ونقطة، وبغير تحديد العلاقات بين النقاط لا يمكن تصور المكان. (6)

هكذا ينتهي كانط إلى أن الأحكام الرياضية قبلية تركيبية بنفس الوقت، ولا يمكن لها أن تكون قبلية فقط لأنها يجب أن ترتبط بعالم الخبرة وتؤطره، فهي الأساس الذي تقوم عليه المعرفة التجريبية.

أما رسل B.Russel (1872 – 1970) فإنه يعترض على قول كانط أن الأحكام الرياضية قبلية وتركيبية لأن حديث كانط لم يكن عن الزمان والمكان ذاتهما بل كان عن أشياء في الزمان والمكان، ولذلك لا بد من استبدال هذه الأشياء بالحدود والتصورات المنطقية، لأنه ليس من شأن الرياضيات التحدث عن فيما إذا كانت الأشياء موجودة أم لا. (7)

الاعتراض الثاني الذي يسوقه رسل على كانط أن الأخير لم يحاول إقامة اليقين الرياضي على أسس منطقية أو عددية ولذلك فإنه لم يحاول تحسيب الرياضيات arithmatization of mathematics، أي رد العمليات الرياضية إلى الأعداد بوصفها حدوداً أولية لكي يتمكن من تحرير الرياضيات من الحدوس المكانية. (8)

كما أرجع كارناب R.Carnap (1891–1970) الخطأ الذي وقع به كانط إلى عدم تمييز الأخير بين نوعين من الهندسة:الأول الهندسة الرياضية، والآخر الهندسة الفيزيائية. (9) والهندسة الرياضية هي الهندسة النظرية البحتة التي يمكن إرجاعها إلى مفاهيم منطقية، أما الهندسة الفيزيائية فهي هندسة تجريبية بالفعل. غير أن كانط لم يكن يميز بين القبلي العقلي والتركيبي التجريبي تمييزاً يسمح له بإدراك أن الرياضيات قبلية وليست تركيبية دون أن يكون له ذنب في ذلك، طالما أن الهندسة في زمانه كانت تقتصر على الهندسة المطابقة للواقع أو المكان الوحيد المعروف في ذلك الحين(10) . فالرياضيات بوصفها علم لا يهتم بالمطابقة مع الواقع بقدر ما يهتم بدراسة العلاقة بين المسلمات والمبرهنات وإقامة الأنساق الاستنباطية، أمر لم يكن قد تبلور بعد.

أما تحرر الرياضيات . ولا سيما الهندسة . من الأشكال المكانية فقد أتى نتيجة للتمييز بين الهندسة النظرية البحتة والهندسة الفيزيائية. وقد ظهر هذا التمييز نتيجة لظهور الهندسات اللاإقليدية non – euclidian geometries. التي بينت أن الحدس المكاني لم يعد يصلح أساساً لليقين الرياضي، على اعتبار أنه أصبح لدينا عدة هندسات لا تستند إلى حدس مكاني واحد. ويعود ظهور الهندسات اللاإقليدية الكثيرة إلى محاولات الرياضيين لإثبات أن المسلمة الخامسة في نسق اقليدس الهندسي، والتي تقول: "إذا قطع مستقيمان مستقيماً ثالثاً، وصنعا معه زاويتين داخليتين أقل من قائمتين من جهة واحدة، يتلاقى المستقيمين المذكورين أو امتدادهما في نفس الجهة المذكورة"، أنها ليست مسلمة واضحة بذاتها وإنما مبرهنة theorem يمكن البرهنة عليها عن طريق المسلمات الأخرى، أو إثبات أنها مستقلة عن المسلمات الأخرى للنسق، وأنه يمكن البرهنة على مبرهنات اقليدس دون الحاجة إلى الاستعانة بهذه المسلمة. (11)

وقد أقيم البرهان على أن هذه المسلمة مستقلة و لا تتمتع بالوضوح الذاتي، عن طريق برهان الخلف indirect proof الذي يقوم على وضع مسلمة أخرى تنكر المسلمة الخامسة، ضمن النسق الإقليدي، ثم النظر فيما إذا كانت ستؤدي تلك المسلمات إلى نفس نتائج النسق الإقليدي، فإذا كان ذلك كذلك فإن المسلمة الخامسة غير أولية ومستقلة عن النسق الإقليدي وإذا لم يكن ذلك كذلك فإن المسلمة الخامسة غير مستقلة عن النسق الإقليدي.

أما النتيجة غير المتوقعة الناتجة من اختبارات لوباتشيفسكي Lopatechewsky وريمان Reimann وبولياي Bolyai لمسلمة اقليدس الخامسة، فهي إثبات أنه يمكن الانطلاق من مسلمة مخالفة لمسلمة اقليدس

الخامسة، ومرتبطة ببقية مسلمات النسق الإقليدي، والوصول إلى نسق جديد متسق مع نفسه، ومن المحتمل أن يكون صحيحاً بالنسبة للعالم الواقعي. [12] ونتيجة ذلك أن المسلمة الخامسة مستقلة عن النسق الإقليدي ويمكن استبدالها بعدد لا متناهي من المسلمات يؤدي إلى عدد لا متناهي من الهندسات.

ولقد توقفنا عند هذه النتيجة مطولاً لأنها ستؤدي إلى تحولات كبيرة في توجهات الهندسة خلال القرن التاسع عشر. فقد أخذ الرياضيون يتخلون عن البحث التقليدي الهندسي والذي كان يبحث عن مطابقة النسق الهندسي مع الواقع الخارجي ومدى وضوح مسلماته بذاته، وبدؤوا بالبحث عن مدى اتساق الأنساق الهندسية مع نفسها. فقد اتضح للرياضيين أنه يمكن أن يكون هناك عدد كبير من الهندسات عن طريق تقديم مجموعة مختلفة من المسلمات، وبالتالي لم يعد يعنى الهندسي سوى بالاتساق بين المسلمات ، وأن يكون النسق الهندسي قادراً على البرهنة على كل المبرهنات الممكنة ضمن النسق.

هكذا أصبح علم الهندسة يقوم على الهندسات الممكنة أو المفترضة ولم يعد يعنى بمدى مطابقة النسق الهندسي للواقع الخارجي. وهذا يعني أن الهندسة تحولت إلى علم يبحث بالمجردات والافتراضات والشروط المنطقية للاتساق، فقد أصبح لكل هندسة تصورها المتخيل للمكان ولم تعد تستمد يقينها من الأشكال الهندسية المكانية المرتبطة بالواقع. ولعل هذه التطورات هي التي دفعت برسل إلى القول:إن الهندسة أصبحت "فرعا من فروع الرياضة البحتة" [13] .أي أصبحت علماً استنتاجياً يدرس علاقات اللزوم والاشتقاق بين المسلمات والمبرهنات بغض النظر عما إذا كان لهذه المسلمات أو المقدمات علاقة بالواقع.

ولذلك نجد رسل يؤكد: "أنه "إذا سمينا بديهيات اقليدس بالاسم آ، وكانت ق أي قضية تلزم عن آ، في الهندسة التي سبقت لوباتشيفسكي ق تكون محكوماً بها، لأن آ كان محكوماً بها، ولكن المشتغل بالهندسة في يومنا هذا لا يحكم إلا بان آ تستلزم ق تاركاً آ، ق ذاتها في شك...، وقد تكون عنده مجموعات أخرى من البديهيات آ1، آ2، ... تستلزم ق1، ق2، ... على الترتيب، وحينئذ يكون اللزوم وحده منتمياً للهندسة" [14].

ذلك أن استقلال الهندسة عن المكان أفقدها أساس يقينها، وبالتالي كان لا بد من البحث عن أساس جديد تبني عليه الهندسة قضاياها ويكون أساس يقينها. وقد وجدت الهندسة في البناء المنطقي للنسق الهندسي أساساً جديداً لليقين، فإذا كنا نقبل بالأنساق الهندسية قديماً لأنها متطابقة مع المكان المتاح لنا، فإننا اليوم نقبلها فقط لأنها متسقة منطقياً مع نفسها.

فقد أصبح واضحاً لدى جميع الرياضيين أن قوة النسق ترتبط بمدى التزامه بالشروط المنطقية للأنساق، وأن هذا الالتزام هو الكفيل بمنح النسق صفة اليقين. ويمكن تحديد الشروط المنطقية للأنساق بالنقاط التالية: [15]

أ. تحويل الكائنات الهندسية – أو أي كائنات رياضية – إلى فئات منطقية logical classes . فالهندسة النظرية البحتة لم تعد تستخدم ألفاظ النقطة والمستقيم والسطح، وإنما أصبحت تشير إلى هذه الكائنات عن طريق الرموز أو المتغيرات variables . كما أصبحت تشير إلى العلاقات بين الكائنات الهندسية بالثوابت constants المنطقية، كاللزوم والعطف والنفي والفصل والتكافؤ.

وهذا يؤدي إلى رفض كل المسلمات والتصورات التي تستند بداهتها إلى حدس المكان، بحيث تحل معاني الفئات والعلاقات المنطقية بدل المعاني المستمدة من الحدس المكاني. فمعنى النقطة والمستقيم والسطح لم يعد مستمداً من المعاني المألوفة التي تعود إلى أشكال هندسية لها صلة بالمكان، وإنما تستمد من الفئات المنطقية التي تنتمي إليها النقاط والمستقيمات. [16] فقد أصبح ينظر للمسلمات "كما لو كانت كائنات أو خصائص صورية بحتة

لا صلة لها بعالمنا الواقعي ولا معنى لها غير ما تحدده العلاقات المنطقية من معنى تقدمه على هيئة مسلمات"[17].

ب. إن مسلمات أي نسق هندسي يمكن اختيارها بشكل حر وبحسب ما تمليه إرادة الهندسي، شريطة أن تختصر المسلمات إلى أقل عدد ممكن بحيث لا يجوز استنتاج مسلمة من مسلمات النسق من أي مسلمة أخرى .

ج. لا يجوز أن تتناقض المسلمات مع بعضها البعض، بحيث لا يمكن للنسق أن يبرهن على قضية ونقيضها بنفس الوقت.

د. لا بد للنسق أن يكون مكتملا completeness ويستطيع البرهنة على جميع المبرهنات الممكنة في النسق. [18]

هكذا ظهرت عشرات الأنساق الهندسية، بل أصبح لكل هندسي نسقه الخاص الذي يقيمه لحل مشكلة هندسية ما، أو لإقامة مسألة هندسية ما، بحيث أصبحت الأنساق الهندسية هي الطريقة للتفكير الهندسي والرياضي عموماً. إذ يقوم الهندسي باختيار حدوده الأولية ومسلماته وتعريفاته، ثم يشرع بعد ذلك في اشتقاق المبرهنات من تلك المسلمات والتعريفات.

وما يهمنا من مجمل التطورات السابقة عدة نقاط نوجزها في الآتي:

أ. أصبحت الهندسة علماً نظرياً بحتاً يدرس كائنات وعلاقات منطقية بحتة بعيداً عن الأشكال المكانية، عن طريق تحويل المسلمات والحدود الهندسية الحدسية إلى كائنات منطقية. وهذا يعني أن النظريات الرياضية "لم تعد تختبر مثل النظريات الفيزيائية باشتقاق توكيدات يتم مقارنتها مع نتائج الملاحظات الواقعية" [19] . وأن الرياضيات لم تعد تمتلك أي محتوى واقعي factual [20].

ب. لم يعد يوجد هندسة أصدق من هندسة أخرى، أو هندسة أكثر وضوحاً من هندسة أخرى، وإنما أصبحت كل الهندسات متساوية تقام على مسلمات مفترضة يختارها صاحبها بشكل حر. و هذا يعني أن مضمون مسلمات النسق لم يعد يحتل مكان الصدارة في الهندسة، فقد تحولت الصدارة للعلاقات المنطقية التي تربط المسلمات والمبرهنات. فالهندسة لم تعد تدرس الكائنات الهندسية بل أصبحت تدرس "منظومة العلاقات التي ينسجها المنهج على الأوليات ... لقد تحول الاهتمام من الأوليات إلى الدور الذي تلعبه هذه الأوليات في البناءات الاكسيومية" . [21]

ج. تلاشي الاختلاف بين البديهيات axioms والمسلمات postulats في الأنساق الهندسية الحديثة[22]. فالهندسة الاقليدية كانت تفرق بين البديهيات والمسلمات حيث أن البديهيات قضايا واضحة بذاتها كل الوضوح ولا يمكن البرهنة عليها، كالقول بأن المقداران المساويان لمقدار ثالث متساويان، أو الكل أكبر من الجزء.

أما المسلمات فهي قضايا ليست واضحة بذاتها كل الوضوح ولكننا مطالبين بالتسليم بها، ثم بعد التسليم بها نتوصل من خلالها إلى البرهنة على المبرهنات، فالمسلمات تشبه الفروض التي إذا سلمنا بها كان علينا أن نسلم أيضاً بالنتائج المترتبة على تلك الفروض.

أما مع الأنساق الهندسية اللااقليدية فقد تحولت البديهيات إلى مسلمات ولم يعد هناك فارق بين الاثنين، لأن الأنساق الهندسية اللااقليدية لم تعد تنطلق من بديهيات واضحة بذاتها وإنما من مسلمات مفترضة فقط تشكل نقطة بداية النسق. فقد اتضح مع اكتشاف الهندسات اللااقليدية أن البديهيات التي أخذت على أنها واضحة بذاتها وصادقة بشكل ضروري في هندسة اقليدس، هي في الحقيقة ليست صادقة بشكل ضروري وأنها قد تكون مبرهنات في أنساق أخرى ولذلك آثرت الهندسة التخلي عن البديهيات بوصفها قضايا واضحة بذاتها والاكتفاء بالقول بالمسلمات كنقطة بداية لأي نسق تريد أن تقيمه.

ففي الهندسة لم يعد مهماً أن ننطلق من قضايا واضحة بذاتها أو غير واضحة بذاتها، بل المهم أن تكون هناك نقطة بداية للنسق ومسلمات يمكن أن نبني على أساسها نسقاً منتجاً، وذلك من خلال الاهتمام بالناحية الصورية للترابطات الموضوعية objective correllates ضمن النسق الرياضي.

2. تحسيب الرياضيات

لم تقتصر حركة تطوير الرياضيات على تحويل الهندسة إلى علم صوري محض يهتم بالعلاقات المنطقية داخل النسق الهندسي، بل تعدتها إلى تحويل علم الجبر إلى حساب يتناول الأعداد. فكما خطت الهندسة خطوات مهمة تجاه الصورية والتخلص من الحدوس المكانية، كذلك تقدم علم الجبر . ولا سيما في القرن التاسع عشر . باتجاه الصورية من خلال تحسيبه arithematisation . والمقصود بالتحسيب تحويل النظريات الجبرية والرياضية إلى نظريات في الأعداد، ورد جميع الفروع الرياضية . بما فيها الهندسة . إلى أنساق تتناول تلك الأعداد.

أما الغاية من تحويل كل فروع الرياضيات إلى أنساق عددية فهو البحث عن أساس لليقين الرياضي. فقد وجد رياضيو تلك الفترة أن الأنساق الحسابية العددية تتمتع بتسلسل جميل وتماسك بديع جامع يسمح لها بأن تكون الأساس الذي يبنى عليه اليقين الرياضي. (23)

ولعل البحث عن اليقين هو الذي دفع الجبر إلى التخلي عن الأساس الهندسي له. فقد كان الجبر يكتسب يقينه من الهندسة عن طريق تحويل رموزه إلى أشكال هندسية، أو تحويل الحروف إلى أبعاد. ولذلك فإن العبارات الجبرية كانت تفسر عن طريق الأشكال الهندسية. وبما أن الأشكال الهندسية لم تعد هي الأساس لليقين الهندسي فإنه من الطبيعي أن يتخلى الجبر أيضا عن الأشكال الهندسية كأساس ليقين معادلاته.

يضاف إلى ذلك أن التفكير الجبري بطريقة هندسية كان يخلق مشكلات عديدة للجبر، منها أن الجبر لم يستطع أن يعبر عن العمليات الجبرية والعددية التي لا توجد أشكال هندسية تقابلها. ولحل مثل هذه المشكلة وغيرها تم تحويل الأشكال الهندسية نفسها إلى أعداد بحيث أصبح يشكل العدد اليقين الأخير، من خلال تحويل الرموز إلى أعداد، بدل أن كانت تحول إلى أشكال هندسية، ثم تطبيق نظريات الحساب والجبر على تلك الأعداد. (24)

هكذا تحول الحساب إلى أساس لكل فروع الرياضيات وأصبح على كل فرع رياضي يريد أن يثبت انتسابه إلى الرياضيات القيام برد جميع قضاياه وقوانينه إلى علم الحساب وأصبحت الأعداد "هي حجر الزاوية في تأسيس الرياضيات بما فيها الهندسة". (25)

3. المنطق والجبر:

النجاح الذي حققه الجبر في امتصاص كل فروع الرياضيات وتحسيبها دفع جورج بول Boole (1815–1864) إلى تطبيق قوانين الجبر على المنطق. وحجة بول في ذلك أن قوانين الجبر بالنسبة لديه هي قوانين الفكر بعامة وتنطبق على كل مجالات الفكر البشري، ولذلك يمكن تطبيقها على كل فروع المعرفة بما فيها المنطق. (26)

وقد تمت عملية إدماج المنطق في الجبر من خلال إقامة المنطق على نموذج علم الجبر وتحويل القضايا المنطقية إلى معادلات جبرية، بحيث أصبح المنطق جزءاً من الرياضيات.

وتعود أهمية ذلك الاندماج بين المنطق والجبر إلى أن بول قد أجرى تحويلاً جذرياً على طريقة فهم المنطق سمح بنشوء قطيعة بين التصور الجديد والتصور القديم للمنطق. وتعود هذه القطيعة إلى أن المنطق لم يعد مرتبطاً بغايات فلسفية بل أصبح مرتبطاً بالرياضيات. ولذلك نجد بول يؤكد أنه لم يعد "من الجائز أن نجمع بين المنطق والغيبيات، بل يجب جمع المنطق والرياضيات" (27).

أما الخطوات التي قام بها بول من أجل تحويل المنطق إلى جبر فهي: [28]

أ. تحويل القضايا المستخدمة في المنطق إلى معادلات جبرية تربط بينها علاقة المساواة. أي جعل علاقة المساواة هي التي تربط بين المقدمات والنتيجة. وهي العلاقة التي سيحولها رسل فيما بعد إلى علاقة لزوم.

ب. تحويل الرموز المنطقية إلى رموز كمية تتقبل فقط قيمتي الصفر والواحد. والصفر يشير إلى الفئة الخالية والواحد يشير إلى الفئة الشاملة أو عالم المقال.

ج. تحويل الجمع والضرب في الجبر إلى جمع منطقي وضرب منطقي، وتطبيق العمليات الجبرية من تجميع وتبديل على العمليات المنطقية. وبنتيجة هذه الخطوات يمكن تحويل القضايا الحملية الأربع في القياس الأرسطي إلى حساب جبري خالص، وذلك على النحو التالي:

ك.م : كل س ع ← س(1−ع) = صفر

ك.س : لا س ع ← س×ع = صفر

ج.م : بعض س ع ← س×ع ≠ صفر

ج.س : ليس بعض س ع ← س(1−ع) ≠ صفر

غير أن تطبيق بول للعمليات الجبرية على المنطق لاقى بعض الصعوبات التي تمثلت في أن تطبيق قوانين الجبر على المنطق كان تطبيقاً متكلفاً لأن العمليات الجبرية لم تتلاءم كثيراً مع المنطق. فإذا أخذنا –على سبيل المثال– القانون التالي من جبر المنطق وهو "س2 = س" ، أي أن فئة منطقية – ولتكن العلماء مثلاً– مضروبة بنفسها تؤدي إلى الفئة نفسها لأن التكرار في المنطق لا طائل منه ومجرد لغو، إن هذا القانون ليس صحيحاً في الجبر العادي لأن "2^2 لا تساوي 2" ومرد هذا الاختلاف أن رموز المنطق فئات وليس مجرد فئات تشير إلى أرقام كما هو حال الجبر العادي. ولذلك يمكن القول أن جبر بول المنطقي لم يستطع التحرر من متعلقات الحساب العددي، وهذا ما أدى إلى زيف بعض قوانين جبر المنطق، وإلى عدم إمكانية تعميم قوانين الجبر على المنطق مع الاحتفاظ بخصوصية العمليات المنطقية.

إن مثل تلك الصعوبات التي اعترضت تعميم قوانين الجبر على المنطق – وصعوبات أخرى غيرها– هي التي أدت إلى تراجع أهمية تطبيق الجبر على المنطق لأجل إقامة المنطق على أسس رياضية جديدة، وهي التي أوحت لرسل بإمكانية إقامة المنطق على أسس رياضية مختلفة عن طريق بول الجبرية.

غير أن ذلك لا يقلل من أهمية جبر المنطق عند بول، والتي تتمثل في توجيه المنطق باتجاه الرياضيات، وهو توجه طبع كل المحاولات اللاحقة التي حاولت إقامة المنطق على أسس رياضية. ويبدو أن هذه الأهمية هي التي دفعت بمؤرخ المنطق الكساندر ماكوفليسكي إلى القول: "إن المنطق لم ينفصل عن الفلسفة إلا في عام 1847، تاريخ صدور كتاب التحليل الرياضي للمنطق، للرياضي الإنكليزي جورج بول"[29].

إن عدم نجاح جبر بول في دمج المنطق في الرياضيات من جهة، والشكوك التي أخذت تظهر حول الأعداد بوصفها أساس اليقين في الرياضيات، هي التي دفعت رسل إلى البحث عن نموذج جديد للتفكير في علاقة المنطق بالرياضيات وإقامة هذه العلاقة على أسس جديدة. ويختلف نموذج رسل المنطقي عن جبر المنطق عند بول في أن الأول قام بإرجاع المفاهيم الرياضية إلى مفاهيم منطقية أولاً، وأقام المنطق على شكل نسق استنباطي ثانياً، في حين بقي بول في حدود إرجاع المنطق إلى الجبر وتطبيق القوانين الجبرية عليه.

أما القضية التي لفتت انتباه رسل إلى إمكانية إقامة العلاقة بين المنطق والرياضيات على أسس جديدة، فهي قضية "تعريف العدد" وتحويله من كائن رياضي إلى كائن منطقي.

4. الأساس المنطقي للرياضيات:

إن البحوث الرياضية التي قنعت بالأعداد كأساس لليقين الرياضي سرعان ما تخلت عن العدد بوصفه موجوداً أولياً، وأخذت تبحث عن الحدود الأولية التي يتشكل منها العدد لكي تؤسس منطقياً ورياضياً لفكرة العدد.

فالرياضيات التي كانت تقف عند العدد بوصفه أساساً لليقين، وكائناً بديهياً بذاته لا يحتاج إلى تحليل لما هو أبعد منه، أخذت تبحث في إمكانية اشتقاق الأعداد من أفكار وثوابت أولية. وقد بدأ الرياضيون باشتقاق الأعداد الطبيعية لأنها أبسط الأعداد. كما تطلبت مسألة اشتقاق العدد من كائنات أولية نسقاً استنباطياً خاصاً بالعدد.

ومن أهم المحاولات التي اشتقت مفهوم العدد الطبيعي من مجموعة من الأفكار الأولية والمسلمات، هناك محاولة الرياضي الإيطالي بيانو Peano (1855–1932). ويقوم نسق بيانو للأعداد الطبيعية على النحو التالي: [30]

أ. الأفكار الأولية: وهي ثلاثة أفكار

- الصفر
- العدد
- التالي

ب. المسلمات: وهي خمس مسلمات

- الصفر عدد
- التالي لأي عدد عدد
- ليس لعددين نفس التالي
- الصفر ليس تاليا لأي عدد
- إن أي خاصية، عندما تعود إلى عدد ما، فإنها تعود إلى تالي ذلك العدد، وتعود إلى كل الأعداد.

وبوساطة كل هذه الأفكار الأولية والمسلمات يمكن لأي رياضي أن يقيم سلسلة لا متناهية للأعداد الطبيعية، بحيث تبدأ السلسلة بالصفر ثم تعرف الواحد بأنه تالي للصفر، والعدد 2 بأنه تالي للواحد ... وبذلك نحصل على أعداد جديدة كلما تقدمنا في السلسلة.

وبالرغم من أن نسق بيانو كان نسقاً محكماً ومحققاً لمتطلبات الدقة الرياضية، إلا أن رسل ومعه فريجة Frege (1848–1925) رفضا ذلك النسق لأنه يميز بين العدد صفر وباقي الأعداد ولأنه لا يستطيع تعريف العدد اللانهائي ولا يعرف العدد صفر.

ولذلك حاولا إقامة العدد على أسس جديدة واختيار أفكار أولية غير أفكار الصفر والعدد والتالي، وقد وجدا أن هناك بعض الأفكار الأولية المنطقية جديرة بأن تكون أفكار أولية للعدد، وهي أفكار أبسط من الأفكار الأولية في نسق بيانو.

ولقد قامت عملية رد الأعداد إلى مفاهيم منطقية خالصة على شكل نسق استنباطي، يضع تلك المفاهيم كأفكار أولية، بحيث لا نحتاج في هذا النسق إلا إلى المفاهيم والقواعد المنطقية فقط. فبدلا من رموز بيانو التي كانت تشير إلى كائنات رياضية بحيث:

س تشير إلى صفر

ع تشير إلى عدد

س1 تشير إلى تالي

أصبح بالإمكان تفسير تلك الرموز بطريقة مختلفة، بحيث يمكن أن يشير أي عدد سواء كان صفرا أو 1 أو2 أو 3 ... إلى فئة الفئات class of classes المتشابهة. ليصبح العدد 1 فئة الفئات التي تحتوي على عضو واحد، والعدد 2 فئة الفئات التي تحتوي على عنصرين ... ويصبح العدد صفر فئة الفئات الخالية من أي عضو. أما مفهوم العدد فإنه فئة كل الأعداد وبذلك فإنه فئة من المرتبة الثالثة[31].

ويستخرج رسل مفهوم الفئة من التشابه similarity بحيث تشكل كل مجموعة متشابه فئة. ولذلك فإن كل عدد هو فئة كل الفئات المتشابه الثنائية أو الثلاثية أو الرباعية أو الخماسية ... ، أو هو فئة كل الفئات التي تمتلك خاصية property متشابه.

هكذا تمكن رسل من تحويل الحدود الأولية للعدد من كائنات رياضية إلى كائنات منطقية هي الفئة والشبه. والفئة و الشبه والخاصية هي مفاهيم منطقية خالصة أو تراكيب منطقية logical constract [32]. لأنها من ابتكار العقل البشري عندما يحاول تنظيم أشياء العالم في مجموعات. ولذلك فإنه ليس للفئة وجود موضوعي مستقل عن العقل الذي ابتكرها، كما هو حال الأشياء التي تنتظم في فئات. فالفئة "مجرد وسيلة لغوية للتحدث عن مجموعة من الأشياء دون أن تؤلف شيئاً بالإضافة إلى الأشياء" [33].

وإذا كان تحويل الأعداد إلى كائنات منطقية أدى إلى أن كل الرياضيات – التي تستمد يقينها من العدد – أصبحت تستند إلى مقدمات منطقية خالصة، بحيث أصبحت الرياضيات جزءاً من المنطق أو نتيجة من نتائجه، فإن الاهتمام بالفئات أدى إلى ظهور نظرية الفئات theory of classes أو حساب الفئات calculus of classes .

ونظرية الفئات هي تجسيد لتداخل المنطق والرياضيات، لأنها نظرية منطقية ورياضية بنفس الوقت، ولذلك فإننا نجد عشرات الصياغات المنطقية والرياضية لحساب الفئات.

أما حساب رسل للفئات فيتألف من: [34]

أ. الحدود الأولية: الفئة ، الفئة الفارغة null class ، الفئة الشاملة universal class ، ثوابت الجمع المنطقي والضرب المنطقي والمساواة والانتماء ...، بالإضافة إلى متغيرات الفئات س، ص، ع ... الخ، ومتغيرات العناصر أ،ب،ج... .

ب. التعريفات: من قبيل[35]

تعريف التضمن : س ⊂ ع = (أ∈س ⇐ أ∈ع)

تعريف الضرب المنطقي: س ∩ ع= (أ∈س . أ∈ع)*

تعريف الجمع المنطقي : س ∪ ع = (أ∈س v أ∈ع)**

ويعني التعريف الأول أنه إذا كانت لدينا فئتين الأولى متضمنة في الثانية، فإنه إذا وجد عنصر أ ينتمي إلى الفئة الأولى فإنه ينتمي أيضا إلى الفئة الثانية. ويعني التعريف الثاني أن حاصل الضرب المنطقي بين الفئتين س، ع هو

---

* (⊂) رمز التضمن ويسمى اللزوم في حساب القضايا، (.) رمز العطف المنطقي، (∈) رمز انتماء عنصر إلى فئة، (∩) رمز الضرب المنطقي ويسمى أحياناً بالتقاطع.

** (∪) رمز الاجتماع، (v) رمز الفصل .

*** الصفر يشير إلى الفئة الفارغة .

كل العناصر التي تنتمي إلى س، ع. ويعني التعريف الثالث أن حاصل الجمع المنطقي بين س و ع يعني أن أ إما أن تنتمي إلى أو إلى ع أو إليهما معاً .

ج. المسلمات: من قبيل

1- هناك فئة صفر بحيث س + صفر = س*** .

2- هناك فئة 1 بحيث س × 1 = س .

3- (س × ع) = (ع × س) .

4- (س + ع) = (ع + س) .

5- س + (ع×ص) = (س+ ع) × (س + ص) .

والهدف من هذه المسلمات المساعدة على اشتقاق المبرهنات .

د. قواعد الاستنباط :

1- قاعدة الاستبدال : وهي قاعدة يمكن من خلالها أن نحول صيغة ما إلى صيغة مكافئة لها بحيث تنتج صيغة جديدة نريد البرهنة عليها. وتتم عملية التحويل هذه من خلال وضع فئة أو معادلة ما مكان فئة أو معادلة في الصيغة الأصلية بحيث يتم الاستبدال في جميع المواضع التي ترد فيها الفئة أو المعادلة في الصيغة الأصلية، إلى أن نصل إلى صيغة جديدة مكافئة للصيغة الأصلية.

إذ يمكن عن طريق هذه القاعدة استبدال الصيغة :

(س × ع) = (ع × س) بالصيغة الرياضية (4 ×6) = (6×4)

2- قاعدة الاستدلال : بموجب هذه القاعدة، إذا كان لدينا صيغة ما ولتكن ق وكانت ك تلزم عنها ، كان من الممكن أن نستدل على ك ونحذف ق، أي أن نكتفي بنتيجة اللزوم دون ذكر مقدمة اللزوم. وتشبه هذه القاعدة قاعدة إثبات المقدم في حساب القضايا . هكذا يكون نسق الفئات جاهزاً للبرهنة على النظريات بنفس الطريقة التي تجري بها عملية البرهنة في الأنساق الهندسية.

ونحن تناولنا حساب الفئات لكي نبين أن تحويل الأعداد إلى فئات وتقديم حساب الفئات على شكل نسق استنباطي شكلا الجسر الذي عبر عليه المنطق إلى الرياضيات.فقد اتضح أن "سحر الأعداد [36] الذي هو أساس اليقين الرياضي يمكن إرجاعه أو اشتقاقه انطلاقاً من حدود منطقية. فنحن عندما نريد دراسة الرياضيات البحتة فإننا نستطيع أن نرجع كل فروع الرياضيات إلى حساب الأعداد، ثم نستطيع أن نرجع حساب الأعداد إلى حساب الفئات، المبني بدوره على حدود أولية منطقية.

وهذا يعني أن كل فروع الرياضيات حققت وحدتها في كل يجمعها أولاً، ويعني ثانياً أن الحدود بين المنطق والرياضيات البحتة أصبحت حدود غير واضحة، لأن "الرياضيات بأكملها أصبحت تقوم على المنطق الرمزي" [37].

إن هذا التقارب الشديد بين المنطق والرياضيات هو الذي سمح لرسل بتعريف الرياضيات البحتة بأنها: باب جميع القضايا التي صورتها (ق يلزم عنها ك)، حيث ق،ك قضيتان لا تشتملان على ثوابت غير الثوابت المنطقية. [38]

وطالما أن اللزوم هو مفهوم منطقي فإن الرياضيات كلها أصبحت مفهومة منطقياً، أي أصبحت جزءاً من المنطق، وذلك بخلاف جورج بول الذي توصل إلى أن المنطق يشكل جزءاً من الرياضيات.

ولم يقتصر رسل في عملية دمج المنطق والرياضيات مع بعضهما على تقديم حساب الفئات، بل إننا نجده يقيم نظريات منطقية جديدة عن طريق أنساق استنباطية شبيهة بنسق الفئات. ولذلك نجده يقدم نسقاً خاصاً بحساب القضايا

ونسقاً خاصاً بحساب العلاقات. وهي أنساق قربت أكثر بين المنطق والرياضيات، إذ أصبحت الحدود بين المنطق والرياضيات ، ضمن تلك الأنساق حدوداً غير واضحة.

هكذا نجد أن المنطق الصوري المعاصر نشأ من "الطريقة البديهية في الهندسة" [39]. أي من الطريقة الاكسيومية أو الأنساق الاستنباطية، ولذلك فإن رسل يعد من أكبر المؤسسين لهذا المنطق لأنه "أول من صاغ نسقاً منطقياً بدون أي دلالة إلى التعيين designata " [40]. ولأنه أهم من أسس للاندماج بين المنطق والرياضيات البحتة وذلك من خلال:

أ. إرجاع المفاهيم الرياضية إلى مفاهيم منطقية، بحيث أصبح المنطق أساس الرياضيات.

ب. إقامة النظريات المنطقية على شكل أنساق استنباطية مستمدة من الطريقة الهندسية.

الهوامش:

1. برتراند رسل: أصول الرياضيات، ترجمة محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، ج4، دار المعارف، القاهرة، 1964، ص135.
2. المرجع نفسه، ص 135
3. بيرترا ند رسل: أصول الرياضيات، ج1، ص 33
4. عمانوئيل كانط: نقد العقل المحض، ترجمة موسى وهبة، مركز الإنماء العربي، لبنان، د. ت ، ص 49.

5. المرجع نفسه، ص 105. يذكر أن كانط يميز بين المعارف القبلية والمعارف القبلية المحضة. فالأولى و بالرغم من أنها قبلية إلا أنها ترتبط بعالم الخبرة وتؤطره، بل إنها الأساس الذي تقوم عليه المعرفة التجريبية. أما الثانية فهي قبلية محضة لا علاقة لها بعالم الخبرة ولا يخالطها أي شيء تجريبي أبدا. فقضية مثل "كل تغير له سببه" قضية قبلية ولكنها ليست محضة، لأن التغير مفهوم يمكن استخراجه من التجربة أيضا. أما المعارف القبلية المحضة فهي التي تتناول الله والحرية والخلود. راجع: عمانوئيل كانط: نقد العقل المحض، ص 45-47.
6. المرجع نفسه، ص 228. وكذلك : زكي نجيب محمود: نحو فلسفة علمية، مكتبة الإنجلو المصرية، القاهرة، 1951، ص 42.
7. برترا ند رسل: أصول الرياضيات، ج4، ص 140 .
8. المرجع نفسه، ص 141.
9. رودولف كارناب: الأسس الفلسفية للفيزياء، ترجمة السيد نفادي دار الثقافة الجديدة، القاهرة، 1990، ص 211.
10. المرجع نفسه، ص 211
11. فايز فوق العادة: منعطف الرياضيات الكبير، منشورات وزارة الثقافة، دمشق، 1987، ص 30.
12. برترا ند رسل: أصول الرياضيات، ج4، ص 8 .
13. المرجع نفسه، ص 8 .
14. المرجع نفسه، ص 8 -9 .
15. Paul Bernays: "Hilbert, David", in The Encyclopedia of Philosophy, Paul Edwards (ed. inch) The Macmillan Company and The Free Press, New York –London, Vol.3 1967, p 500 .
16. محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، 1969، ص 70- 71 .
17. المرجع نفسه، ص 72.
18. Paul Bernays : "Hilbert, David", P.500.
19. R.Carnap: Foundation of Logic and Mathematics, University of Chicago press, Chicago – Illinois, 1949, p.2.
20. Ibid,p.2
21. محمد عابد الجابري: تطور الفكر الرياضي والعقلانية المعاصرة، ج1، دار الطليعة، بيروت، 1982، ص 134.
22. بول موي: المنطق وفلسفة العلوم، ترجمة فؤاد حسن زكريا، مكتبة دار العروبة، الكويت، 1981، ص ص 115-116.
23. محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة، ص 110
24. المرجع نفسه: ص 106.
25. المرجع نفسه، ص 117.

26. روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، ترجمة خليل أحمد خليل، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، 1980، ص 368.
27. المرجع نفسه، ص 365.
28. حول جبر بول ولغته الجبرية: راجع:
- محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي، نشأته وتطوره، دار النهضة العربية، 1973، ص 75–85.
- روبير بلانشي: المنطق وتاريخه، ص 365–392.
29. الكسندر ماكوفليسكي: تاريخ علم المنطق، ترجمة نديم علاء الدين وابراهيم فتحي، دار الفارابي، بيروت، 1987، ص 6.
30. برتراند رسل: مقدمة للفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسي أحمد، مراجعة أحمد فؤاد الأهواني، مؤسسة سجل العرب، القاهرة، 1980، ص 7.
31. المرجع نفسه، ص 20–23.
32. كريم متى: المنطق الرياضي، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1979، ص 195.
33. المرجع نفسه، ص 195.
34. B.russel – A.Whitead: Principia Mathematica, Cambridge University Press, Londom, vol. 1, 1963, p.205
35. Ibid, p.p 205-206
36. فايز فوق العادة: منعطف الرياضيات الكبير، ص 75.
37. برترا ند رسل، أصول الرياضيات، ج1، ص 33.
38. المرجع نفسه، ص 31.
39. R. Carnab: Foundation of Logic and Matematics, P.17.
40. Ibid, P.17.

المراجع:

1.الكسندر ماكوفليسكي: تاريخ علم المنطق، ترجمة نديم علاء الدين وابراهيم فتحي، دار الفارابي، بيروت، 1987.
2. برتراند رسل: أصول الرياضيات، ترجمة محمد مرسي أحمد وأحمد فؤاد الأهواني، ج1– ج4، دار المعارف، القاهرة، 1964.
3. بول موي: المنطق وفلسفة العلوم، ترجمة فؤاد حسن زكريا، مكتبة دار العروبة، الكويت، 1981 .
4. رودولف كارناب: الأسس الفلسفية للفيزياء، ترجمة السيد نفادي دار الثقافة الجديدة، القاهرة، 1990 .

5. روبير بلانشي: المنطق وتاريخه من أرسطو حتى رسل، ترجمة خليل أحمد خليل، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت، 1980 .
6. زكي نجيب محمود: نحو فلسفة علمية، مكتبة الإنجلو المصرية، القاهرة، 1951 .
7. عمانوئيل كانط: نقد العقل المحض، ترجمة موسى وهبة، مركز الإنماء العربي، لبنان، د. ت .
8. فايز فوق العادة: منعطف الرياضيات الكبير، منشورات وزارة الثقافة، دمشق، 1987.
9. كريم متى: المنطق الرياضي، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1979 .
10. محمد ثابت الفندي: فلسفة الرياضة، دار النهضة العربية، بيروت، 1969 .
11. محمد عابد الجابري: تطور الفكر الرياضي والعقلانية المعاصرة، ج1، دار الطليعة،بيروت، 1982.
12. محمود فهمي زيدان: المنطق الرمزي، نشأته وتطوره، دار النهضة العربية، 1973 .
13. Paul Bernays: "Hilbert, David" , in The Encyclopedia of Philosophy, Paul Edwards (ed. inch) The Macmillan Company and The Free Press, New York –London, Vol.3 1967.
14. R.Carnap: Foundation of Logic and Mathematics, University of Chicago press, Chicago – Illinois, 1949.
15. B.russel – A.Whitead: Principia Mathematica, Cambridge University Press, Londom, vol. 1, 1963.